Démonstration d'une inégalité

par A. WARUSFEL

1. Des projets officieux, issus de la Commission Lichnérowicz, proposent de faire admettre aux élèves de Seconde l'implication suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c}(\forall x)\,(\forall a)\ \ (x \in \mathbf{R} \text{ et } |x| \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } a \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\} \\ \Rightarrow |(1+x)^a - 1 - ax| \leqslant 8x^2\,)\end{array}}$$

L'utilité d'une telle relation est évidente; le coefficient 8 a l'air plus ou moins arbitraire. Le but de cette note est de démontrer, pour tous les a indiqués, l'existence d'un réel A tel que, dans les conditions ci-dessus :

$$|(1+x)^a - 1 - ax| \leqslant Ax^2 ,$$

8 étant la borne supérieure des nombres A ainsi déterminés.

Pour $a \in \{0, 1, 2\}$, on trouve immédiatement $A \in \{0,1\}$.

2. Pour $a = -1$, et pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$1 - x \leqslant \frac{1}{1+x}$ (1) — évident —

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \leqslant 1 - x + 2x^2$ (2) car $\frac{1}{1+x} \leqslant 2$

Donc A=2 ; c'est la meilleur valeur possible $(x = -\frac{1}{2})$

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1}{1+x} - (1-x) \leqslant 2x^2}$$

3. Pour $a = -2$, et pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$1 - 2x \leqslant \frac{1}{(1+x)^2}$ (3) car ceci équivaut à $0 \leqslant x^2\ (3 + 2x)$

$\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1 - 2x + 8x^2$ (4) car ceci équivaut à $0 \leqslant (2x+1)\ (4x+5)$.

Donc A = 8 ; c'est la meilleure valeur possible $(x = -\frac{1}{2})$.

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} - (1-2x) \leqslant 8x^2}$$

4. Restent les cas plus difficiles où $a = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{2}$. Soit d'abord $a = \frac{1}{2}$, et $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$ (5) — évident —

On peut montrer par ailleurs que, suivant une idée de notre collègue C. GAUTIER (Collection "Aleph -1") :

$$|x| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{2} - x^2\right)^2 \leqslant 1 + x$$

car ceci équivaut à $0 \leqslant x^2\ [4 + (3 - 2x)\ (2x + 1)]$.

Par suite :

$1 + \frac{x}{2} - x^2 \leqslant \sqrt{1+x}$ (6)

$$\boxed{0 \leqslant 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leqslant x^2}$$

Donc A = 1, mais ce n'est pas la meilleure valeur possible.

5. Avant de passer au cas $a = -\frac{1}{2}$, démontrons — toujours d'après

GAUTIER — un lemme pour les valeurs de x telles que $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$(\frac{x}{2} - x^2)^2 \leqslant x^2 \qquad (7)$

En effet ceci équivaut à $(2x - 3)(2x + 1) \leqslant 0$.

Par suite $|\frac{x}{2} - x^2| \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{2}$; appliquant la relation (2) en y substituant $\frac{x}{2} - x^2$ à x, on trouve :

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}-x^2} \leqslant 1 - (\frac{x}{2} - x^2) + 2(\frac{x}{2} - x^2)^2$$

$$\leqslant 1 - \frac{x}{2} + x^2 + 2x^2 = 1 - \frac{x}{2} + 3x^2$$

6. Soit donc enfin $a = -\frac{1}{2}$; pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$:

$0 < \frac{1}{2} \leqslant 1 + \frac{x}{2} - x^2 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} \qquad$ (5) et (6)

$$1 - \frac{x}{2} + 3x^2 \geqslant \frac{1}{1+\frac{x}{2}-x^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \geqslant 1 - \frac{x}{2}$$

et finalement :

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2} \leqslant 3x^2}$$

Donc A = 3, mais ce n'est pas la meilleure valeur possible.

7. On peut retrouver ces résultats d'autre façon :

a) $a = -1$; posons $f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{1+x} - 1 + x\right] = \frac{1}{1+x}$; f décroît de 2 à $\frac{2}{3}$, d'où $A = 2 = f(-\frac{1}{2})$:

$$\boxed{\frac{2}{3}x^2 \leqslant \frac{1}{1+x} - 1 + x \leqslant 2x^2}$$

b) $a = -2$; posons $f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2x\right] = \frac{3+2x}{(1+x)^2}$ $= \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x}$; f décroît de 8 à $\frac{16}{9}$, d'où $A = 8 = f(-\frac{1}{2})$:

$$\boxed{\frac{16}{9}x^2 \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2x \leqslant 8x^2}$$

8. Pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{2}$, il faut utiliser le vieux procédé de "multiplication par la quantité conjuguée" :

a) $a = \frac{1}{2}$, posons $f(x) = \frac{1}{x^2}\left[1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}\right]$. On trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2x + 4 + 4\sqrt{1+x}}$$

f décroît de $\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$ à $\frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 5 - 2\sqrt{6}$, d'où

$A = 3 - 2\sqrt{2} = f(-\frac{1}{2})$ $[A \simeq 0{,}172 < 1]$:

$$(5-2\sqrt{6})x^2 \leqslant 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x} \leqslant (3-2\sqrt{2})\,x^2$$

Notons que $5-2\sqrt{6} \simeq 0{,}101$.

b) $a=-\frac{1}{2}$, posons $f(x)=\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1+\frac{x}{2}\right]$. On trouve :

$$f(x)=\frac{2\,(3-x)}{9-(2x-1)^2+8\sqrt{1+x}}$$

Le numérateur décroît en restant positif. Le dénominateur croît en restant positif — en effet, $2x-1$ est négatif, $(2x-1)^2$ décroît —. Donc f décroît de $\frac{7}{5+4\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-5$ à $\frac{5}{9+4\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}-9}{3}$, d'où $A=4\sqrt{2}-5=f(-\frac{1}{2})$ [$A \simeq 0{,}657<3$] :

$$\boxed{\frac{4\sqrt{6}-9}{3}\,x^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}}-1+\frac{x}{2} \leqslant (4\sqrt{2}-5)x^2}$$

Notons que $\frac{4\sqrt{6}-9}{3} \simeq 0{,}266$.

Dans ce paragraphe et le précédent, les bornes sont les meilleures possibles.

9. Les résultats des paragraphes 7 et 8 sont plus précis, et sont obtenus de manière aussi élémentaire que ceux des paragraphes précédents. Pour les cas considérés, on voit que si l'on pose :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\,|(1+x)^a-1-ax|$$

f décroît sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ce qui donne la valeur de A :

$$A=f(-\tfrac{1}{2})\,.$$

10. A l'aide du calcul différentiel — inconnu en Seconde —, on peut retrouver, lourdement, les résultats ci-dessus. Donnons une méthode générale fournissant un A convenable, mais qui n'est pas le meilleur possible, pour toutes les valeurs de a ; posant $g(x)=\frac{(1+x)^a-1-ax}{x^2}$, $h(x)=(1+x)^a$, on a :

$$h'(x)=a(1+x)^{a-1}\,,\; h''(x)=a(a-1)\,(1+x)^{a-2}$$

$$x^2\,g(x)=h(x)-h(o)-xh'(o)=\frac{x^2}{2}\,h''(y)\;,\; y\in\,]o,x[$$

soit $\quad f(x)=|g(x)|=\frac{1}{2}|\,h''(y)|$.

si $a \geqslant 2$, $(1+t)^{a-2}$ croissant avec t, on a :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}\,a\,(a-1)\,(\tfrac{3}{2})^{a-2}$$

Si $a \leqslant 2$, $(1+t)^{a-2}$ décroissant avec t, on a :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} |a(a-1)| \left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}$$

11. Le tableau suivant donne les valeurs de A calculées par les trois méthodes précédentes :

$a = -1$	2	2	8
$a = -2$	8	8	48
$a = \frac{1}{2}$	1	$3 - 2\sqrt{2}$ ($\simeq 0{,}172$)	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($\simeq 0{,}354$)
$a = -\frac{1}{2}$	3	$4\sqrt{2} - 5$ ($\simeq 0{,}657$)	$\frac{3}{\sqrt{2}}$ ($\simeq 2{,}12$)

Les deux premières méthodes peuvent être éventuellement utilisées en classe afin de légitimer, pour quelques valeurs de a, l'énoncé de l'inégalité, mais chaque professeur trouvera lui-même des variantes qui améliorent les méthodes ci-dessus, à moins — s'il n'est sage — de faire admettre purement et simplement cet énoncé qui est au demeurant assez intuitif.

P.S. Signalons deux formes intéressantes de g(x) :

$$g(x) = \frac{a(a-1)}{x^2} \int_0^x (x-t)(1+t)^{a-2}\, dt$$

$$= \binom{a}{2} + \binom{a}{3}x + \binom{a}{4}x^2 + \dots$$

Peut-être peut-on, à partir de ces égalités, trouver des majorants de $|g|$ plus petits que ceux du paragraphe 10.