Y-a-t-il une mathématique pour enfants ?

Marguerite ROBERT (Chambéry)

Il est bien certain qu'un enfant ne peut travailler qu'à partir de situations matérielles, d'actions vécues ou schématisées par des dessins, de manipulations d'objets physiques.

Mais la question se pose de savoir à quel moment et comment cette situation, cette action, cette manipulation est, comme on dit, "mathématisée", et même si elle peut l'être. C'est-à-dire de savoir quand et comment on fera des mathématiques.

Tout le monde reconnaît que l'activité mathématique est une activité mentale spécifique qui, même si elle s'exerce sur des notions encore intuitives, a son caractère propre et vise toujours à épurer ces notions de leur contenu sensible ou affectif, à leur donner un statut pour parvenir plus tard à les définir et à les axiomatiser.

La question est alors de savoir si, à partir d'activités de la vie quotidienne, on peut progressivement et quasi insensiblement faire des mathématiques et accéder ainsi à ce type de pensée. Autrement dit de savoir si la démarche mathématique est en continuité avec la pensée de la vie courante, si on peut faire un tout petit peu de mathématique dans cette activité mentale globale qui règle nos comportements dans le monde physique et le vécu quotidien et si, ce faisant, avec le temps, on en fera davantage et toujours plus. Remarquons, en passant, que ce serait demander à l'élève de refaire à lui seul le travail collectif de vingt cinq siècles et l'oeuvre des esprits de génie qui y ont apporté leur appoint singulier.

Ou, au contraire, si, au départ, l'enfant peut accéder à ce mode spécifique de fonctionnement de l'esprit, en rupture avec le fonctionnement habituel dans la vie courante, s'il peut se tenir à un certain plan d'activité mentale, différent de celui du reste de l'activité scolaire, s'il peut s'y placer, travailler selon ce mode, puis le laisser pour revenir à son monde familier.

Il ne s'agit pas d'une réflexion théorique, en marge de la pratique du métier, car nul maître ne peut échapper à cette question et tout enseignement comporte une réponse implicite à cette interrogation. Il faut opter finalement sur la nature de l'esprit de l'enfant, de sa raison, sur la genèse de la pensée logique.

Aucune pédagogie des mathématiques n'est neutre philosophiquement. Et sachons bien que la réponse ne peut être donnée par une observation psychologique de l'enfant dans son comportement spontané, car elle est d'une autre nature. "C'est en le formant à chanter que je saurai s'il est musicien" écrivait Alain. Nous dirons "c'est en faisant faire des mathématiques aux enfants que je saurai s'ils peuvent en faire et je ne le saurai pas autrement".

Nous pensons, parce que depuis des années nous le constatons, que les enfants, dès le départ, sont capables de cette activité spécifique : elle n'est pas naturelle car, sans nous, ils n'y accéderaient pas. Cependant elle leur est bien propre puisque dès qu'ils sont sur ce plan, ils s'y meuvent avec aisance et joie, libérés de l'opacité de la perception, de la confusion du vécu psychologique.

Nous affirmons donc que les enfants peuvent faire des mathématiques et qu'il n'y a que des mathématiques "d'adultes". Qu'il n'y a pas de mathématiques "enfantines", que la pensée commune n'engendre pas, par une mystérieuse transmutation, la pensée mathématique et qu'il n'y a pas continuité, mais rupture entre elles. Que s'il y a une pré-mathématique, elle est de nature mathématique et non de l'ordre de l'action ou de la perception.

Cette affirmation va sans doute à l'encontre d'une ligne actuelle de la recherche pédagogique en mathématique : il semble qu'on soit plus désireux d'observer l'enfant, de le connaître dans son comportement naturel, que de chercher à lui donner les moyens de former les notions de base, les outils mentaux indispensables à une activité de type mathématique. Mettre le jeune élève en face d'une situation vécue complexe, pour qu'il la traduise par des dessins, observer ses gaucheries, ses embarras, ses échecs et même ses réussites n'est pas sans intérêt pour le maître. Mais la réussite elle-même ne signifie rien tant qu'elle se situe dans le contexte flou de la pensée commune, qu'elle ne relève pas de la mise en jeu d'une notion mathématique acquise, maîtrisée, qu'elle ne peut donc se justifier par la démarche qui l'a engendrée. Seule l'activité de type mathématique permet le contrôle et la critique de ce qu'elle produit.

Ajoutons une dernière réflexion : en mathématique, on ne peut développer des aptitudes sans construire un savoir. On peut se borner à transmettre un savoir, on ne développe pas toujours ainsi des aptitudes. D'où les échecs et le mythe de la "bosse des maths", apanage de quelques-uns seulement. D'où également la recherche d'une nouvelle attitude pédagogique et de nouveaux programmes, l'accent mis heureusement sur la genèse des facultés d'invention des enfants, du dynamisme de leur activité mentale. Il ne faudrait pas, pour autant, perdre de vue la règle précédente qui fait peut-être l'originalité de cette discipline, et oublier le savoir. Or le savoir mathématique est un savoir construit, les aptitudes se développent au cours même de son édification, dans le passage d'un étage au suivant. Il y a interaction entre la construction du savoir et le développement des aptitudes : l'acte de construire accroît le pouvoir de continuer. Tout professeur de mathématiques, bien que rompu à cette discipline, sait qu'il ne peut travailler dans une branche de cette science sans former d'abord les notions fondamentales indispensables pour y avoir accès et acquérir progressivement la forme d'activité mentale propre à cette partie. Il ne peut d'emblée se placer au milieu de l'édifice en se fiant, pour passer aux étages suivants, à ses aptitudes et à son savoir dans d'autres secteurs. C'est dire qu'un enfant ne peut apprendre à faire des mathématiques sans former d'abord les notions de base qui serviront à en former d'autres et que ce n'est qu'ainsi qu'il acquiert la capacité de continuer.

Nous retrouvons, par cette réflexion, l'affirmation qu'on ne peut se situer à mi-chemin entre la pensée commune et l'activité mathématique, que dans une classe on fait des mathématiques ou l'on n'en fait pas, et que si l'on veut que tous les élèves aient accès à cette discipline, on ne pourra envisager une formation sans contenu nettement structuré.

Pour mieux faire comprendre des propos trop théoriques peut-être, prenons un exemple. Il se situe au C.P. On propose à des enfants de six ans une histoire : des animaux, voyageant sur un bateau, choisissent le lieu où ils iront à leur arrivée au port: cirque, zoo ou forêt sauvage. Les élèves doivent schématiser cette situation par des dessins ou des tableaux. Le but est de les amener à la notion de partition.

Mais si le partage de cette troupe d'animaux, leur tri selon leur destination, est une activité de la vie courante, suffit-il de faire ces actions ou de les imaginer pour dire que l'on a fait ainsi une partition ? Le professeur de mathématiques voit cette notion dans l'activité en question parce qu'elle est formée dans son esprit. Il croit peut-être naïvement qu'elle est dans l'action elle-même et qu'il suffit de déclencher l'action pour qu'elle en sorte toute faite et s'imprime telle quelle dans l'esprit des élèves. Peut-être croit-il, encore plus naïvement, qu'il suffit de répéter cette action, sur d'autres exemples, pour que l'impression soit renforcée.

Il n'en est rien. Répéter une action, une manipulation d'objets, ne fait pas sortir de la manipulation. On reste sur le même plan. On ne peut avancer car on ne peut en sortir. Remarquons, au passage, que nous sommes dans une situation analogue quand, ayant remplacé le dessin d'un canard par celui d'un rond, on entend dire qu'on a ainsi fait "un pas vers l'abstraction". Il n'est que de demander alors quel sera le pas suivant ! On est resté sur le plan de la perception, un dessin n'est mathématiquement pas plus "abstrait" qu'un autre.

D'autre part, la notion de partition n'est pas simple, elle est construite à partir d'autres notions mathématiques et n'est certainement pas à la portée des enfants de six ans. Une partition dans un ensemble E est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties répondant à certaines conditions. Et ces conditions ne peuvent être tirées de la manipulation : lorsqu'on démolit un tas d'objets pour en faire trois, par exemple, un objet pourrait-il se trouver à la fois dans deux tas ? Comment pourrait-il y avoir un tas sans objets ?

Pourquoi alors vouloir faire des partitions ? Cette notion n'est pas du niveau de l'école élémentaire, elle ne présente d'ailleurs aucune utilité pour l'enseignement qui y est donné. Faisons donc des partages si nous le souhaitons, mais nous ne ferons pas ainsi des mathématiques. Et après un partage, nous ne pourrons que refaire un autre partage.

Remarquons, de plus, que l'histoire proposée n'illustre pas d'abord une partition, mais une application de l'ensemble E des animaux vers l'ensemble F des lieux de destination. Ce n'est qu'ensuite qu'une partition est introduite dans E par la relation d'équivalence de E vers E "avoir la même destination".

Autrement dit la construction mathématique sous-jacente est une construction classique, mais fort complexe : application de E vers F, puis, à partir d'elle, relation de E vers E et enfin formation d'un ensemble $\mathcal{E}$ de classes d'équivalence.

L'élève ne possède aucune de ces notions, il ne peut donc penser la situation. Il reste sur le plan de l'action vécue. Lui rend-on service en lui proposant un tel enchevêtrement de notions ? Même si l'un d'eux, particulièrement doué, pouvait, par lui-même, former une notion mathématique à partir d'une manipulation, il est certain qu'il ne pourrait échafauder une telle construction.

On dira que, placé devant une telle histoire, l'élève arrive assez souvent à cocher les cases d'un tableau à double entrée, c'est-à-dire à noter la case figurant dans la ligne d'un animal et la colonne de son lieu de destination. La nature d'un tel travail reste toujours l'indication d'une action.
Il n'y a pas de "mathématisation" pour autant. De plus, le tableau est donné "tout fait" à l'enfant. Ce n'est pas lui qui l'a inventé, qui l'a construit à partir d'un savoir antérieur. Le tableau n'est pas la représentation d'une notion, d'un instrument de pensée, ici d'un ensemble de couples, puis du graphe de la relation grâce à la valeur de vérité de phrases formées à l'aide de chacun des couples.

Devant une situation différente de celle-ci, l'élève sera démuni car il ne dispose pas d'outil mental forgé par son esprit.

Ce qui amène à nous demander ce qu'est une "représentation". Si nous entendons par "représentation" un dessin qui traduit visiblement sur le papier ou le tableau une notion mathématique, qui est forcément de nature intelligible et non pas sensible, il est clair que, dans l'exemple décrit, il n'y a pas de représentation puisqu'il n'y a pas de concept mathématique sous-jacent.

Ce qui est dessiné est un schéma d'action et s'arrête là. Peut-on croire que ce schéma engendrera une notion dans l'esprit et deviendra, en retour, une représentation de cette notion ? Peut-être en sera-t-il ainsi, exceptionnellement, pour quelques conduites simples, chez les élèves particulièrement doués. Mais ce serait sélectionner les élèves par la difficulté alors que l'enseignement moderne des mathématiques vise, au contraire, à permettre à tous les enfants l'accès de cette discipline.

Nous ne croyons même pas qu'il en soit ainsi. Car, alors que nous nous efforçons de trouver les notions les plus simples, les notions premières qu'un élève peut former au départ pour en construire d'autres à partir de celles-ci, nous avons toujours constaté qu'on ne peut se borner à une représentation unique de cette notion. En effet, alors, très vite la pensée ne se tient plus au niveau du concept mais retombe à celui de la figure perçue. Autrement dit, le dessin reste sous forme d'image mentale et bloque ainsi la pensée. On sait faire ce dessin, on ne sait plus ce qu'il représente, sa signification échappe.

Que faisons-nous donc ? Nous cherchons une notion de base, soit par exemple celle de produit cartésien. Nous travaillons longuement et lentement à préparer, par des manipulations, par des dessins d'objets, en distinguant des étapes, la formation de cette notion. Nous ne la tenons pour acquise que lorsque trois conditions sont réalisées :

1) les élèves en ont trouvé au moins deux représentations ;

2) ils peuvent travailler aussi bien sur l'une que sur l'autre pour faire un exercice ;

3) ils peuvent traduire un travail fait sur l'une, directement sur l'autre, sans recommencer l'exercice.

Pour nous donc, plusieurs représentations, au vrai sens du mot, d'une notion. Tandis que, dans l'histoire des animaux, nous trouvons plusieurs schémas d'action qui, s'ils étaient considérés comme représentations, et nous savons qu'il ne peut en être ainsi pour les élèves, représenteraient, à partir du même récit, des notions mathématiques différentes.

Au terme de ces réflexions nous pouvons maintenant distinguer les deux voies pédagogiques opposées. Ou l'on part d'un récit, d'une manipulation que l'on traduit par un schéma. Nous avons montré qu'on aboutit à une impasse. Ou l'on construit un savoir mathématique, lentement, à partir des notions de base. A chaque étape, on peut alors illustrer la notion par des histoires, par des actions.

Les représentations de la notion peuvent ainsi devenir des schémas pour le récit ou l'action. En fait, elles ne sont plus des schémas, car il n'y a plus passage direct de l'histoire au dessin. La notion est la clé de commande de deux passages. L'un va de la notion à ses représentations, il s'agit là d'un lien fondamental. L'autre va de la notion au récit qu'elle a fait inventer. Remarquons que l'illustration est d'abord très sèche, du type je cueille la rose, je laisse la tulipe. Ce n'est qu'ensuite qu'elle se colore d'anecdotes, superflues pour les mathématiques, mais qui lui donnent son caractère propre : c'est l'anniversaire de mon frère, je veux lui offrir un bouquet. Je descends au jardin, je vois une jolie rose, je la cueille. La tulipe est fanée, je la laisse, etc...

Cette simple histoire, loin d'être un départ, est le terme d'un long travail conceptuel. A l'entendre, n'est-ce pas beaucoup de peine pour si peu ? Et n'est-elle pas inutile puisqu'elle suppose, dans notre optique, acquise la notion mathématique avec ses représentations (ici, celle de partie d'un ensemble) qui seule nous importe ? C'est que nous sommes persuadés que le travail mathématique, à ce niveau du moins, ne peut se faire à vide, que l'enfant doit pouvoir lire, dans une situation pratique, la notion qu'il a construite, et surtout qu'il doit distinguer, parmi d'autres, les situations qu'il peut "mathématiser" parce qu'il possède l'outil mental qui lui en donne la capacité.

Une telle visée n'est-elle pas celle de tout vrai professeur de mathématiques ?