Limite et continuité

Animateur : M. DEHAME
Rapporteurs : Mmes COJAN et BINET

Le groupe de travail a commencé par se poser le problème : "Faut-il présenter la limite avant ou après la continuité ? ".

Les avis sont partagés : pour certains, la continuité vient après la notion de limite comme cela a toujours été fait dans l'enseignement traditionnel. Pour d'autres, la notion de continuité est plus naturelle, d'une motivation plus aisée que celle de limite, et doit être enseignée la première ; plusieurs des professeurs en présence ont expérimenté cette dernière présentation dans leur classe, et ne se sont pas heurtés à des difficultés pédagogiques plus sérieuses que dans la présentation traditionnelle : la définition de la limite finie en un point de R découle immédiatement de celle de la continuité, et se transpose aisément (par des changements de sens dans les inégalités) au cas des limites infinies ; mais, pour donner plus d'unité à cet exposé, il faudrait introduire les voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, c'est-à-dire (pourquoi ne pas prononcer le mot ?) la droite achevée $\overline{\mathrm{R}}$.

De toute façon, les difficultés de ce chapitre ne semblent pas dues aux notions elles-mêmes, que les élèves finissent toujours par assimiler quel que soit le mode de présentation adopté, mais au manque de techniques des élèves dans les raisonnements d'analyse : la définition de la continuité est comprise, mais les élèves sont incapables de démontrer que

$$x \longmapsto \frac{1}{2-x}$$

est continue pour $x = 1$. Le travail serait grandement facilité si les élèves possédaient avant d'aborder l'analyse :

— l'usage des notions élémentaires de logique (quantificateurs, implication, négation),

— une bonne connaissance de R, en particulier les notions de valeur absolue, de distance, et l'équivalence entre
$|x - x_0| < \alpha$ et $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$,

— une panoplie d'exemples de fonctions continues ou non (fonctions affines par intervalles),

— une bonne technique des majorations et des raisonnements par conditions suffisantes. On peut les y préparer en seconde (et déjà en troisième) en leur proposant des exercices des types suivants :

"trouver un intervalle de centre donné inclus dans un intervalle donné"

"trouver l'image ou l'image réciproque d'un intervalle donné par une application donnée"

"trouver un intervalle I de centre x_0 tel que f(I) soit inclus dans un intervalle donné", etc ...

Les résolutions classiques d'inéquations ne sont pas suffisantes pour préparer les élèves aux exercices sur la continuité : pour résoudre les inéquations classiques, ils disposent d'un certain nombre de recettes qui leur permettent de passer d'une inégalité à une inégalité équivalente ; alors qu'en analyse, on se donne le plus souvent une inégalité du type $|y - y_0| < \varepsilon$ et on cherche une inégalité du type $|x - x_0| < \alpha$ qui l'implique, mais qui ne lui est pas équivalente. C'est un problème plus difficile (qui demande plus d'initiative), mais qui aurait intérêt à être abordé avant l'introduction des notions de limite et de continuité, et en tout cas pas en même temps, car on ne peut pas exiger des élèves qu'ils surmontent simultanément deux types de difficultés.

Monsieur Revuz s'est joint au groupe de travail et a fait l'exposé de son expérience dans les établissements du second degré de l'Académie de Paris. Pour ce compte-rendu, on pourra se reporter à son article, dans le Bulletin n° 283, page 287.