TOPOLOGIE DANS LE PREMIER CYCLE DES UNIVERSITÉS

Animateur : François MARCHIVIE

Précisons d'abord qu'un tel sujet est trop vaste pour être étudié à fond en 1 h 30.

L'idée essentielle a été qu'il valait mieux se limiter à la topologie métrique $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ en première année, quelques espaces de fonctions en deuxième année, et qu'il fallait bien sûr multiplier les exemples, celui de $\mathbb{R}^2$ étant plus instructif que celui de $\mathbb{R}$.

Les points suivants ont été abordés :

Limites

— La notion de filtre et de base de filtre ne paraît pas indispensable.

— *Limite infinie :* il peut être intéressant d'introduire la droite achevée avec les règles opératoires des éléments $+\infty$ et $-\infty$, et ce n'est que dans ce cas (à manier avec prudence) que l'on peut utiliser des notations comme : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ comme cela figure dangereusement dans certains manuels.

Compacité — Convexité

Il semble nécessaire de faire sentir les notions (par exemple pour les propriétés d'une fonction continue sur un intervalle), mais de ne pas les introduire systématiquement. En effet, la notion générale de compacité est difficile à introduire ; il vaut mieux se contenter des ensembles fermés et bornés sans prononcer le mot "compact" pour ne pas risquer d'introduire des idées fausses.

Continuité

Il peut paraître intéressant d'introduire la notion de continuité uniforme (beaucoup plus efficace), puis celle de continuité ponctuelle. Il paraît alors commode d'utiliser la notion de topologie induite.

Programme possible pour tous les étudiants du DEUG.

Première année — Espaces métriques, boules, ouverts, fermés, voisinages (?). Exemples de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^n$. Suites applications continues, composé d'applications continues. Application à $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$.

Deuxième année — Métrique de la convergence uniforme, espaces vectoriels normés, applications linéaires continues ; application à l'intégration et à la dérivation des suites et séries de fonctions.

Beaucoup de démonstrations assez fines d'analyse seront admises, ou démontrées dans une option à vocation mathématique.