Les opérateurs numériques

Animateur : M. ROBERT

Les opérateurs numériques étudiés sont des fonctions de N vers N définies par le moule

$$\ldots\ldots * n = \ldots\ldots$$

n étant un naturel quelconque, et $*$ désignant l'une des quatre opérations dans N : addition, soustraction, multiplication, division. S'il s'agit de la division, on opère dans $N^* = N - \{O\}$.

L'opérateur est noté $\overset{*}{n}$.

1 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de l'addition*

$$O_+ = \{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3} \ldots\}$$

La loi composition de deux opérateurs est une loi de composition interne dans O_+, on la désigne par $\top$

$$\overset{+}{n} \top \overset{+}{p} = \overset{+}{\overline{n+p}}$$

2 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la soustraction*

$$O_- = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans O_-

$$\bar{n} \top \bar{p} = \overset{-}{\overline{n+p}}$$

3 — *Réunion de ces deux ensembles*

$$O_+ \cup O_- = \{\ldots\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \overset{\pm}{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots\}$$

Dans cet ensemble le composé de la forme $\bar{n} \top \bar{p}$ est toujours défini.

Mais le composé de la forme $\bar{n} \top \overset{+}{p}$ n'est pas défini $\begin{pmatrix}\bar{n} \neq \overset{\pm}{0}\\ \overset{+}{p} \neq \overset{\pm}{0}\end{pmatrix}$. C'est une fonction qui n'appartient pas à l'ensemble considéré.

— En "agrandissant" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux composés on montre que $\top$ est une loi de composition interne dans le nouvel ensemble Ω

— On introduit dans Ω une relation d'équivalence $\mathcal{R}$:
Deux éléments de Ω sont équivalents s'il existe un naturel q tel qu'ils donnent la même image à tout naturel $x \geqslant q$.
Ω est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\{\overset{+}{1}, \bar{1} \top \overset{+}{2}, \quad \bar{2} \top \overset{+}{3}, \ldots\}$$

La relation d'équivalence est compatible avec la loi $\top$. On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en modifiant le sens de ce mot. La loi de composition est alors la loi induite par $\top$ sur les classes. C'est une loi de composition interne dans l'ensemble $\frac{\Omega}{\mathcal{R}}$, qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à $(Z, +)$.

4 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la multiplication*

$$O_{\times} = \{\overset{\times}{0}, \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans $O_{\times}$, il en est de même dans

$$O^{*}_{\times} = \{\overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

5 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la division*

$$O^{*}_{:} = \{\overset{:}{1}, \overset{:}{2}, \overset{:}{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans $O^{*}_{:}$

6 — *Réunion des ensembles* $O^{*}_{\times}$ et $O^{*}_{:}$

$$O^{*}_{\times} \cup O^{*}_{:} = \{\ldots \overset{:}{3}, \overset{:}{2}, \overset{\times}{\overset{:}{1}}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

Le composé de la forme $\overset{\times}{n} \top \overset{:}{p}$ n'est défini que si un des naturels n ou p est multiple de l'autre.

S'il n'en est pas ainsi, le composé $\overset{\times}{n} \top \overset{:}{p}$ est un nouvel opérateur n'appartenant pas à l'ensemble précédent.

Il est noté $\overset{\times}{\frac{n}{p}}$.

Le composé $\overset{\times}{\frac{6}{4}}$ désigne la même fonction que $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$. Donc

$$\overset{\times}{\frac{6}{4}} = \overset{\times}{\frac{3}{2}} \text{ et plus généralement } \overset{\times}{\frac{3}{2}} = \overset{\times}{\frac{3\,k}{2\,k}},\ k \in N^{*}$$

Nous ne garderons pour cet opérateur que la notation : $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$

"Agrandissons" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux opérateurs :

$$\Omega = \{\overset{:}{\overset{\times}{1}}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots \overset{:}{2}, \overset{:}{3}, \ldots, \overset{\times}{\frac{2}{3}}, \overset{\times}{\frac{2}{5}}, \overset{\times}{\frac{2}{7}}, \ldots, \overset{\times}{\frac{3}{2}}, \overset{\times}{\frac{3}{4}}, \overset{\times}{\frac{3}{5}}, \ldots\}$$

Dans cet ensemble un composé du type $\overset{\times}{n} \top \overset{:}{p}$ est toujours défini.

De plus $\overset{:}{2} \top \overset{\times}{3} = \overset{\times}{3} \top \overset{:}{2}$

Mais le composé $\overset{:}{4} \top \overset{\times}{6}$ n'est pas défini. Il en est ainsi pour tout composé de la forme $\overset{:}{n} \top \overset{\times}{p}$ lorsque les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Les composés $\overset{\times}{\frac{n}{p}} \top \overset{:}{q}$ et $\overset{\times}{q} \top \overset{\times}{\frac{n}{p}}$ sont toujours définis. Mais les composés

$\overset{\times}{\frac{n}{p}} \top \overset{\times}{q}$, $\dot{q} \top \overset{\times}{\frac{n}{p}}$, $\overset{\times}{\frac{n}{p}} \top \overset{\times}{\frac{q}{r}}$ ne sont en général pas définis.

Ainsi

$$\overset{\times}{\frac{3}{4}} \top \overset{\times}{\frac{4}{3}} \text{ n'est pas défini}$$

Remarque

Nous ne rencontrons pas l'écriture "$\frac{3}{2}$". Appellerons-nous "fraction" l'opérateur $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$?

Si nous avons $\overset{\times}{\frac{3}{2}} : 4 \mapsto 6$

dirons-nous que la "fraction $\frac{3}{2}$" donne à 4 pour image 6 ?

Pourrons-nous dire que 6 est le "produit" de 4 par la "fraction $\frac{3}{2}$" ?

Ce serait parler d'une opération inconnue faisant intervenir un "nombre" inconnu !

Par convention, nous pouvons écrire l'expression $(4 \times 3) : 2$ sous la forme abrégée $4 \times \frac{3}{2}$, mais alors ce signe "$\times$" n'est pas un signe de multiplication.

D'autre part, nous pouvons appeler "produit" le composé, s'il existe, de deux éléments de Ω par $\top$. Mais désigner cette opération dans Ω par "$\times$" paraît une grave confusion entre une opération sur les naturels et une opération sur les fonctions.

De toutes façons, l'expression "produit de deux fractions" est généralement dépourvue de sens dans Ω.

7 — On peut "agrandir" l'ensemble Ω par l'introduction des opérateurs du type

$$\dot{n} \times \overset{\times}{p}$$

pour lesquels les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Nous obtenons ainsi un nouvel ensemble Ω' dans lequel :

a) $\top$ est une loi de composition interne ;

b) on peut introduire une relation d'équivalence $\mathcal{R}$: deux éléments de Ω' sont équivalents s'il existe un naturel p tel qu'ils donnent la même image à tous les multiples de p. Ω' est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\left\{ \overset{\times}{\frac{2}{3}},\ \overset{:}{6} \top \overset{\times}{4},\ \overset{:}{9} \top \overset{\times}{6},\ \ldots \right\}$$

c) la relation d'équivalence est compatible avec la loi $\top$. On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en changeant le sens de ce mot. La loi de composition de ces nouveaux “opérateurs” est alors la loi induite par T sur les classes. C’est une loi de composition interne dans l’ensemble $\Omega'/\mathfrak{R}$, qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à celui des rationnels strictement positifs muni de la multiplication.

Conclusion

Il est souhaitable de ne pas utiliser le mot “fraction” dans l’enseignement élémentaire, de se borner à l’étude des opérateurs n ou n, de la composition de deux opérateurs de même type et, dans quelques cas précis, de la composition de deux opérateurs de types différents.

Opérateurs numériques (suite)

Rapporteurs : Janine TOUPIN et Alain BOUVIER

Pendant et après l'exposé de Madame ROBERT, s'établit une discussion générale entre les participants.

Les participants sont d'accord avec Madame Robert, pour conclure à l'impasse de la construction présentée puisqu'elle ne permet pas de retrouver le corps des nombres rationnels ($2/3 \times 3/2 \neq 1$).

La lourdeur de cette construction la condamne du point de vue pédagogique ; cette "pseudo-théorie", ne reposant en outre sur aucun fondement mathématique, apparaît comme particulièrement dangereuse.

Dans l'étude et l'exploitation des opérateurs numériques, certains suggèrent d'aborder les restrictions de ces opérateurs, ces dernières étant définies sur une partie de N.

Le problème du recyclage a été soulevé. Les instituteurs présents témoignent de leur inquiétude. Tous s'accordent à trouver ridicule le stage de six mois et jugent indispensable la formation permanente.

Les "recycleurs" sont ainsi amenés à poser les questions suivantes :

— Doit-on bloquer ce stage ?

— Faut-il donner un certain savoir ou traiter de façon prioritaire certains sujets auxquels les recyclés sont sensibles ? par exemple, le signe d'égalité ?