Les mouvements vibratoires, la construction de Fresnel et les nouveaux programmes de mathématiques !

par M. DE COINTET (I.R.E.M. de Strasbourg)

Le Bulletin de l'Union des Physiciens a publié, en mai 1972, un article intitulé "*Systèmes Physiques Linéaires Unidimensionnels*" de MM. Etienne COQUET et Serge BERRETA. Cet article a inspiré au groupe "*Mathématique et Physique*" de l'I.R.E.M. de Strasbourg les réflexions qui suivent, à propos de l'étude des phénomènes périodiques sinusoïdaux dans les classes de Terminales scientifiques :

Rappelons que traditionnellement on utilise, pour l'étude de ces phénomènes :

a) soit la construction de Fresnel :

A la fonction $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ on "associe" le vecteur $\overrightarrow{OA}$ d'un plan muni d'un repère orthonormé dont la norme est l'amplitude et dont l'angle polaire est la phase du mouvement sinusoïdal. Par convention, sur les graphiques, on trace le représentant du vecteur $\overrightarrow{OA}$ à l'instant $t = 0$.

b) soit les nombres complexes :

A tout instant t, $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ est la partie imaginaire du nombre complexe $z = a\, e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ ($j^2 = -1$).

1° Il semble qu'il y ait dans l'emploi de la représentation de Fresnel l'idée qu'il y ait UN plan mathématique de référence, celui des vecteurs de la géométrie élémentaire, dont on confond les propriétés mathématiques, l'illustration physique et la représentation graphique.

2° On a recours dans chaque cas à un modèle mathématique préfabriqué, à priori assez arbitraire et assez "étranger" aux phénomènes physiques étudiés, dont on utilise les propriétés pour en déduire des résultats sur les fonctions sinusoïdales. Et, de fait, "ça marche".

3° Il y a risque de confusion entre la fonction et la valeur prise par cette fonction pour la valeur t de la variable réelle. On imagine alors souvent que le dessin représentant ce qui se passe à l'instant t, "tourne" autour d'un point pour figurer ce qui se passe au cours du temps.

Il semble que ces inconvénients peuvent être évités et que ces recours s'avèrent inutiles, les élèves ayant en fin de classe de Première scientifique les outils d'une meilleure mathématisation, avec une représentation graphique appropriée, des phénomènes périodiques sinusoïdaux.

I *MODELE MATHEMATIQUE POUR L'ETUDE DES PHENOMENES SINUSOIDAUX*

On propose donc la mathématisation suivante :

Soit ω un nombre réel strictement positif.

Etant donnés un nombre réel positif ou nul a, et un nombre réel φ compris entre 0 et 2π, on note $f(a,\varphi)$ l'application $t \mapsto a\sin(\omega t + \varphi)$ de **R** dans **R**, et on pose :

$$\mathcal{F} = \{ f(a,\varphi),\ a \in \mathbf{R}_+,\ \varphi \in [0,2\pi[\} \quad .$$

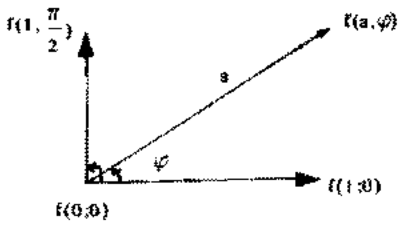
1) Que peut-on faire de ces applications, sinon d'abord les additionner ou les multiplier par des réels ?
Or pour cette addition et cette multiplication, $\mathcal{F}$ a une structure d'espace vectoriel V sur **R** (sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de **R** dans **R**).

2) $\forall a \in \mathbf{R}_+,\ \forall \varphi \in [0,2\pi[,\ \forall t \in \mathbf{R}$,
$a\sin(\omega t + \varphi) = a\cos\varphi \sin\omega t + a\sin\varphi\cos\omega t$
d'où :
$$\forall a \in \mathbf{R}_+,\ \forall \varphi \in [0,2\pi[\ \ f(a,\varphi) = a\cos\varphi\ .\ f(1,0) + a\sin\varphi\ f(1,\frac{\pi}{2}).$$

On démontre alors que $\{f(1,0), f(1,\frac{\pi}{2})\}$ est une base de V. Notons-la B : $a\cos\varphi$ et $a\sin\varphi$ sont les composantes de $f(a,\varphi)$ dans B. Ceci amène à l'étape suivante :

3) On définit sur V un produit scalaire ψ de façon que B soit orthonormée (cela ne peut se faire que d'une seule façon) :
$\psi(f(a_1,\varphi_1), f(a_2,\varphi_2)) = a_1\cos\varphi_1\ .\ a_2\cos\varphi_2 + a_1\sin\varphi_1\ .\ a_2\sin\varphi_2$
$= a_1\ a_2\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. (V,ψ) est un espace vectoriel euclidien dont B est une base orthonormée.
L'application $f(a,\varphi) \mapsto a = \sqrt{\psi(f(a,\varphi),\ f(a,\varphi))}$ de V dans $\mathbf{R}_+$ est une norme sur V. Si on oriente V en choisissant B comme base directe, φ est une mesure de l'angle $(\widehat{f(1,0),\ f(a,\varphi)})$.

4) On peut alors représenter graphiquement (V,ψ) orienté à l'aide du double-décimètre et du rapporteur : les vecteurs sont représentés par des segments fléchés de même origine f(0,0).



Remarque : Les physiciens utilisent parfois comme produit scalaire :

$$\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_1 \sin(\omega t+\varphi_1).\ a_2\sin(\omega t+\varphi_2)\ dt$$

$$= \psi'\,(f(a_1,\varphi_1), f(a_2,\varphi_2)).$$

En fait $\psi' = \psi$ (on peut soit le vérifier directement, soit montrer que B est aussi orthonormée pour ψ').

5) Dérivation : Soit $f(a,\varphi) \in \mathcal{F}$: $f(a,\varphi)$ est dérivable sur R et a pour fonction dérivée $f'(a,\varphi)$: $t \mapsto a\omega\cos(\omega t+\varphi)$ de R dans R ; $f'(a,\varphi)$ peut s'écrire $f(a\omega,\varphi+\frac{\pi}{2})$ si $0 \le \varphi < \frac{3\pi}{2}$, et $f(a\omega,\varphi-\frac{3\pi}{2})$ si $\frac{3\pi}{2} \le \varphi < 2\pi$.

L'application D : $f(a,\varphi) \mapsto f'(a,\varphi)$ est donc un endomorphisme de V dont on obtient la matrice dans B en déterminant les images des vecteurs de base :

$$f'(1,0) = f(\omega,\tfrac{\pi}{2}) = \omega\, f(1,\tfrac{\pi}{2})$$

$$f'(1,\tfrac{\pi}{2}) = f(\omega,\pi) = -\omega\, f(1,0)$$

La matrice de D dans la base B est donc $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

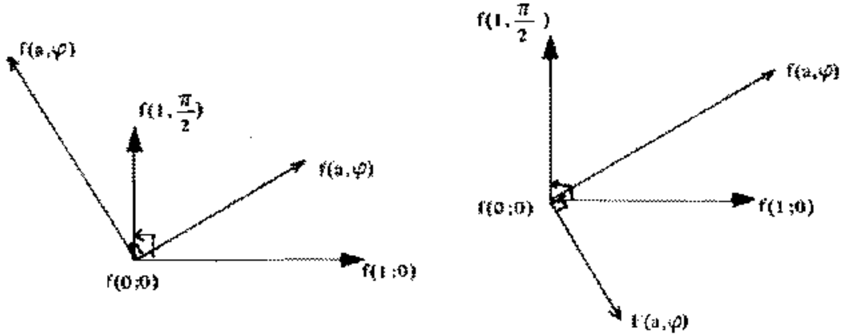
D est donc la composée de l'homothétie vectorielle de rapport ω et de la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

6) Soit $f(a,\varphi) \in \mathcal{F}$. L'application $F(a,\varphi)$: $t \mapsto -\frac{a}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$ de R dans R est une primitive de $f(a,\varphi)$.

L'application I : $f(a,\varphi) \mapsto F(a,\varphi)$ est l'endomorphisme réciproque de D. C'est la composée de l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{\omega}$ et de la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.

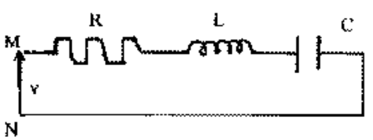
La matrice de I dans la base B est $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix}$

7) Représentations :



II *EXEMPLE D'APPLICATION : CALCUL DE L'INDEPENDANCE ET DU DEPHASAGE EN COURANT ALTERNATIF*

Une portion de circuit, constituée d'une résistance R, d'une bobine L, et d'un condensateur C, placés en série, est soumise à une différence de potentiel v alternative sinusoïdale de pulsation ω. L'intensité du courant i traversant cette position de circuit est sinusoïdale, de pulsation ω.



v et i sont liés par la relation :

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

On note I_m et V_m l'intensité et la différence de potentiel moyennes. On désigne par i l'application $t \mapsto I_m \sin \omega t$, c'est-à-dire $f(I_m, 0)$.

On désigne par v l'application $t \mapsto V_m \sin(\omega t + \varphi)$, c'est-à-dire $f(V_m, \varphi)$.
v est l'image de i par un endomorphisme f (somme de trois endomorphismes). La matrice de f dans la base de B est :

$$M_f = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -L\omega \\ L\omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C\omega} \\ -\frac{1}{C\omega} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} & R \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} V_m \cos\varphi \\ V_m \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$V_m \cos\varphi = R\, I_m \quad \text{et} \quad V_m \sin\varphi = (L\omega - \frac{1}{C\omega})\, I_m$$

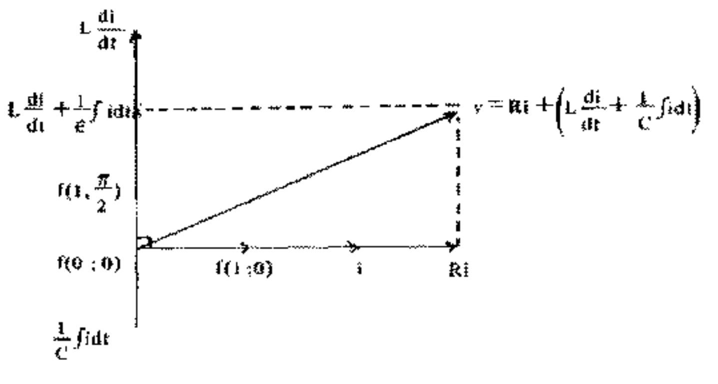
d'où

$$V_m = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}\; I_m = Z\, I_m$$

où $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ est l'indépendance de la portion de circuit étudiée ;
d'où φ déterminée par $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$ et $\sin\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z}$

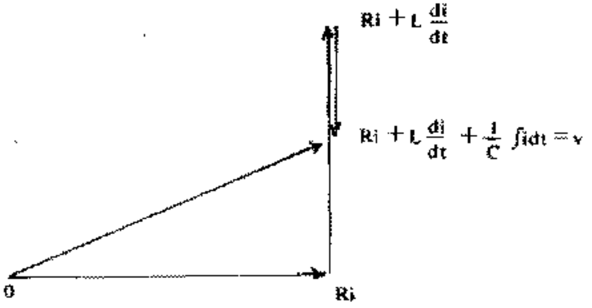
Remarque : f est la composée de l'homothétie vectorielle de rapport Z et de la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure φ.

Représentation graphique :



v est la somme des trois vecteurs Ri, $L\frac{di}{dt}$, $\frac{1}{C}\int idt$ représentés par des segments fléchés de même origine f(0,0).

Remarque 1 : On trouve aussi dans des manuels de physique la représentation suivante :



Cette représentation des vecteurs par des segments fléchés d'origines différentes est celle de l'espace affine canoniquement associé à V (c'est-à-dire (V, V, θ) où θ est l'application

$$(f_1, f_2) \mapsto f_2 - f_1$$

de V $\times$ V dans V).

Remarque 2 : Tous les oscillateurs harmoniques en oscillations sinusoïdales forcées sont susceptibles d'une mathématisation analogue.

III *FONCTIONS SINUSOIDALES ET NOMBRES COMPLEXES*

L'application $f(a,\varphi) \mapsto a\cos\varphi + j\,a\sin\varphi = a\,e^{j\varphi}$ de V dans C est un isomorphisme d'espace vectoriel. (L'image de B par cet isomorphisme est la base (1,j) de C). ($j^2 = -1$).

Les endomorphismes de V que l'on a utilisés sont des similitudes dont les matrices sont des nombres complexes. L'utilisation des nombres complexes permet une simplification d'écriture, par exemple :

l'égalité

$$\begin{pmatrix} V_m \cos\varphi \\ V_m \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut s'écrire $V_m\, e^{j\varphi} = \left(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\right) I_m$

Ainsi l'emploi des nombres complexes est une commodité, nullement une nécessité.

IV *CONCLUSION*

Cette présentation nous paraît avoir les avantages suivants :

1. être une mathématisation et non un recours à des modèles préfabriqués ;
2. faire concorder le modèle mathématique et la représentation graphique utile, dont se sert à bon droit le physicien ;
3. donner un modèle mathématique simple et efficace (cf. l'exemple étudié). ("l'Algèbre linéaire, ça sert").

En outre, le modèle mathématique est en application directe des programmes de Première scientifique. Sa mise sur pied constitue un excellent exercice de synthèse sur ces programmes (y compris la trigo !).

Il lui a été reproché de donner lieu à une représentation graphique statique par opposition à la traditionnelle (segments fléchés tournant autour d'un point). Preuve, peut-être, que toute solution a ses avantages et ses inconvénients ! ...