LA MESURE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Animateur : F. COLMEZ
Rapporteur : Mme BURTIN

Au cours de la séance a été fait le compte-rendu de travaux effectués dans des classes CM1 - CM2. L'expérience a été effectuée durant plusieurs mois, et à ce niveau la notion de conservation de quantité n'a posé aucun problème.

La mesure servant essentiellement à faire des comparaisons, *ce sont les comparaisons qui servent de point de départ*, les enfants étant mis dans des situations qui nécessitent l'emploi des expressions :

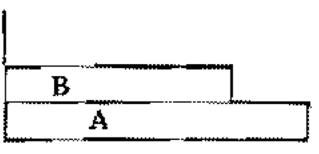
— plus que, moins que, aussi que.

Comparaisons directes :

Les enfants doivent comparer des longueurs ou des masses ou des contenances ..., sans instrument de mesure.

Dans un premier temps, il s'agit de comparaison directe.

Par exemple, pour comparer les longueurs de deux bandes de papier, il suffit de les placer côte à côte, à partir d'un même point, le résultat est immédiat.



Ici A est plus long que B.

Par contre, lorsqu'il s'agit de comparer des masses, les difficultés recontrées sont plus grandes et l'utilisation de la balance de Roberval est indispensable.

Les enfants travaillent par équipes et après les manipulations chacune d'elles expose ses résultats :

Il n'y a aucune difficulté à ce niveau pour obtenir une synthèse de tous les résultats, la transitivité étant parfaitement comprise et même utilisée fréquemment au cours des manipulations. Les objets à comparer sont ordonnés (par exemple du plus lourd au plus léger, ou du plus court au plus long ...). Les résultats sont aussi donnés à l'aide de diagrammes sagittaux ou de tableaux à double entrée.

Comparaisons indirectes :

Ensuite on introduit des contraintes dans les comparaisons :

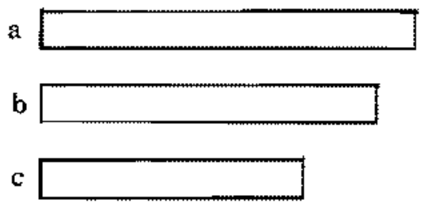
Par exemple : Peut-on intercaler cette table entre l'armoire et le mur ? Donner la réponse sans déplacer la table.

On compare les longueurs de bandes de papier collées sur une feuille de papier.

Un instrument de comparaison devient alors nécessaire, et il y a plusieurs possibilités.

— les enfants *choisissent une unité*,
— ou *construisent un certain nombre d'étalons* (comparés directement).

Par exemple, pour les longueurs, il s'agit de bandes de papier de longueurs différentes que l'on distingue par un nom :



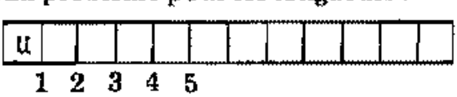
Lorsque les étalons sont choisis, il s'agit de placer chaque objet entre deux étalons consécutifs, mais *il est possible d'obtenir plusieurs objets encadrés de la même manière*, ce qui conduit à des classes d'équivalence, et les résultats sont présentés dans un tableau.

Exemple : si on a deux objets B et C compris entre les étalons a et b et une pièce D entre b et c, on écrit :

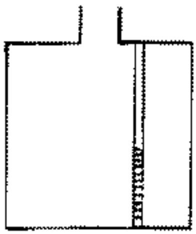
a b	b c	
B	D	
C		

Lorsqu'il y a eu choix d'une unité u, la démarche est un peu la même :

— il y a construction d'une échelle à partir de cette unité, ce qui ne pose aucun problème pour les longueurs :



Un élève a été capable de construire une échelle graduée pour les capacités :



Il a collé une bande de papier sur le plus gros flacon mis à sa disposition et l'a graduée en utilisant comme unité le plus petit flacon.

Pour les masses, les unités choisies sont des boules de pâte à modeler que les enfants fabriquent.

Avec une unité, de même qu'avec des étalons, on obtient des classes d'équivalence et les résultats sont encore donnés dans un tableau :

Exemple : Si deux objets B et C sont plus longs que 3u et plus courts que 4u et si D est aussi long que 5u, on a :

	plus long que	plus court que	aussi long que
B	3	4	
C	3	4	
D			5

Ensuite, les résultats sont rassemblés de manière à faire apparaître les différentes classes :

(3,4)	4	(4,5)	5
B			D
C			

A chaque objet on associe donc un couple de nombres entiers consécutifs ou un entier.

On définit donc une application de l'ensemble des objets considérés dans un ensemble ordonné d'entiers et de couples d'entiers :

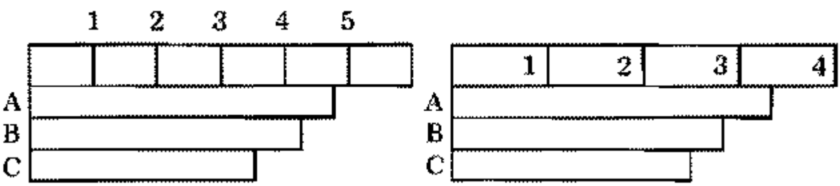
$$\{(0,1), 1, (1,2), 2, \ldots\}$$

Avec l'exemple précédent, on a $f : B \mapsto (3,4)$
$D \mapsto 5$

et dire que B est plus court que D,
c'est dire que $f(B) < f(D)$

Sur le plan pratique ; des équipes travaillent simultanément sur les longueurs, les masses, les capacités, mais deux équipes travaillant sur le même sujet ont les mêmes objets à comparer et une liberté totale est laissée quant au choix de l'unité ou des étalons, ce qui donne lieu à des tableaux de résultats différents et même des classes d'équivalence différentes dans le même ensemble d'objets.

Exemples :



3,4	4,5
	A
C	
	B

2,3	3,4
B	
	A
C	

A la suite de vérifications, les enfants admettent que les classes varient en composition, mais ils n'admettent pas un changement de l'ordre d'un tableau à un autre.

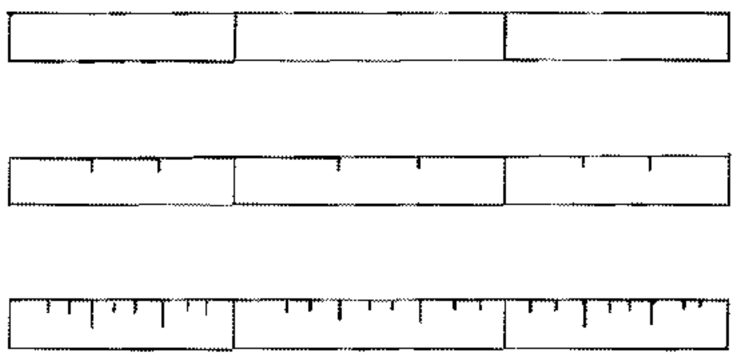
Ils constatent aussi que, dans un tableau de résultats, ils ne peuvent pas exprimer de manière correcte tous les résultats obtenus au cours des manipulations, et ils éprouvent le besoin d'obtenir des classes ne contenant qu'un seul élément, ce qui *conduit à affiner la mesure*, par le choix d'unités plus petites ou de systèmes d'unités.

Utilisation de systèmes d'unités :

Les enfants ont d'abord toute liberté dans le choix du système d'unités qu'ils construisent et utilisent et ils en fabriquent de très complexes.

A ce stade, ils sont limités par les questions matérielles (des traits de graduation qui se touchent, des unités de masse trop légères pour la sensibilité de la balance ...) et ils ont alors l'impression que tout résultat pourra être exprimé à l'aide d'un nombre.

Ensuite, il faut *convaincre* les enfants *d'utiliser un système d'unités valable pour tous* et le travail se poursuit uniquement sur les longueurs à l'aide d'un système cohérent, les échelles étant polycopiées (ici système ternaire)



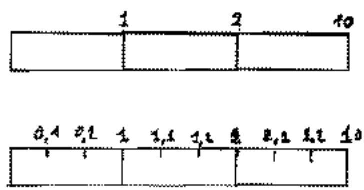
A l'aide de ces échelles, différents exercices sont effectués :

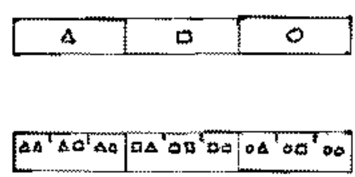
- activité de mesurage et expression des résultats ;
- construction de bandes de papier appartenant aux classes d'équivalence encore non représentées.

Ensuite les enfants donnent un nom aux différentes classes :

Ils ont alors à leur disposition les nombres à virgule qu'ils savent ordonner, et ils adoptent le même principe pour distinguer les différentes classes.

Seulement certains enfants attribuent un nom à chaque trait de graduation des échelles, d'autres aux intervalles.





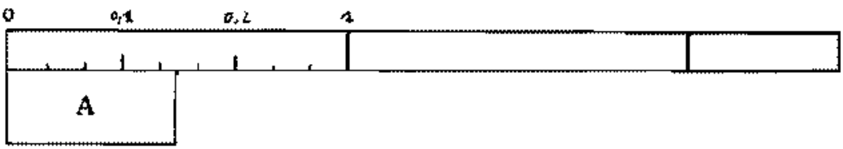
Le problème du zéro les met tous d'accord et ce sont les traits qu'ils distinguent, et à l'aide des nombres à virgule.

A chaque objet, ils associent donc un nombre ou un nombre à virgule.

Les enfants au début des manipulations ont l'impression qu'à la condition de choisir une échelle suffisamment fine, ils pourront toujours faire correspondre un nombre à une longueur donnée.

Mis en présence du problème suivant :

— Trouver la longueur de A :



ils arrivent aux encadrements successifs :

$$(0\ /\ 1)$$
$$(0{,}1\ /\ 0{,}2)$$
$$(0{,}11\ /\ 0{,}12)\ldots$$

et se rendent compte que ça ne peut pas tomber juste (bien qu'à partir d'un certain moment, on ne puisse plus distinguer les traits de graduation).

A la suite de tout ce travail, les enfants ont pris conscience du modèle mathématique, tout en faisant la distinction entre modèle et réalité (ils se sentent limités sur le plan matériel).

Ils procèdent par encadrements successifs et ordonnent les résultats. Ils construisent des représentants des différentes classes d'équivalence mais ils sont conscients qu'il existe des classes encore plus fines que celles qu'ils savent représenter. A priori, deux objets choisis de manière quelconque n'appartiennent pas aux mêmes classes, il suffit d'affiner suffisamment la mesure pour les séparer.

Le passage au système métrique ne pose ensuite aucun problème, si ce n'est celui du vocabulaire à mémoriser.

Ce travail effectué au cours moyen peut sans doute être abordé plus tôt (tout au moins pour les longueurs). A ce niveau, il n'y a eu aucun problème avec la notion de conservation de quantité et la transitivité qui sont parfaitement acquises.