

Sur le programme de quatrième

Animateur : H. BAREIL

(Parmi les participants, un tiers environ enseigne en quatrième.)

Première partie : Exposé par LASSAVE et BAREIL

Lassave et Bareil se sont proposé, non pas de juger du bien-fondé ou non du programme actuel, mais de rechercher comment il pouvait être exploité du mieux possible.

Pour eux, il ne s'agit pas tellement de le traiter en vue de connaissances à faire acquérir (ce sera souvent un effet second, sans plus, encore que non négligeable) mais surtout en vue d'approfondir les démarches d'activités et de pensée qu'il peut mettre en jeu. Et cela pour TOUS les enfants, de type II aussi bien que de type I.

Activités permises par le programme de quatrième

1. Calcul (numérique, algébrique, vectoriel)

- Z et D sont à étudier à fond. Mais d'une part, dans la plupart des classes la construction de D se fait en pure perte, d'autre part il s'agit essentiellement de savoir manipuler à fond les nombres correspondants et de voir l'insuffisance de D.

Aussi Z et D peuvent-ils être vus, dans cet esprit, non en des "leçons" qui leur soient propres, mais à l'occasion de la révision des relations (avec le cas échéant utilisation de figures géométriques usuelles donnant lieu à des fonctions vers N ou D), et à

propos des nombreuses études expérimentales sur la droite physique.

Tout ceci peut se doubler d'exercices de calcul mental précisant ordre de grandeur et approximation.

- Les formulations littérales sont généralement sans intérêt (par exemple à propos des encadrements).
- Le calcul algébrique à propos d'exemples "concrets" est un excellent exercice déductif pourvu que l'on oblige à expliciter ce qui se fait et parfois à confronter avec le "concret" les diverses étapes du calcul.
- Les calculs explicatifs sur les quotients offrent une illustration remarquable de l'aptitude à utiliser une définition, éventuellement des équivalences, et à conjuguer des hypothèses. Il serait sage de se passer des règles le plus longtemps possible, de laisser l'élève y venir seul, puis de l'habituer à une utilisation intensive, sans vérification de N ou Z.
(Ainsi accepter $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2,5}{5} + \frac{2}{5} \dots$)
- Le vectoriel sera l'occasion d'une reprise (avec comparaison) des démarches (établissement du problème, exploration des voies possibles, ...) du calcul algébrique.
- L'un des objectifs fondamentaux de la classe de quatrième pourrait être le calcul sous toutes ses formes.

2. Activités de recherche

a) Motivations

On en trouvera à partir de situations "concrètes". (Ainsi des barres à partager, des aires de carrés, ... conduiront en "géométrie physique" à des équations du type $3x = 1$, $x^2 = \dots$).

Si plusieurs langages sont possibles, ce que l'on sait sur l'un n'oblige-t-il pas à induire un fait analogue sur l'autre ? : les élèves savent ajouter des nombres à virgule. Ceci ne les contraint-il pas à rechercher une addition des quotients? (et à en contrôler le résultat ! ...)

L'élève qui connaît une bijection de E vers F et des opérations dans E ne doit-il pas être entraîné à en induire des opérations dans F ? (On en trouvera de nombreux exemples en géométrie ...)

En géométrie de la droite, de support E, dès lors qu'il y a plusieurs bijections de E dans R, le problème du tri des bijections

intéressante peut se motiver lorsque apparaîtra l'intérêt de tel

invariant ($\overline{AB}$, ou AB , ou $\frac{AB}{CD}$, ...)

Les recherches particulières peuvent découler naturellement d'études plus générales : ainsi l'étude de l'application qui à tout point M du plan affine associe ΣMK avec $K \in \{A, B, C\}$ entraîne celle de la relation réciproque et de l'antécédent du vecteur nul ... d'où le centre de gravité ...

b) Méthodes en jeu

— *L'observation.* Ainsi, pour la droite, les diverses graduations de compteurs, les "droites" des époques historiques, géologiques, ...

— *L'effort de communication.* Comment exprimer un problème ? Pour soi, pour les autres ... ?

— *La recherche d'informations immédiates.* On peut requérir des situations analogues et en dégager une méthode de raisonnement. Ainsi x ? / $3\vec{x} = \vec{u}$, ou $3\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$, ... nous fait songer à $3x = 1$, ou ..., x étant un réel ... Quelles propriétés sont en jeu ? Quelles analogies ?

— *La conception et l'exécution d'une expérimentation.*

. Graduons diverses d'une droite et comparaisons, tracés pour Thalès, ...

. Recherche de cas particuliers plus faciles : ainsi, pour la somme de deux quotients, cas où ils ont le même dénominateur.

— *L'aptitude à l'auto-questionnement par analogie.*

Exemple : On connaît les "équations de l'addition ou de la multiplication". Par référence, l'élève ne peut-il se questionner pour une "équation du milieu" : A et M connus, existe-t-il B tel que M soit le milieu de (A, B) ? Toute la géométrie de la droite, seule ou plongée, surgit alors, et la symétrie en sortira définie sans effort.

c) Ecueils

— Demander des "démonstrations" de choses "évidentes" aux yeux de l'élève ... Ainsi "Toute droite a au moins deux points", ...

— Ou, à l'inverse, proposer des liens "évidents", alors que ce n'est pas vrai. Ainsi déduire des tris de familles de bijections (qui ignorent le caractère "régulier" des graduations) relatives à la droite mathématique à partir de manipulations du double-décimètre.

— Faire "table rase" des connaissances antérieures :

Ainsi pour D lorsqu'on prétend le construire et n'introduire l'écriture à virgule qu'en conclusion.

Et toute la géométrie est ainsi en porte-à-faux eu égard à la géométrie expérimentale connue des élèves ... En quatrième, le compas, connais pas ! .

— Ignorer les niveaux de rigueur, de langage :

Ainsi pour l'emploi du mot "droite", pour la prétention à faire de la géométrie un système déductif complet au lieu de se contenter d'ilôts de déductions ...

3. Modélisation

On la trouve en géométrie à propos de la droite et du plan.

Seulement le modèle du plan affine se déduit d'une réalité au moyen d'une expérimentation. Il faudrait plusieurs réalités. D'autre part le modèle affine manque d'intérêt pour les élèves qui ont l'habitude du métrique.

Alors que les illustrations du modèle sont très variées (par exemple pour la droite mathématique "non plongée" on peut avoir des ensembles-supports à partir de matrices, de figures géométriques variées, ...) les difficultés propres à l'âge des élèves — et les applications pratiques ultérieures — incitent à des diagrammes "techniques" bourrés de conventions supplémentaires, d'ordre métrique notamment. Ainsi ces diagrammes sont-ils trop particuliers. Que ne disait-on pas autrefois à un élève qui faisait ainsi des figures plus particulières que ne les donnaient les énoncés ? Et bien, nous mettons constamment les élèves de quatrième dans ce travers ...

4. Activités de traduction

La géométrie de quatrième apparaît souvent comme une affaire de définitions, de vocabulaire. Mais elle peut apparaître aussi comme une langue vivante à multiples facettes. Un objectif de la classe de quatrième pourrait être de savoir passer d'une expression à une autre (langage affine, vectoriel, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ...). Ainsi pour traduire un alignement de points, le fait d'être le milieu, etc ...

De même pour les isomorphismes (de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(a^n, \times)$, de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{U}, +)$, ...), en montrant comment une opération dans un ensemble induit une opération dans l'autre. (La composition des translations induit l'addition des vecteurs, et celle-ci peut induire une addition de points ...)

5. Activités de classement et d'organisation

On les trouve à propos des relations, des valeurs approchées ...

Les bipoints et vecteurs sont l'occasion d'un retour sur les relations d'équivalence et les partitions.

Les études sur la droite conduisent à des relations d'ordre.

Et l'on peut, en quatrième aussi, trouver des exemples d'initiation à la programmation (calculs de sommes, de factorielles, de moyennes, ... résolution de " $ax = b$ ", ...) avec "boucles" ou sauts conditionnés.

6. Activités d'extension

— Par exemple pour l'extension du sens de a^n (avec le problème de 0^0), avec les diverses extensions de $(a+b)^2$, ...

— La symétrisation de N pour l'addition donnait Z .

A partir de D , on recherche une nouvelle extension. Il est formateur d'insister sur les principes mis en jeu, les problèmes soulevés (compatibilité, avec l'extension, des lois déjà définies, de l'ordre, ...).

Par contre Q , d'ailleurs hors-programme, paraît sans intérêt.

Les calculs sur les "quotients" sont beaucoup plus avantageux que ceux sur les "fractions" ... et les englobent.

7. Montée dans l'échelle des types

On retrouve en quatrième des exemples d'obtention d'opérations sur des classes d'équivalence à partir d'opérations sur leurs représentants. (Ainsi pour les "vecteurs géométriques").

Des opérations sur R , on voit comment passer à des opérations sur $R \times R$.

Surtout, ce qui est nouveau, d'opérations sur des nombres on passe à des opérations sur des fonctions.

Enfin, il est inutile ici d'insister sur l'intérêt, perçu par tous, de bien dégager en quatrième la structure de groupe.

8. Exercices de logique

Sans qu'il soit indispensable de faire expressément des "leçons" là-dessus, les exercices de logique, de raisonnement logique, sont évidemment présents partout ... Il est du plus haut intérêt de s'attacher aux règles de logique mises en oeuvre plus qu'aux conclusions des études !

9. Activités de "critique"

— Contrôle, approximatif, (calcul mental, dessin) d'un résultat.

— Distinction entre le problème de l'existence d'un être mathématique et celui de sa détermination. (Tant que je suis dans D , je n'ai

pas de nombre x tel que $3x = 1$. Pourtant, en base trois, je sais déterminer x).

- Distinction entre le problème de la détermination (mathématique) d'un être mathématique et celui de sa représentation.

Ainsi deux points distincts A et B étant donnés, la droite-support (AB) existe et est unique et, pour une bijection sur R , le milieu de (A,B) existe et est unique. Mais sans conventions supplémentaires je ne sais ni tracer la droite-support, ni placer le milieu ...

10. Conclusions.

Il faudrait essayer de déceler les activités fondamentales de l'esprit et s'attacher d'abord à leur exercice et à leur épanouissement pour TOUS les élèves.

Mais plus les élèves sont faibles, plus les difficultés propres au programme de quatrième apparaissent réhibitoires ...

Deuxième partie : Questions et discussion

- Avec le nouveau programme de géométrie, on gagnerait en honnêteté intellectuelle s'il pouvait être compris, si sa démarche l'était. Or en général il n'en est rien — ou si peu —.

Il faudrait donc s'attacher à ne pas saturer les élèves, quitte à admettre autant de déductions que nécessaire ?

- La définition de la droite mathématique peut être introduite progressivement : par exemple on peut dire simplement d'abord qu'elle est un ensemble muni d'une bijection sur R . (avec une infinité de bijections possibles). Si, ultérieurement, se pose le problème de tel invariant on verra les diverses bijections pouvant remplacer la première ...
- Si l'on veut traiter ce programme de quatrième en préservant l'initiative des élèves et leur contribution, ou même simplement en leur laissant le temps de l'assimilation, il est impossible de le traiter en entier.
- Et cela ne semble pas davantage possible pour les années à venir, en dépit des progrès certains dus au rodage ...
- Le programme est dur pour les élèves faibles ou simplement moyens ...

Il semble en outre à l'expérience qu'il se prête peu à une bonne initiation au raisonnement déductif (démonstrations non motivées, car résultats évidents, en géométrie par exemple, ou trop difficiles car demandant, par exemple, une connaissance approfondie du calcul algébrique ...).

Bulletin de l'APMEP n°285 - Septembre 1972

- **Quels sont donc les objectifs d'une éducation mathématique en classe de quatrième ?**
- **Tout ceci débouche sur des options fondamentales (cf. Charte de Caen et travaux de la Commission A.P.M. 1er cycle ...).**