

ALGÈBRE LINÉAIRE

Animateur : M. GLAYMANN — Rapporteur : J. C. DANIEL

Introduction (Glaymann) :

Compte tenu de l'importance du livre de T. J. Fletcher : "*L'Algèbre linéaire par ses applications*", les organisateurs des Journées m'ont demandé de présenter cet ouvrage.

Fletcher est *Inspecteur Général* (en Angleterre). Il s'occupe en priorité de pédagogie des mathématiques. Il représente l'idéal de ce que peut être un inspecteur général : présentant des méthodes didactiques, il suscite dans les classes la discussion à tous les niveaux et contribue à faire progresser l'étude du domaine mathématique.

L'Algèbre linéaire : le sujet préoccupe beaucoup nos collègues anglais. C'est un point central de leur enseignement. Dans son ouvrage, Fletcher se livre à une synthèse de leurs réflexions.

Il ne s'agit pas à vrai dire d'un livre de mathématiques : parlant des applications de l'algèbre linéaire, dans tous les domaines où elles se rencontrent, l'auteur invite son lecteur à aller plus loin, présentant ainsi une mathématique qui fait réfléchir, qui motive.

Partir du concret, poursuivre une voie, puis laisser le lecteur libre d'aller au-delà, est un facteur indéniable de progrès. Ce livre présente un intérêt tout particulier pour l'A.P.M.E.P. en relation directe avec la Charte de Caen, dans laquelle a été définie la notion de programme par Noyau - Thèmes.

La notion de programme dans sa conception actuelle est un handicap majeur. Il faudra tôt ou tard la réviser.

Un certain pessimisme se dessine : notre enseignement n'est pas en prise directe avec la réalité, il se produit un décalage avec les jeunes. Ceux-ci, qui sont curieux, "non conformes", ne nous croient plus. Il est grand temps d'y réfléchir pour empêcher l'École de sombrer.

Le jeune collègue abordant l'enseignement aujourd'hui doit préparer à leur avenir les hommes qui vivront en 2.030. Il enseignera évidemment en fonction du contrat qu'il doit remplir, mais là n'est pas le vrai problème ; nous devons tous être conscients, en effet, que nous devons former des hommes qui seront capables d'utiliser de nouveaux outils qui se présenteront à eux. Il n'est plus possible, et c'est un problème lié à notre civilisation, de former un "honnête homme" avec un bagage déterminé.

Rappelons que dans la conception d'un programme par "Noyau-Thèmes", le noyau constitue les clefs de la construction, autour desquelles se greffent un certain nombre de thèmes diversifiés laissés au choix de la classe et des professeurs.

T. J. Fletcher présente ainsi l'algèbre linéaire comme notion clef, qu'il aborde au travers d'un éventail de thèmes de façon progressive. Une telle méthode devrait permettre de remplacer un enseignement trop linéaire par un enseignement fait de touches successives, tout en évitant de faire de la mathématique pour elle-même.

Discussion

Le groupe de travail dans son ensemble approuve les conclusions de cet exposé préliminaire.

Quelques questions cependant — (réponses de l'animateur)

Q.1 : *"Il est difficile pour le professeur de mathématiques, dans la pratique actuelle de son métier, de se départir d'une certaine angoisse, liée aux programmes et aux examens".*

R : Cette angoisse ne peut s'estomper qu'à la suite d'une prise de conscience collective. Il faut être certain que "tout peut changer au cours d'une existence", et que seul un mouvement de masse fera évoluer la situation.

Q.2 : *"Ne faudrait-il pas alors que l'A.P.M.E.P. prenne des positions très précises pour les gens timorés ?"*

R : Nous ne croyons pas aux directives "venues d'en-haut". Ce sera seulement dans la mesure où 15.000 professeurs de mathématiques imposeront leur volonté que les choses changeront.

Il suffit de prendre l'exemple des programmes de quatrième et troisième. L'A.P.M.E.P. a lutté pendant deux ans, se heurtant à un mur, et pourtant la lettre signée massivement par nos collègues a suffi à débloquer la situation.

Il faut donc sensibiliser l'ensemble des collègues, et ne pas faire cavalier seul (interdisciplinarité). Il faut aussi convaincre les autres que les professeurs de mathématiques ne sont pas "impérialistes".

Nous voulons ainsi préparer un outil qui serve et non un outil qui fasse plaisir. C'est une action politique au sens noble du terme.

Q.3 : "Comment aborder les thèmes ? Car si la façon d'enseigner ne change pas (cours magistraux), la redéfinition Noyau-Thèmes ne servira à rien".

R : Il est nécessaire de faire prendre racine à la méthode de travail dès l'école élémentaire : méthode ludique, suivie d'un accès mathématique.

1) Formulons l'hypothèse fondamentale : Former dans chaque établissement une équipe de professeurs décidant de travailler ensemble dans l'un des cycles.

Cela suppose résolu le problème de l'adhésion des autres collègues. Ce facteur permettra de rendre confiants en l'équipe ceux qui manquent de confiance en eux (Formons des équipes "hétérogènes" en supprimant toute notion de "caste").

2) En second lieu, il faut aussi organiser le travail d'équipe : les noyaux constituent les objectifs à long terme.

Par exemple, dans le premier cycle les élèves devront acquérir un certain nombre de noyaux. En sixième on étudiera quelques thèmes convergeant vers ces noyaux, puis en cinquième d'autres thèmes convergeant vers les mêmes noyaux ...

Pour un noyau donné, en sixième deux thèmes peuvent suffire pour certains élèves, alors que pour d'autres, trois, quatre thèmes ou davantage seront nécessaires, d'où l'obligation de faire travailler la classe elle-même en équipes diversifiées.

3) Le rôle du Maître : faire des synthèses, susciter de nouveaux thèmes, de nouvelles directions d'étude ...

Répétons que tout cela suppose une révision fondamentale de la manière de concevoir notre enseignement.

Exemples de thèmes convergeant vers un noyau.

"Les Vectoriels" (d'après Fletcher)

Exemple 1 : Les carrés magiques (cf livre de F. page 13)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ est un carré magique car les totaux ligne, colonne, diagonale, sont tous égaux (à 15).}$$

Un travail préalable sur les carrés magiques pourra être réalisé à l'école élémentaire, permettant ainsi de se livrer à de nombreux exercices de calcul (activité essentielle).

Intéressons-nous plus particulièrement à l'ensemble \mathcal{C}_3 des carrés magiques d'ordre 3. Nous pouvons faire constater sur quelques exemples que la somme terme à terme de deux carrés magiques est encore un carré magique. Il faudra par la suite démontrer la généralité du résultat (exercice facile et motivant).

De plus en multipliant chaque élément d'un carré magique par un même nombre x , on obtient un nouveau carré magique. Nous pouvons là encore suivre la démarche précédente : constatation sur quelques exemples, puis démonstration de la généralité du résultat.

$(\mathcal{C}_3, +, \cdot)$ est un modèle de vectoriel construit à peu de frais. $(\mathcal{C}_3, +)$ est un groupe commutatif, (\mathcal{C}_3, \cdot) vérifie certains axiomes. Il n'est pas question de prouver ces assertions en classe de sixième !!!, mais il sera utile de faire constater quelques propriétés de $(\mathcal{C}_3, +, \cdot)$.

Quelques questions se posent alors :

Quelle est la dimension de ce vectoriel ? Il s'avère nécessaire de réfléchir avant de pouvoir répondre à cette question.

Pour démontrer que $\dim(\mathcal{C}_3) = 3$, on exhibera une base. Cet exercice peut être intéressant même pour des élèves n'ayant aucune connaissance de la notion de "base".

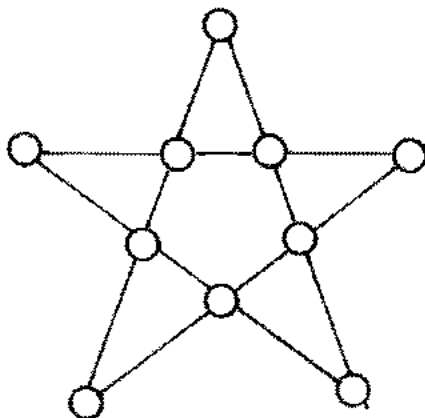
Les élèves pourront par exemple réfléchir (en dehors de la classe) à la réponse à apporter aux questions :

Peut-on trouver quelques carrés magiques qui servent à former tous les autres ? Combien de carrés faut-il prendre au minimum pour réaliser cette condition ?

Une objection est souvent faite à une telle méthode : "Il ne faut pas déflorer le sujet". Il est cependant normal de le faire : il ne s'agit pas d'un vice. Semons pour pouvoir récolter.

Il est indispensable qu'existe une concertation entre les professeurs de mathématiques d'un établissement pour que chacun connaisse les thèmes explorés au cours des années.

Exemple n° 2 — Pentagones magiques (Fletcher page 19)



Est-il possible de construire des pentagones magiques ?

Voici une nouvelle situation permettant de reprendre le problème précédent.

Une surprise cependant au niveau de la dimension du vectoriel : 6. Il est alors plus difficile de trouver une base.

Il est possible de reprendre une approche analogue pour beaucoup de notions. L'essentiel réside dans l'imagination du maître pour trouver des thèmes motivants. Comptons sur les équipes pour l'élaboration de ces thèmes. En fait, il paraît difficile de trouver de "bonnes idées". On ne les trouve pas tout seul, mais par enrichissement collectif, par rencontres, échanges d'idées ... avec élèves, parents, professeurs.

Exemple n° 3 — (domaine à explorer dans le premier cycle)

Différences finies — (Fletcher page 25)

Il s'agit d'une excellente préparation à l'analyse (vers le calcul différentiel et intégral).

L'utilisation de machines à calculer facilite grandement les choses. Signalons en passant que nos seules exigences ne se bornent plus à un tableau et de la craie. Equipons les établissements de machines à calculer et de mini-ordinateurs, l'apprentissage du calcul deviendra meilleur. Savoir calculer, c'est savoir trouver les résultats et faire leur estimation.

$$\text{soit la fonction : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^2 + 4x + 3 \end{array} \right.$$

Faisons construire la table des différences de ce polynome :

x :	0	1	2	3	4	5
images :	3	8	15	24	35	48
Différences premières :	5	7	9	11	13
Différences secondes :		2	2	2	2
Différences troisièmes :		0	0	0

Les différences troisièmes semblent être toutes nulles ; cette propriété est-elle vraie jusqu'à $x = 5$ ou est-elle générale ? Pourquoi les différences secondes sont-elles constantes ? (Relation avec les dérivés première, seconde...) ?

L'ensemble des tables de différences de polynomes de degré inférieur ou égal à n est-il un modèle de vectoriel ? A quel polynome correspond une table donnée ? (excellente motivation pour l'étude des polynomes en quatrième : isomorphisme sous-jacent entre polynomes et tables de différences).

Est-il possible d'exhiber une base ? Quelle est la dimension du vectoriel ?

Pour répondre à toutes ces questions on pourra montrer que toute table est déterminée par son bord gauche,

(dans l'exemple donné : 3.....
 5.....
 2...
 0..)

Il est possible de montrer que les polynomes

$$x_{(i)} = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$$

$$i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

forment une base.

L'application $\Delta : x_{(n)} \mapsto \Delta x_{(n)} = n x_{(n-1)}$ s'appelle opérateur de différences premières.

(Cela rappelle :

$$\frac{d x^n}{dx} = n x^{n-1})$$

La poursuite de cette étude mène à l'étude des équations aux différences finies (analogie avec les équations différentielles).

T.J. Fletcher ne se limite pas à ces quelques exemples ; il en fournit d'autres, touchant à de nombreux domaines : chimie, statistiques, mécanique ...

La recherche de nombreux exemples comme ceux-là, dans d'autres disciplines, entraînera l'adhésion de nombreux collègues au travail en équipes interdisciplinaires.

Discussion

* Q -- : *Devant un tel ouvrage se trouve posé le problème de notre incompétence.*

R -- : Ceci fait apparaître la nécessité d'une formation continue en prise directe avec la réalité. Il existe déjà des I.R.E.M. Il faut exiger ensemble cette inévitable formation continue.

* Q -- : *Un élément particulièrement intéressant de cet ouvrage est la mention de références précises, au bon moment. Mais toutes ces références sont anglaises.*

R -- : Il faudrait obtenir des traductions de ces ouvrages à des prix moins élevés que ceux pratiqués en France !

* Q -- : *Les I.R.E.M. ont déçu beaucoup de collègues, qui attendent l'étude des problèmes en liaison plus directe avec leur enseignement.*

R -- : Ce sont les collègues qui doivent imposer leur volonté. Il faut "rectifier le tir" en permanence en établissant un dialogue fécond, et en évitant la résignation.

* Q -- : *Les jeunes collègues débutants, venant de terminer leurs études, jugent difficile l'application de ce qu'on leur a appris, dans leur enseignement.*

R -- : Il faut participer de façon continue à l'évolution du travail en cours. On raisonne trop au niveau de la formation initiale. Il faut en outre amener les étudiants en formation initiale à se poser des questions.

En conclusion Glaymann relate alors une expérience faite avec ses étudiants lyonnais (certificat sur l'enseignement des mathématiques).(1)

(1) On trouvera dans le prochain Bulletin un article consacré à ce sujet.