GÉOMÉTRIE EN QUATRIÈME ET TROISIÈME

Animateur : François MARCHIVIE

Le Groupe s'est réuni trois fois. Les buts fixés étaient :

1 — Bilan de deux années d'enseignement ;

2 — Comment traiter le programme actuel ;

3 — Réflexion sur une modification des programmes.

Devant l'ampleur des problèmes posés, seuls les points 1 et 2 ont été développés de la manière suivante :

A — Difficultés rencontrées ;

B — Quelques moyens proposés pour y remédier ;

C — Diverses présentations possibles du programme actuel.

A — *Difficultés rencontrées*

— Manque de recul et d'information mathématique ; on a signalé : moyens insuffisants mis à la disposition des IREM, diffusion insuffisante de leurs travaux, absence de possibilités de recyclage des non titulaires, (sauf cas particuliers).

— "Nocivité" de commentaires trop orientés vers une certaine forme de présentation et de manuels débordant le cadre du programme et peu adaptés au niveau des classes.

— Difficulté d'adaptation des programmes aux diverses possibilités des élèves.

— Difficulté de faire saisir la distinction entre le concret et le modèle mathématique.

— Difficulté d'expression des élèves.

Le manque de temps a été avancé par l'unanimité du groupe comme facteur rendant difficile la solution de ces problèmes.

B — *Propositions de remèdes*

— Intensification du travail des IREM pour l'information mathématique et l'animation pédagogique. Il paraît alors nécessaire que des moyens très accrus soient mis à leur disposition, en particulier *il est indispensable d'assurer la formation des non titulaires.*

— Le groupe souhaite que l'A.P.M. dénonce le "mythe" du manuel et prévoie des groupes de réflexion à ce sujet (1).

— Il semble nécessaire d'organiser l'enseignement en réduisant au maximum la construction théorique pour laisser beaucoup de place à des activités ne se limitant pas à des applications immédiates.

— Il est souhaitable d'accorder plus d'importance à une approche de la géométrie de quatrième - troisième en sixième et cinquième, sans pour cela gonfler les programmes (ci-joint une note annexe *sur des travaux effectués par une participante au groupe*). En quatrième cette approche devrait être faite en liaison étroite avec la technologie.

— Il faudrait que des heures de soutien soient accordées pour certains élèves.

— Des participants ont suggéré lorsque cela est possible de faire appel à des élèves des classes postérieures.

Pour mener à bien ces travaux, il est impératif que dans chaque établissement existe une véritable équipe pédagogique aussi bien mathématique qu'interdisciplinaire.

C — *Diverses présentations en accord avec — B —*

Les idées essentielles émises sont celles de l'introduction d'axiomes "forts" et de la limitation des démonstrations à condition de bien préciser si la proposition admise *est un axiome* ou *nécessiterait une démonstration*.

Exemples :

En quatrième — Présentations basées sur la géométrie vectorielle

— Partir des translations (droite mathématique et parallélisme définis), dans ce cas il n'est pas nécessaire de connaître $\mathbb{R}$ pour construire le groupe additif des vecteurs (cf voir annexe) ;

— Utiliser très rapidement les axes de coordonnées (Méthode Galion).

(1) Il pourrait n'y avoir aucun manuel de cours, mais des manuels avec des résumés très succincts des principales propriétés et beaucoup d'exercices, et des manuels pour le maître.

En troisième — Trois possibilités ont été dégagées :

1) Produit scalaire (cf annexe pour une idée d'introduction) ;

2) Axiome d'orthogonalité, distance puis axiome de Pythagore ;

3) Axiomes de la médiatrice et de la symétrie axiale (cf annexe).

Il est rappelé que l'on peut étudier la trigonométrie et les angles sans faire intervenir les isométries (Plaquette A.P.M.). Le groupe souhaite le maintien des allègements actuels. Pour l'avenir il serait peut-être souhaitable de voir un autre ordre de présentation (par exemple métrique avant affine).

ANNEXES

1. *Géométrie affine basée sur les translations* - Présenté par MARCHIVIE, présentation suggérée par l'algèbre géométrique d'ARTIN.

1) *Axiomes d'incidence :* définition de la translation comme application du plan dans lui-même à partir du parallélisme, unicité de la translation transformant A en B.

2) *Axiome :* A et B étant donnés, il existe une translation δ telle que $B = \delta(A)$. (elle est bien sûr unique). Les translations forment alors un groupe commutatif ; il est facile alors de définir les bipoints équipollents, puis le groupe des vecteurs par "isomorphisme" avec le groupe des translations.

3) Introduire alors la droite réelle, puis l'axiome de Thalès qui entraîne la vérification de l'axiome précédent.

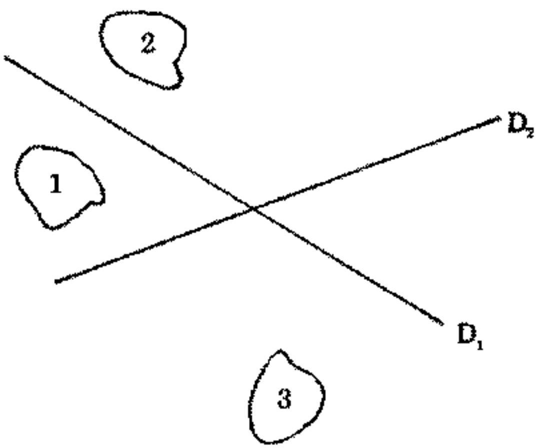
2. *Introduction du produit scalaire en troisième* - (présenté par MARCHIVIE à partir des travaux d'une équipe de Chalon s/Saône).

Soit $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère. Soit f l'application de $\vec{\mathcal{P}}$ vers $\vec{\mathcal{P}}$ qui à $\vec{V} : (x, y)$ associe $f(\vec{V}) : (-y, x)$. On remarque que $f^2 = -I$; si l'on appelle $\overline{f}$ l'application de l'ensemble $\mathcal{D}$ des directions de $\mathcal{P}$ que l'on peut associer directement à f, elle vérifie les propriétés d'une orthogonalité et on voit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\vec{V} : (x, y)$ et $\vec{V}' : (x', y')$ soient orthogonaux est : $x x' + y y' = 0$.

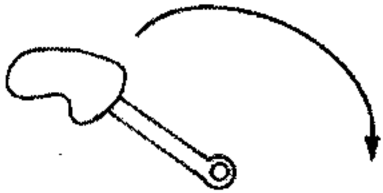
3. *Travaux de géométrie expérimentale faits par des élèves de sixième et cinquième* - Josette PERRET - Bel-Air, rue des Masures - BAYONNE.

1) Introduction de la notion de *longueur* comme classe de segments en utilisant le compas. Somme de longueurs - polygones - périmètre, et pour motiver cette étude du périmètre construction d'un "immeuble" (prisme droit) connaissant le polygone de base sans prendre aucune mesure en utilisant le compas pour préparer le plan du mur. Les arêtes sont tracées à l'équerre que les enfants connaissent. Certains enfants se trompent en pliant et obtiennent un "mur" qui serait associé au polygone symétrique de celui qu'ils ont choisi. On vérifie que tout s'arrange en retournant le polygone.

2) Exercices sur la symétrie axiale par pliage. On utilise du papier calque et on trace une droite qui sera le pli. Un petit dessin simple (courbe fermée sans point double) est reproduit par pliage. On recommence avec un autre pli.



Le papier calque est ensuite posé sur un papier blanc et après avoir tout repassé à l'envers au crayon un peu gras on reproduit en repassant à l'endroit ; les petits domaines 1, 2, 3 sont découpés après avoir été coloriés, ce qui leur donne un envers et un endroit. On constate que (1) entre dans le trou de (2) si on le retourne, que (1) entre dans le trou de (3) sans retournement, etc... On munit chaque petite figure d'une petite bande de papier collée sous elle pendant qu'elle est dans son trou et les petites bandes sont fixées par une attache parisienne au point de concours des deux axes de symétrie. On découvre la rotation, composition de deux symétries axiales.

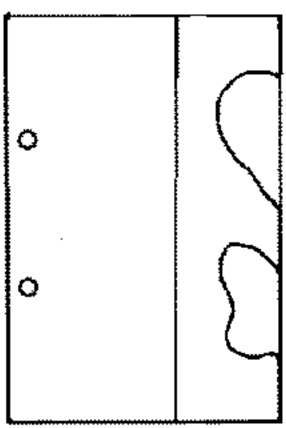


Découverte des propriétés de la symétrie : deux points qui se correspondent dans la symétrie (on utilise ici la notion d'application introduite en sixième, et on écrit :

$$A \mapsto A', \quad B \mapsto B' \quad ....)$$

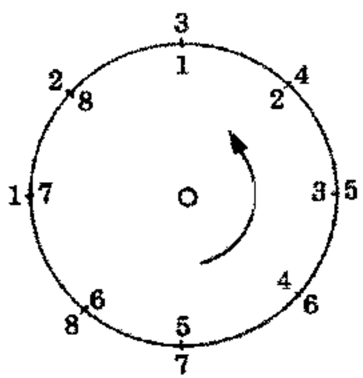
sont à égale distance de n'importe quel point de l'axe de symétrie, ce qui nous conduit à utiliser le compas pour construire le symétrique... Les enfants parviennent très bien à construire le symétrique d'un polygone.

3) Autres exercices sur la symétrie : découverte de la notion de figures ayant un axe de symétrie. La feuille de classeur est pliée ; on fait tracer des lignes courbes sans point double, joignant un point du pli à un autre point et on découpe. Sur la même feuille de classeur on trace deux ou trois courbes fermées et on découpe. La feuille de classeur ainsi "trouée" est collée sur un papier de couleur. On prend les surfaces découpées et on expérimente : Celles qui ont été découpées après pliage peuvent entrer dans leur trou si on les retourne, les autres pas, etc...



4) D'où vient alors l'idée de chercher l'axe de symétrie d'un segment, d'une paire de demi-droites... et on introduit ainsi médiatrice et bissectrice... et leur construction à l'aide du compas.

5) La notion d'angle, "classe de paires de demi-droites", se construit intuitivement sans qu'aucun vocabulaire compliqué soit introduit.
Et nous nous intéressons à des divisions régulières du cercle en utilisant suivant le cas la construction de la bissectrice ou le rapporteur. Motivation : obtenir de belles étoiles régulières. On va construire un petit appareil qui donne la recette. On trace un cercle sur lequel on a marqué, par exemple en utilisant la construction de la bissectrice, huit points numérotés de 1 à 8. On fait le même travail sur un disque qu'on découpe et qu'on pose sur le premier avec une attache parisienne.



On obtient ainsi des "schémas" d'application "est relié à", et cela sert de recettes . A chaque position du disque correspond une application qui donne une recette pour tracer des polygones. On fait faire aux enfants des travaux différents: les uns prennent 6 points, d'autres 7, 8, 9, etc...

Beaucoup d'expérimentations intéressantes là-dessus (notion de centre de répétition, sans le mot bien sûr) ; étude des polygones obtenus. Dans certains cas on trouve un ensemble de diamètres... étoiles qui peuvent se décrire d'un coup de crayon continu... d'autres non, etc...

6) Le repérage sur quadrillage, en distinguant bien repérage d'un point et repérage d'une zone — dessin transmis par un message (couples); l'autre élève décrypte, les deux élèves comparent les dessins obtenus et retrouvent leurs erreurs.

7) Même travail avec le repérage par coordonnées polaires (sans dire le mot bien sûr) et là encore distinction entre repérage de noeuds et de zones.

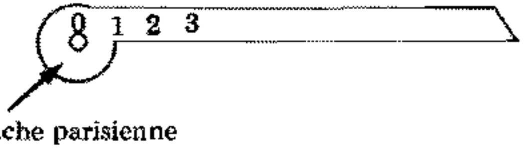
8) Repérage sur la sphère, construction de la sphère terrestre en carton par disques emboîtés :

disque équateur gradué de 10° en 10° avec le rapporteur — méridien origine gradué — 4 parallèles,

et méridien mobile (charnière). Ce travail est très intéressant et révèle combien "faire avec ses doigts" est instructif.

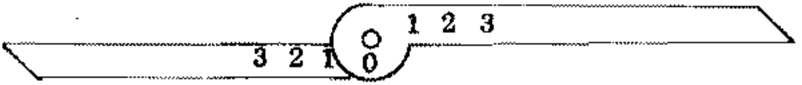
9) "Homothéties" *sans le mot* — Premier exercice : homothéties positives de rapport 2, puis 1,5... Liberté ensuite de prendre d'autres rapports.

L'aiguille en papier millimétré :

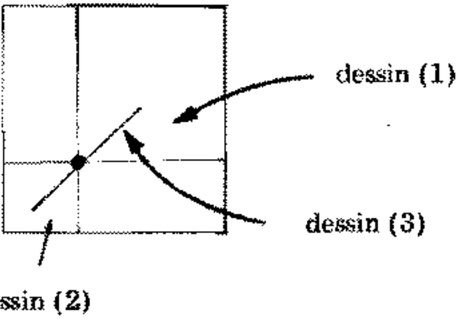


L'élève dessine le dessin qu'il veut, choisit des points importants qu'il repère avec son aiguille, etc...

Deuxième exercice : homothéties de rapport négatif : ($-\frac{1}{2}$) et (-1)



aiguille en papier millimétré collée sur du carton.



Exploitation de ce travail ; occasion de mesurer une longueur et de faire du calcul mental. Découverte du parallélisme des segments homothétiques, etc...

10) Encadrement expérimental de π par construction de polygones inscrits et circonscrits et de leurs périmètres (il est interdit de prendre un seul côté et de toujours le reporter). On constate que le polygone qu'on a voulu "faire régulier" n'est jamais complètement réussi. Alors on prend les côtés un par un avec le compas (outil de transport des longueurs). Mes élèves de sixième ont fait les polygones à 16 côtés (en construisant des bissectrices) et ont pris l'équerre pour le polygone circonscrit. Le cercle avait 1 dm de diamètre. Ils ont trouvé.

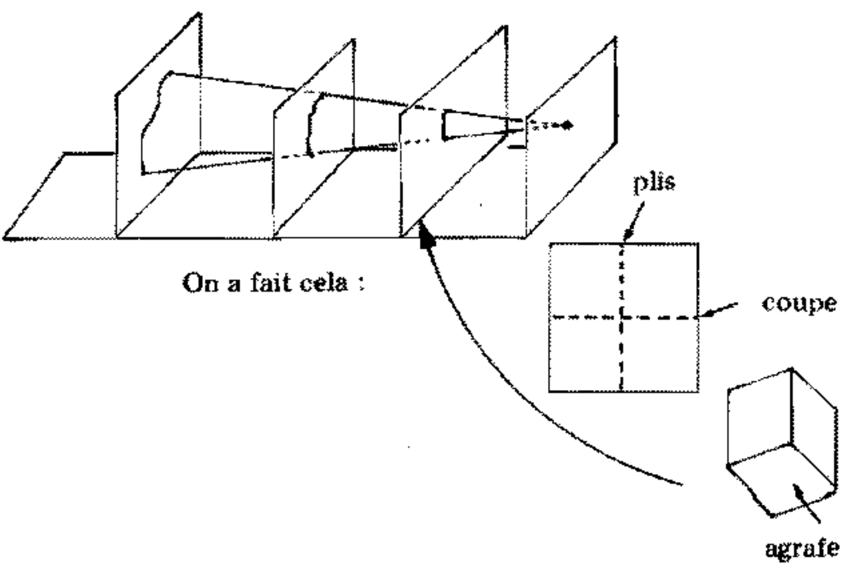
$$3{,}12 < \pi < 3{,}18$$

Ils ont été très intéressés... Une fois l'expérience faite, je pense qu'il eût été plus intéressant de ne pas donner le même nombre de côtés à tous les élèves.

11) Encadrement d'aires...

En cinquième - 1. Utiliser les homothéties faites en sixième dans le plan pour en faire un montage dans l'espace (a été très bien réussi).

2. A l'occasion de ce montage, il a fallu faire tenir les "plans" en carton perpendiculaires au plan de base.



Ce travail concret a permis de découvrir beaucoup de choses sur plans, plans parallèles, plans perpendiculaires, droite perpendiculaire à un plan, etc...

3. Découverte des réseaux construits par glissement d'une fausse équerre et repérage sur un réseau — translations sur un réseau — compositions de translations.

4. Etude expérimentale de l'ombre solaire d'une plaque trouée régulièrement (quadrillage)... découverte du réseau qui est l'ombre d'un quadrillage.

5. Construction de l'ombre solaire par report des coordonnées sur quadrillage, sur des réseaux variés.

6. Polyèdres.