

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Animateur : A. REVUZ

Ce qui différencie l'Analyse de l'Algèbre, ce qui lui confère son originalité et sa puissance, c'est la prise en considération et l'exploitation de l'idée d'*approximation*.

Cette notion est très loin d'avoir reçu dans les enseignements de base l'attention qu'elle mérite. L'enseignement élémentaire ne connaît, ou ce qui est pire, feint de ne connaître que des calculs

“exacts”, (“ça doit tomber juste ! ”) ; même dans les situations où ce sont des valeurs approchées qui constituent la solution naturelle.

Après la véritable contre-préparation à l'analyse qu'avaient subie les élèves que recevait le second cycle du second degré, celui-ci était amené à négliger la notion d'approximation pour insister sur les aspects algébriques de l'analyse élémentaire (calcul des dérivés par application de règles algébriques ; calcul de primitives par réduction algébrique à des cas que résoud la lecture d'un tableau de dérivés). Et lorsque l'accent était mis sur la notion d'approximation, sous ses diverses formes, le déconditionnement à opérer était trop important pour réussir chez un grand nombre d'esprits. Faute d'avoir abordé la notion lorsqu'elle se présentait naturellement, on l'avait rendue artificiellement difficile, et on se fondait sur cette difficulté pour légitimer son introduction tardive ; le cercle vicieux était bien en place ...

Cependant, si l'on veut bien ne pas fermer les yeux devant ces évidences :

a) aucune mesure physique n'est légitimement exprimée par un nombre réel, mais par un encadrement, c'est-à-dire par un intervalle (sinon par plusieurs, assortis chacun d'un indice de confiance) ;

b) tout calcul à partir de telles données, ou tout calcul un tant soit peu complexe sur des données exactes, ne peut fournir que des valeurs numériques approchées ;

on se convaincra, d'une part de l'importance fondamentale dans les applications de la notion d'approximation, d'autre part du grand nombre de situations qui permettent son introduction dans l'enseignement.

L'occasion est fournie actuellement de le faire en quatrième et en troisième ; il ne faut surtout pas la laisser échapper, et bien mettre en évidence ce fait fondamental que, dans bien des cas, la réponse honnête ne consiste pas en la donnée d'un nombre, mais de deux nombres, bornes de l'intervalle contenant le résultat idéal, mais pratiquement inaccessible.

Il convient d'insister à ce propos sur le fait qu'il est certainement psychologiquement plus payant de présenter un résultat approché par un encadrement, c'est-à-dire par deux nombres ayant des statuts équivalents, que par le couple d'une valeur approchée

et d'une incertitude, le dernier nombre, même s'il n'est pas frappé du même opprobre implicite que lorsqu'on le qualifiait d'erreur, ayant tout de même tendance à occuper une position subalterne, et bientôt à être négligé, le calculateur se comportant alors à l'égard de la valeur approchée comme si c'était une valeur exacte.

L'encadrement fait intervenir directement l'ordre des nombres utilisés (que l'on travaille dans D ou dans R). L'incertitude fait également intervenir l'ordre, mais par l'intermédiaire de l'outil plus sophistiqué qu'est la valeur absolue. Il est essentiel d'insister, dès qu'on la rencontre (dans Z , dans D , puis dans R), sur ses propriétés et d'établir l'égalité capitale, mais non évidente pour qui la rencontre pour la première fois : (x étant un élément générique de D ou de R)

$$\left\{ x \mid a < x < b \right\} = \left\{ x \mid \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

et de mettre en évidence la distance définie par :

$$d(x, y) = |x - y|$$

A partir d'une telle préparation, il est possible de présenter dans leur contexte naturel les notions fondamentales de l'analyse :

- la notion de continuité, qui apparaît comme l'une des conditions raisonnables que l'on peut imposer à une fonction pour qu'elle soit en état d'exprimer le lien existant éventuellement entre les mesures de deux grandeurs physiques (cf article sur l'enseignement de la continuité dans le Bulletin 283) ;
- la notion de différentiabilité, fondée sur l'approximation d'une fonction continue par des fonctions affines ; la différentielle ou application linéaire tangente fournit, lorsqu'elle existe, la meilleure approximation linéaire locale de l'accroissement de la fonction ;
- la notion d'intégrale, fondée sur l'approximation d'une fonction par des fonctions en escalier encadrantes.

Solidement motivées, placées dans le contexte de leurs applications réelles, ces notions sont attrayantes et utiles : leurs généralisations ultérieures approfondiront les intuitions initiales sans les contredire. L'utilisation de calculateurs programmables ou de bureau peut apporter ici une aide considérable, en montrant numériquement, en particulier pour la différentiation et l'intégration, comment la valeur "idéale" peut être encadrée de façon de plus en plus serrée, et en permettant de bien mettre en lumière les mérites respectifs de la valeur idéale exacte et des valeurs approchées prati-

Bulletin de l'APMEP n°291 - Décembre 1973

quement utilisées : la valeur idéale a des propriétés plus simples et plus esthétiques, les valeurs approchées sont les seules que l'expérience pourra utiliser ou fournir et que l'analyse numérique pourra traiter.