A propos de ce problème de simulation

par R. GRAS (UNIVERSITE et I.R.E.M. de RENNES)

Remarque 1

L'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des applications de A vers B est peut-être moins intuitive que la suivante, tout en lui étant équivalente :

Pour une bouteille *quelconque*, la probabilité pour qu'une impureté s'y glisse est la même, *quelle que soit* cette impureté : elle est donc égale à $\frac{1}{100}$. C'est encore la probabilité commune pour que l'on pique avec une épingle au hasard (les yeux fermés) un carré déterminé parmi les 100 carrés d'un quadrillage régulier 10×10. Même sous cette présentation, c'est encore la notion d'application qui est sous-jacente.

Je formule également une hypothèse suggérée par le texte et implicitement utilisée précédemment, sur *l'indépendance* des "affectations". Les événements [la bouteille B_i contient l'impureté I_k] et [la bouteille B_i contient l'impureté I_l] sont indépendants, pour tous i, k et 1.

Par suite :

Pr [B_i ne contient ni I_1, ni I_2,... ni I_{100}] = Pr [B_i ne contient pas I_1] $\times$

Pr [B_i ne contient pas I_2 |B_i ne contient pas I_1] $\times$ ......

$\times$ Pr [B_i ne contient pas I_{100} |B_i ne contient pas I_1, I_2,... I_{99}]

= Pr [B_i ne contient pas I_1] $\times$ Pr [B_i ne contient pas I_2] $\times$ .....$\times$

Pr [B_i ne contient pas I_{100}]

$$= \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} = \frac{99^{100}}{100^{100}} \simeq 0{,}3665$$

Est-il étonnant que cette valeur diffère peu de e^{-1} ? Une exploitation plus poussée de ce problème très riche va nous fournir la réponse mais, d'ores et déjà, souvenons-nous que : $\lim\limits_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$. On peut se demander quelles probabilités B_i a de contenir 1, 2, 3, ..., 100 impuretés. La formulation précédente nous donne immédiatement :

Pr [B_i contient une impureté seulement] $= \binom{100}{1} \frac{1}{100} (1 - \frac{1}{100})^{99}$

où $\binom{100}{1}$ représente le nombre de choix de l'impureté à affecter à B_i. De même, pour tout $k \in \{0,1,2,...,100\}$:

P r [B_i contient k impuretés exactement] =

$$\binom{100}{k} (\frac{1}{100})^k (1 - \frac{1}{100})^{100-k}$$

Autrement dit, la variable aléatoire X_i, qui représente le nombre d'impuretés contenues dans B_i, suit une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{100}$, $N = 100$.

On montre, dans la théorie des probabilités, que, puisque le produit p N est constant (et égal à 1), la loi binomiale de cette variable, lorsque N tend vers l'infini, converge vers une loi de

Poisson de paramètre $\lambda = pN = 1$.

Ceci signifie qu'une approximation, pour N "grand", de la valeur $Pr[X_i = k]$ est donnée par la valeur correspondante de la loi de Poisson :

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

soit ici : $\dfrac{e^{-1}}{k!}$

Par exemple, une valeur approchée de $Pr[X_i = 0]$ est e^{-1} et nous voici rassurés...

Remarque 2

Une vertu, outre son élégance, de la présentation d'HUGUET, est de permettre une réponse immédiate à la question que le lecteur s'est sans doute déjà posée :

"Quelle est la probabilité qu'il y ait une impureté dans chaque bouteille ? " (aucune bouteille ne sera de "haute qualité").

Cet événement est réalisé par chaque éventualité d'une bijection de A dans B. Il y a autant de telles bijections que de permutations sur A (ou sur B) c'est-à-dire 100 ! Par suite, la probabilité cherchée est :

$$\frac{100\,!}{100^{100}}$$

Pour obtenir une valeur approchée, utilisons la formule de Stirling :

$$n\,! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$

ce qui donne

$$\frac{100!}{100^{100}} \sim \sqrt{2\pi} \times 10 \times e^{-100} = 9{,}32.10^{-43}$$