Utilisation de la notion de relation à la résolution de quelques problèmes pratiques

Animateur : Maurice BOUTEILLE

Bouteille a distribué un polycopié (1) et nous a exposé deux exemples d'utilisation de relation binaire dans un ensemble fini pour la résolution de deux problèmes pratiques.

. Le premier problème fut de construire toutes les chaînes de montage possibles pour la construction d'un objet technologique nécessitant 10 postes de travail connaissant la relation de nécessaire postériorité dans l'ensemble des opérations technologiques liées à ces postes.

. Le deuxième problème fut de découvrir les 53 possibilités (dans l'exemple donné) que l'on a pour faire passer sept liquides successivement dans une même canalisation sachant qu'à cause de leur nature tous les liquides ne peuvent pas se succéder.

L'exposé a vivement intéressé l'auditoire qui a ensuite été invité à trouver d'autres exemples de l'utilisation de relations dans la résolution de problèmes pratiques ou plus simplement à nous donner des exemples d'analyse mathématique de problèmes technologiques.

Un premier participant nous a posé le problème suivant :

Sur un damier à n lignes, n colonnes, on étudie la marche d'un cavalier qui doit partir de la case p et revenir à la case p, après avoir parcouru les $n^2 - 1$ autres cases sans répétition. (Rappelons que le cavalier se déplace de 2 cases dans une direction et d'une case dans la direction perpendiculaire). Nous n'avons pas de solution pour les damiers 3×3, 4×4, 5×5, mais il y en a une pour les damiers 6×6, 8×8, ...

Un deuxième participant nous a montré comment il posait le problème du mouvement hélicoïdal en décrivant la relation vis-écrou, chacun pouvant être muni d'un mouvement de rotation R ou de translation T.

Nous pouvons dresser le diagramme suivant :

Vis		Ecrou	
R	T	R	T
1	0	0	1
0	1	1	0
0	.0	1	1
1	1	0	0

(1) Voir en annexe

Un troisième participant nous a parlé des relations entre roues d'un même modèle qui constituent une boîte de vitesses et dans laquelle on peut définir une relation d'ordre.

Enfin de nombreux exemples ont été donnés en considérant des jeux éducatifs, des exemples électriques comme le va et vient trois postes, ou des exemples mécaniques comme le distributeur de boissons.

. Certains participants utilisent dans leurs classes un système de cartes perforées pour habituer les élèves à transformer des propriétés en langage binaire et à déterminer des intersections, des réunions ou des complémentaires.

. Enfin les participants ont signalé la difficulté qu'il y a de collaborer entre physiciens et mathématiciens qui, bien souvent, ont des processus de pensée bien différents.

. Ils ont aussi signalé l'imprécision du langage. Que signifient exactement : tableau logique, tableau technologique ...?

Annexe

" Les mathématiques modernes ne débouchent sur aucune application pratique ". Voilà une phrase que l'on entend dans n'importe quelle discussion sur ce sujet.

Le matériel mathématique utilisé sera la notion de relation binaire dans un ensemble fini.

Trois types de schémas sont souvent donnés pour une telle relation : le schéma fléché (ou sagittal), le schéma cartésien, le schéma 0–1 (ou matriciel).

Donnons un exemple.

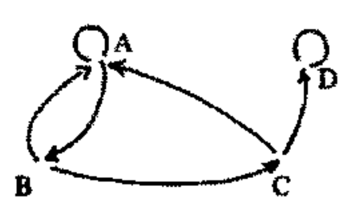
Soit E l'ensemble $\{A, B, C, D\}$

Une relation $\mathfrak{R}$ est définie par son graphe G, partie de $E \times E$.

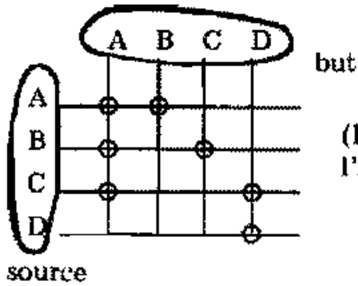
Ici G est $\{(A,A), (A,B), (B,C), (B,A), (C,D), (C,A), (D,D)\}$

Le schéma fléché de $\mathfrak{R}$ est le suivant :

On signale que $(B,C) \in G$, à l'aide d'une flèche allant de B à C.



Le schéma cartésien de $\mathfrak{R}$ est :



(B,C) ∈ G est signalé par un rond entourant l'intersection de la ligne B et de la colonne C.

Le schéma 0–1 ou matrice de $\mathfrak{R}$ est :

$\mathfrak{R}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
C	1	0	0	1
D	0	0	0	1

but — source

Ce schéma ne représente rien d'autre que la fonction caractéristique de G.

1 à l'intersection de la ligne B et de la colonne C signifie que (B,C) ∈G

0 à l'intersection de la ligne C et de la colonne B signifie que (C,B) ∉ G .

I *Construction d'une chaîne de montage*

Dans l'industrie, tout objet manufacturé nécessite un certain nombre d'opérations technologiques. Certaines de ces opérations doivent nécessairement être postérieures à d'autres ; et entre certaines opérations un choix peut être réalisé.

Le problème est le suivant : connaissant la relation de nécessaire postériorité dans l'ensemble des opérations technologiques, construire toutes les chaînes de montage possibles.

Dans l'exemple ci-dessous, on aura 10 postes de montage que l'on notera A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et on supposera connue la relation de nécessaire postériorité (notée $>$) par les 22 couples de son graphe :

$B > A$; $C > A$; $D > H$; $I > J$; $F > E$; $D > F$; $E > B$; $E > C$; $H > E$; $J > D$; $D > G$; $G > E$; $J > A$; $F > B$; $I > A$; $H > B$; $I > C$; $G > C$; $E > A$; $I > H$; $D > E$; $H > A$.

On construit alors la matrice de la relation >

but

source

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	4
E	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
F	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2
G	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2
H	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
I	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	4
J	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
	6	3	3	1	4	1	1	2	0	1	22

Puis, on fait la somme de tous les nombres se trouvant dans chaque ligne.

Quelle doit être la somme des nombres trouvés ?

Le nombre ainsi trouvé représente le nombre d'opérations nécessairement antérieures à l'opération correspondant à la ligne étudiée.

En particulier 0, somme des nombres de la ligne A, signifie que A n'a pas d'image pour la relation > ; c'est donc un point de départ possible pour la chaîne étudiée. Remarquons que dans l'exemple choisi, c'est le seul.

Effectuer la somme des nombres se trouvant dans chaque colonne.

Interpréter le nombre ainsi trouvé, et en particulier 0 , somme des nombres de la colonne I.

I est donc le point final de la chaîne.

Recommencer l'étude précédente sur le sous-ensemble
{ B, C, D, E, F, G, H, J } .

Combien y a-t-il de couples dans le graphe de la nouvelle relation de nécessaire postériorité ?

but

source

	B	C	D	E	F	G	H	J	
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	1	1	1	1	0	4
E	1	1	0	0	0	0	0	0	2
F	1	0	0	1	0	0	0	0	2
G	0	1	0	1	0	0	0	0	2
H	1	0	0	1	0	0	0	0	2
J	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	3	2	1	4	1	1	1	0	13

On conclut que B ou C sont des points de départ possibles de cette chaîne restreinte et J le point final.

On a déjà deux possibilités pour le début des chaînes possibles

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \ldots$$
$$A \longrightarrow C \longrightarrow B \ldots$$

Noter que toute chaîne se termine ainsi

$$\ldots \longrightarrow J \longrightarrow I$$

On pourra résumer ces possibilités par le schéma suivant :

$$\begin{array}{llll} & \nearrow B \longrightarrow C \ldots & & \\ A & & \ldots \longrightarrow J \longrightarrow I & \\ & \searrow C \longrightarrow B \ldots & & \end{array}$$

On continue en s'intéressant aux cinq postes de montage restants :

but

source

	D	E	F	G	H	
D	0	1	1	1	1	4
E	0	0	0	0	0	0
F	0	1	0	0	0	1
G	0	1	0	0	0	1
H	0	1	0	0	0	1
	0	4	1	1	1	7

On peut alors compléter la chaîne de montage

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & B \arrow[dr] & & & & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & E \cdots D \arrow[r] & J \arrow[r] & I \\ & C \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Etudions les trois derniers postes de montage, F, G, H.

	F	G	H	
F	0	0	0	0
G	0	0	0	0
H	0	0	0	0
	0	0	0	0

Conclusion : Il n'y a aucune nécessaire postériorité entre F, G, H.

D'où le schéma final

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & B \arrow[dr] & & F \arrow[dr] & & & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & E \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & G \arrow[r] & D \arrow[r] & J \arrow[r] & I \\ & C \arrow[ur] & & H \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Cette étude montre 7 niveaux dans la chaîne de montage.

Le niveau initial ou niveau 1 constitué par A
le niveau 2 constitué par B et C BC ou CB
le niveau 3 constitué par E
le niveau 4 constitué par F, G et H FGH , GHF, HGF . . . .
le niveau 5 constitué par D
le niveau 6 constitué par J
le niveau 7 constitué par I .

A l'aide de ce tableau, on peut construire 12 chaînes de montage.

Décrire ces douze chaînes de montage.

Problèmes annexes

. Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir une et une seule chaîne de montage convenable.

. Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir toutes les chaînes de montage convenables.

On peut alors compléter cet exercice par un calcul numérique qui consiste à rechercher la chaîne la plus "économique".

Si A est rapporté à la valeur 100,

alors si B précède C, B a la valeur 89 et C la valeur 97
et si C précède B, C a la valeur 88 et B la valeur 94
E a la valeur 62.

Si H est avant G, H a la valeur 78 et G la valeur 80
G est avant H, H a la valeur 73 et G la valeur 83
F est avant G, F a la valeur 75 et G la valeur 81
G est avant F, F a la valeur 78 et G la valeur 83
F est avant H, H a la valeur 75 et F la valeur 77
H est avant F, H a la valeur 74 et F la valeur 79 .

Remarque : Le problème est très simplifié; dans la pratique la place de F dans la chaîne totale joue un rôle.

D a la valeur 48, J la valeur 81 et I la valeur 18 .

Il suffit de trouver à chaque niveau la combinaison des postes de montage la plus "économique".

Au niveau 2, 2 chaînes possibles

B suivi de C d'un coût de 186
C suivi de B d'un coût de 182 .

Au niveau 4, 6 chaînes possibles

H suivi de G suivi de F d'un coût de 78 + 83 + 79 = 240 .

En effet H est avant G et avant F, pour que ces deux conditions soient réalisées simultanément, le coût de H est le plus grand des 2 coûts possibles (78 et 74).

De même G est avant F, mais après H ; d'où son coût est le plus grand des nombres 83 et 80.

Et pour F, on effectue le même raisonnement.

On étudie de même les chaînes

H suivi de F suivi de G d'un coût de 238
F suivi de H suivi de G d'un coût de 234
F suivi de G suivi de H d'un coût de 231
G suivi de F suivi de H d'un coût de 235
G suivi de H suivi de F d'un coût de 236 .

La chaîne la plus économique est : A C B E F G H D J I

2ème exemple

Soient 7 liquides $L_1, L_2, ..., L_7$ qui doivent passer dans une canalisation les uns après les autres ; mais, à cause de la nature de ces liquides, certains de ces produits ne peuvent se succéder dans la canalisation.

On définit ainsi une relation dans l'ensemble E des liquides

" $L_i \ \mathfrak{R} \ L_j$ " signifie que " L_i ne doit pas précéder L_j ".

Le problème qu'on résoud dans les pages suivantes est de construire toutes les suites de liquides satisfaisant aux relations suivantes :

$L_1 \mathfrak{R} L_2$, $L_1 \mathfrak{R} L_4$, $L_1 \mathfrak{R} L_6$, $L_2 \mathfrak{R} L_1$, $L_2 \mathfrak{R} L_3$, $L_2 \mathfrak{R} L_7$, $L_2 \mathfrak{R} L_4$, $L_3 \mathfrak{R} L_1$, $L_3 \mathfrak{R} L_4$, $L_3 \mathfrak{R} L_7$, $L_3 \mathfrak{R} L_5$, $L_4 \mathfrak{R} L_1$, $L_4 \mathfrak{R} L_2$, $L_4 \mathfrak{R} L_5$, $L_5 \mathfrak{R} L_2$, $L_5 \mathfrak{R} L_6$, $L_5 \mathfrak{R} L_7$, $L_6 \mathfrak{R} L_1$, $L_6 \mathfrak{R} L_3$, $L_6 \mathfrak{R} L_5$, $L_7 \mathfrak{R} L_2$, $L_7 \mathfrak{R} L_4$, $L_7 \mathfrak{R} L_5$, $L_7 \mathfrak{R} L_6$.

On étudie d'abord le schéma cartésien de cette relation.

but

source

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1		X		X		X	
L_2	X		X	X			X
L_3	X			X	X		X
L_4	X	X			X		
L_5		X				X	X
L_6	X		X		X		
L_7		X		X	X	X	

Soit G le graphe de cette relation.

Soit $\overline{G}$ le complémentaire de G dans $E \times E$ privé des couples de la forme (L_1,L_1) , (L_2,L_2) , ... (L_7,L_7) .

Dressons le schéma cartésien de la relation $\mathfrak{R}'$ dans E de graphe $\overline{G}$.

but

source

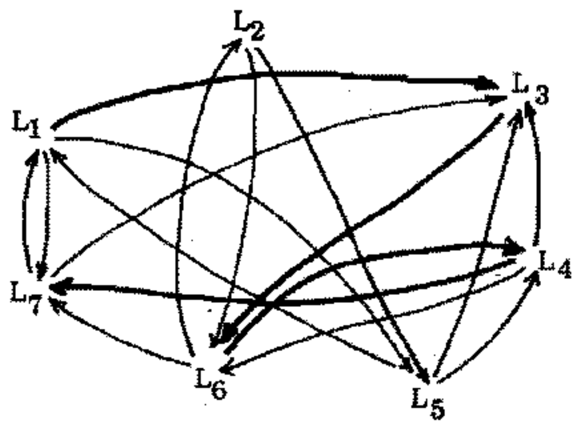
$\mathfrak{R}'$	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1			X		X		X
L_2					X	X	
L_3		X				X	
L_4			X			X	X
L_5	X		X	X			
L_6		X		X			X
L_7	X		X				

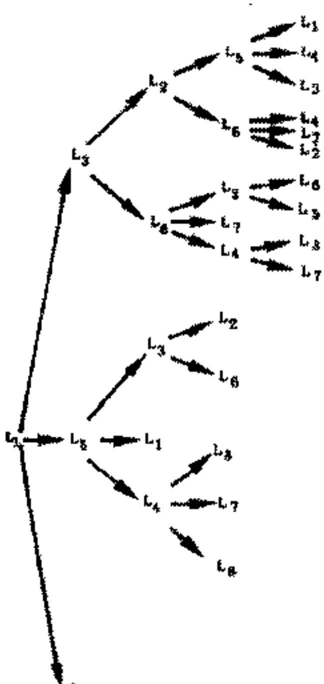
Etudions la signification de « $L_i \,\mathcal{R}'\, L_j$ ».

On prend la négation de "$L_i \,\mathcal{R}\, L_j$" c'est-à-dire la négation de "L_i ne doit pas précéder L_j" c'est-à-dire "L_i peut précéder L_j".

Introduisons une nouvelle notion, celle de chemin dans un graphe. On remarque que (L_1,L_3), (L_3,L_6), (L_6,L_4), (L_4,L_7) sont des couples éléments de $\overline{\overline{G}}$.

Sur le schéma fléché de $\overline{\overline{G}}$, ce fait se traduit par un chemin fléché d'origine L_1, d'extrémité L_7 et passant successivement par les points L_3, L_6, L_4.





Existe-t-il d'autres chemins fléchés allant de L_1 à L_7 sans passer deux fois par le même point ? L'arbre qui est cherché ci-dessous fournira la réponse.

Il y a quinze chemins allant de L_1 à L_7 .

On appelle longueur d'un chemin le nombre de couples constituant ce chemin.

Exemple : Le chemin $(L_1,L_3),(L_3,L_6),(L_6,L_4),(L_4,L_7)$ a pour longueur 4.

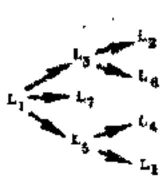
Un problème intéressant est de trouver un chemin de longueur minimale allant d'un point à un autre point.

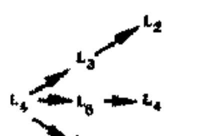
Exemple : Le chemin de longueur minimale allant de L_1 à L_7 est le chemin (L_1,L_7) de longueur un.

A l'aide de tableaux analogues aux tableaux ci-dessous, on pourra compléter la table suivante :

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1	2	2	1	2	1	2	1
L_2							
L_3							
L_4	2	2	1	2	3	1	1
L_5							
L_6							
L_7							

Longueur du chemin de longueur minimale d'origine L_1 d'extrémité L_2.



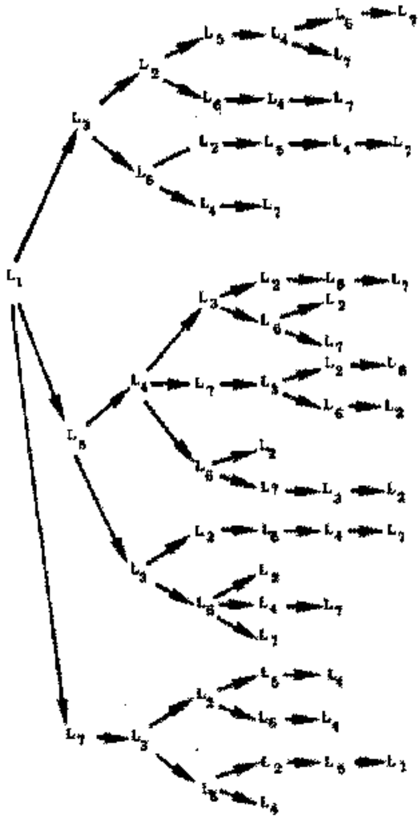


On appelle chemin élémentaire de $\overline{G}$ tout chemin passant une fois et une seule par chaque point de l'ensemble E.

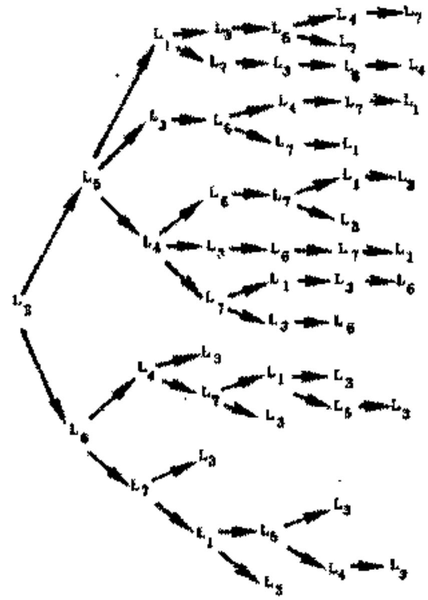
Exemple : $(L_1, L_5, L_3, L_2, L_6, L_4, L_7)$ est un chemin élémentaire.

Remarquons l'intérêt d'un chemin élémentaire dans $\overline{G}$; tout chemin élémentaire donne une solution du problème posé page 782.

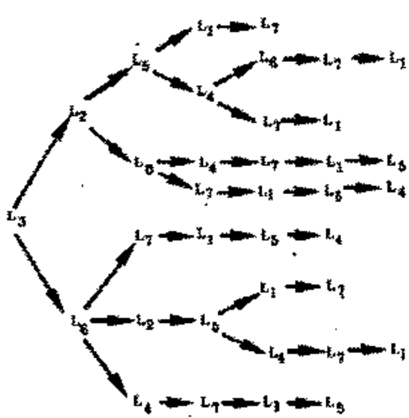
Recherche systématique de tous les chemins élémentaires de $\overline{G}$.



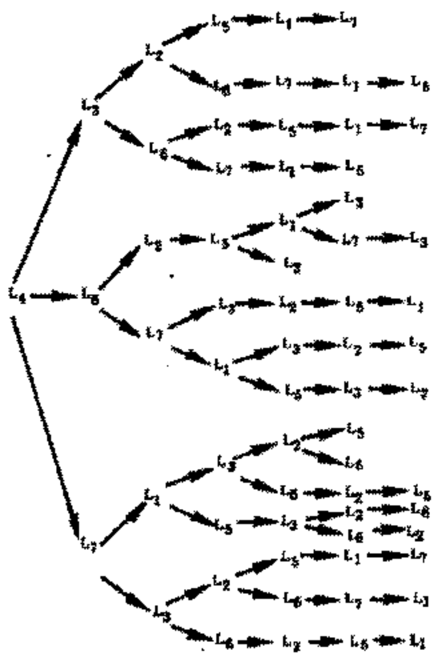
9 chemins



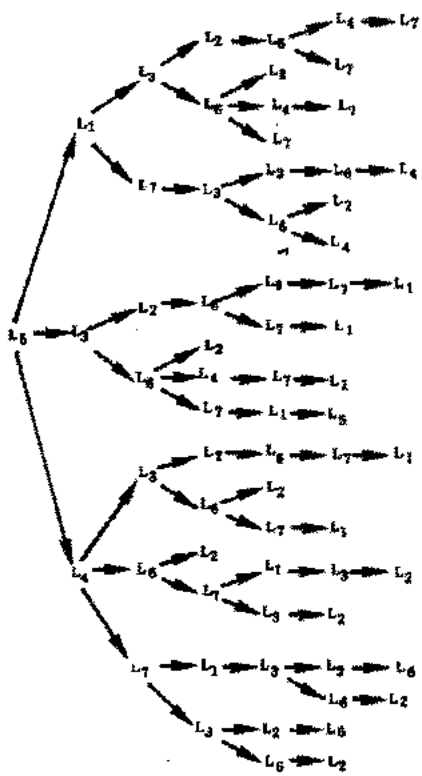
8 chemins



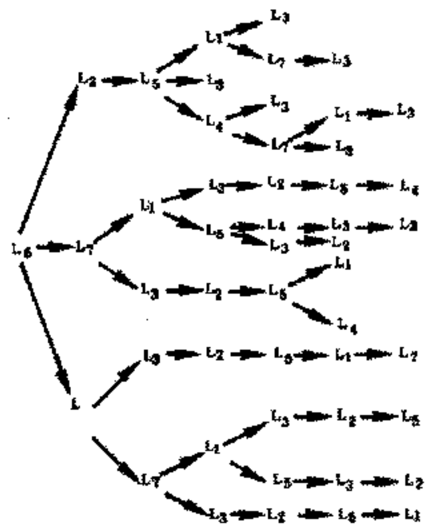
4 chemins



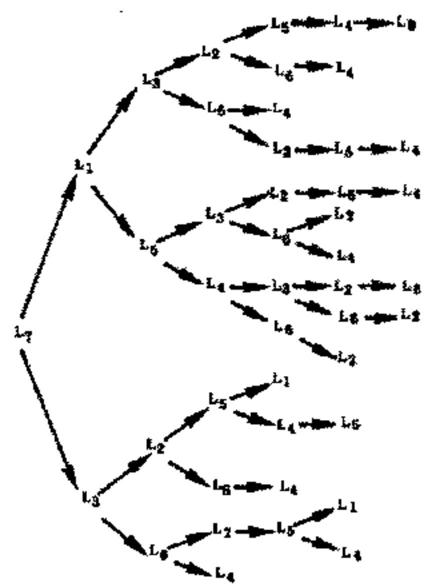
12 chemins



7 chemins



7 chemins



5 chemins

Conclusion : **Le problème posé admet 53 solutions.**