

3

DANS NOS CLASSES

Un problème de "simulation"

F. HUGUET (E.N.G. QUIMPER)

L'exemple suivant a été présenté sans solution par GLAYMANN lors des journées de l'A.P.M. dans son Groupe de Travail à CAEN en 1972 (1).

Un fabricant de bouteilles
100 kg de verre liquide
1kg donne une bouteille
Dans les 100 kg de verre liquide il y a 100 pierres ou impuretés que l'on ne peut enlever et qui sont réparties de manière aléatoire.
Le fabricant ne s'intéresse qu'à la fabrication de bouteilles de "haute qualité", c'est-à-dire sans impuretés.
Si une bouteille contient au moins une pierre, elle est mise au rebut.
Combien peut-il espérer obtenir de bouteilles de "haute qualité" ?

- I — On peut adopter l'attitude du Physicien.
- On observe des expériences en constatant la convergence des résultats (Notion de suite convergente).
 - On fait une étude physique du "Hasard".

Il faudra être prudent pour mathématiser mais on peut intuitivement supposer l'existence d'un "Modèle" permettant d'interpréter plusieurs situations.

D'où l'idée du "Calcul Analogique" : Représenter un phénomène par un autre phénomène physique.

— Engel propose à ses élèves d'utiliser ce qu'il appelle "une table de nombres au hasard".

(1) D'après une idée de A. ENGEL (Teaching of Probability and statistics par L. RADE).

Dans le problème qui nous intéresse, il s'agit de trouver cent nombres compris entre 0 et 100 (exclus) et choisis au hasard.

— Comment trouver ces nombres au hasard ?

Il existe des tables toutes faites, mais on peut en réaliser soi-même.

Possibilité ici de laisser aux enfants le choix dans cette recherche.

Travail par équipes

Exemple 1 — Les enfants observent les plaques minéralogiques des voitures. Si la voiture porte le numéro 18 |54| QV 29, il faudra retenir 54 et non 18 (ni évidemment 29). Pourquoi ?

Il faut avoir en effet un phénomène aléatoire.

Exemple 2 — Utilisation de l'annuaire téléphonique.

Exemple 3 — Tirage au sort comme pour une loterie.

Chiffre des unités

Chiffre des dizaines.

Exemple 4 — Utilisation d'une roulette.

Exemple 5 — Ouvrir un livre et noter le numéro de la page.

— L'interprétation des résultats est facilitée en utilisant une grille permettant de repérer les cent cases (où concrètement on pourrait placer les bouteilles).

9	○				○		○	○		○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
7	○	○		○	○	○	○	○		
6	○		○	○	○	○		○		○
5	○	○		○	○			○	○	
4	○	○	○	○	○			○	○	○
3			○	○				○		
2			○	○	○	○	○		○	○
1	○			○	○		○	○	○	○
0	○		○			○		○		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Si dans la table de nombres au hasard on a par exemple 02, 57, 48, 48, 32, 29,

— 32 signifiera que l'on a une pierre dans la case (3,2). Dans la case (4,8) il y aura deux pierres, etc...

Quand les 100 pierres auront été placées, il suffira de compter le nombre de cases vides.

Remarques

J'ai fait la même expérience en utilisant les exemples cités plus haut et tout le monde a été surpris de la convergence des résultats autour de 36 cases vides que l'on interprétera comme 36 bouteilles sans impuretés.

Ces résultats sont analogues à ceux de l'expérience de Engel. Toutefois l'exemple 5 du livre ouvert nous a conduits vers un résultat beaucoup plus fort (= 50). Nous avons donc critiqué cette méthode : le livre a tendance à s'ouvrir souvent aux mêmes pages ce qui remet en cause l'aspect aléatoire du phénomène.

On aurait pu également utiliser les documents existant dans les journaux :

- Loterie nationale
- Résultats de tombolas, etc...

Intérêt de tels problèmes ()*

— Faire comprendre ce qu'est la démarche scientifique. (A ce niveau, la première partie de cette démarche, car on ne peut encore mathématiser).

— Les Mathématiques sont souvent trop basées sur la déduction, sur le Vrai et le Faux ; d'où l'intérêt de ce domaine-carrefour des probabilités et statistiques.

— D'un point de vue pédagogique il faut d'abord se poser la question "Comment comprendre le problème posé ?" et ensuite montrer la nécessité de "créer un modèle".

Pour l'enfant il y a aussi la phase "essai des modèles proposés". Il n'est pas nécessaire d'aller tout de suite vers la solution la plus acceptable.

— Nous avons enfin une motivation certaine pour former les enfants à cette réalité quotidienne : les sondages d'opinions, les élections, la notion de "fourchette"...

(*) Voir aussi le livre de M. GLAYMANN et T. VARGA : *Les probabilités à l'école*. CEDIC, 93 av. d'Italie, 75013 Paris.

II — J'ai essayé d'adopter aussi une attitude plus proche du Mathématicien mais j'ignore si elle est acceptable.

Quel est l'Outil Mathématique dont on doit disposer ?

Ici évidemment il s'agit du "Calcul des Probabilités".

Soit A l'ensemble des impuretés; ici Card A = 100

Soit B l'ensemble des bouteilles Card B = 100

Une répartition des impuretés dans ces bouteilles peut donc être interprétée comme une "Application de A vers B".

J'ai donc choisi pour univers Ω l'ensemble des applications de A vers B.

J'ai de plus pris le cas le plus simple: $\mathcal{F}(\Omega)$, avec l'hypothèse d'équiprobabilité sur chaque événement élémentaire.

Ceci m'a conduit à calculer la probabilité p pour qu'une bouteille donnée B_i soit de "haute qualité".

Soit $B' = B - \{B_i\}$

Notons $\Omega = \mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble des applications de A vers B
et $\mathcal{F}(A, B')$ l'ensemble des applications de A vers B'.

$$p = \frac{\text{Card } \mathcal{F}(A, B')}{\text{Card } \mathcal{F}(A, B)} = \frac{99^{100}}{100^{100}}$$

$$\log p = 100 \log 99 - 100 \log 100$$

$$\log p = 100 \log 0,99$$

$$\log p \approx 100 \times \bar{1},99564$$

$$\log p \approx \bar{1},564$$

$$p \approx 0,3665$$

Ce résultat semble évidemment satisfaisant, mais l'hypothèse d'équiprobabilité ne me paraît pas aussi convaincante.