

La géométrie

Animateur : GUINET (E.N.G. Evreux)

Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés classiques des carrés magiques, puis certaines propriétés géométriques moins connues, qui ont donné lieu à des applications au C.M. 2.

Rappelons qu'un carré magique est un tableau carré de nombres généralement naturels tel que la somme en ligne, colonne, diagonale, est partout la même.

On appellera cette somme : la somme magique.

Si les diagonales ne sont pas magiques, on dira que le carré est *semi-magique*.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons, sauf indication contraire, que les carrés magiques dont les éléments sont les termes d'une progression arithmétique.

I — Voici quelques propriétés algébriques générales que nous ne démontrerons pas, pour des raisons évidentes.

C_n est un carré magique de "côté" n formé des termes de la suite $1, 2, \dots, n^2$.

Si S_n désigne la somme magique, il est clair que :

$$S_n = \frac{1 + 2 + \dots + n^2}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Ainsi $S_3 = 15$, $S_4 = 34$, $S_5 = 65$.

Si on ajoute un même entier a à tous les termes d'un carré magique C_n , le carré obtenu est encore magique.

Dans ce cas, la somme magique est : $S'_n = S_n + na$

Si on multiplie chaque terme d'un carré magique par un entier k , on obtient un carré magique et la somme magique est : $S'_n = k.S_n$

Il s'ensuit, de tout ce qui précède, que si C_n désigne un carré magique dont les termes sont $1, 2, \dots, n^2$, on obtient un carré magique en remplaçant chacun de ses termes par ceux d'une suite arithmétique $u_1, u_2, \dots, u_{n^2}$.

Dans ce cas, la somme magique devient :

$$S = \frac{(u_1 + u_{n^2})}{2} n$$

Si on "ajoute" deux carrés magiques de même ordre, on obtient un carré magique de somme magique $S + S'$.

Remarque : Si on considère l'ensemble des carrés magiques d'ordre n construits sur Z , on obtient un Z -module.

Nous avons essayé au C.M.2, de faire découvrir et surtout expliquer certaines des propriétés ci-dessus.

Voici un des exemples que nous avons proposés.

Je passe sous silence les remarques des élèves qui prouvent combien le raisonnement était construit.

Nous avons donné le tableau :

			12
	4		15
	13	11	
		10	x

Nous avons supposé que la somme magique est 34. La croix (x) désigne le nombre cherché en premier. Ceci a amené, compte tenu de la somme magique, les élèves à décomposer certains nombres en somme de deux nombres, ce qui a donné les couples :

(1,6), (2,5), (~~3,4~~) en colonne (4ème)
 (16,3), (~~15,4~~), (14,5), (~~13,6~~), (12,7) en diagonale.

5 est le seul compatible etc ...

Il faut veiller à ce que les élèves ne soient pas tentés de trouver les nombres au hasard.

Nous avons ajouté 5 à chacun des termes du carré magique obtenu et demandé la remarque s'imposant ainsi que l'explication.

Nous avons multiplié par 3 chacun des termes, puis ajouté les deux tableaux.

Les remarques concernant les propriétés ci-dessus font évidemment appel aux propriétés de l'addition et de la multiplication.

II — Construction des carrés magiques

Il n'existe pas de procédés simples et généraux, sauf peut-être en ce qui concerne les carrés semi-magiques, pour engendrer des carrés magiques d'ordre quelconque.

Voici deux méthodes :

1. Méthode due à Bachet de Méziriac (écrivain des 16ème et 17ème siècles à qui l'on doit : Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres) et valables uniquement pour les carrés d'ordre impair.

Nous allons construire un carré d'ordre 5 ($S_5 = 65$).

On écrit la suite naturelle de 1 à 25 dans le "moule" ci-dessous à gauche, les nombres entrant dans le cadre se trouvent placés.

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	6	13	21	9
10	18	1	14	22
23	5	19	2	15

Par simple déplacement des éléments extérieurs au cadre vers les cases vides, on obtient le carré magique ci-dessus à droite.

2. Méthode due à La Hire, mathématicien français des 17^{ème} et 18^{ème} siècles, applicable à la construction des carrés magiques d'ordre impair ou multiple de 4.

En ce qui concerne les carrés d'ordre pair non multiples de 4, il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode simple.

La méthode repose sur le principe suivant :

Etant donné la suite naturelle $\{u_n\} = \{1, 2, \dots, n^2\}$ et les suites arithmétiques :

$$\begin{aligned} \{v_n\} &= \{1, 2, \dots, n\} \\ \{s_n\} &= \{0, n, 2n, \dots, (n-1)n\} \end{aligned}$$

il est évident que chacun des termes de la suite $\{u_n\}$ peut être obtenu par addition d'un terme de la suite $\{v_n\}$ avec un terme de la suite $\{s_n\}$.

Ainsi, on est amené à construire deux carrés magiques d'ordre n , le premier étant constitué des éléments de la suite $\{v_n\}$, chaque élément étant répété n fois, le second formé de la même manière par les éléments de la suite $\{s_n\}$. Par "addition" de ces deux carrés magiques, on obtient un carré magique d'ordre n dont les termes sont ceux de la suite $\{u_n\}$, à condition qu'il n'y ait pas de répétition.

Voici deux exemples :

a) Carré d'ordre 4

On va construire deux carrés magiques :

le premier avec les termes de la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ et le second avec les termes de la suite $\{0, 4, 8, 12\}$.

Le carré 1 est construit de la manière suivante :

dans la première ligne, on inscrit la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ dans n'importe quel ordre, dans la deuxième ligne on écrit la suite dans l'ordre inverse. La troisième ligne s'obtient en permutant les deux premiers termes de la

première ligne, puis les deux derniers termes. La quatrième ligne s'obtient en écrivant la troisième dans l'ordre inverse.

Le carré II se construit de la même façon, mais par un balayage vertical et non horizontal.

Le carré III est magique d'ordre quatre.

4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2
2	3	4	1

I

0	8	12	4
12	4	0	8
4	12	8	0
8	0	4	12

II

4	9	14	7
15	6	1	12
5	16	11	2
10	3	8	13

III

b) Carré d'ordre 5

On va construire deux carrés à partir des suites $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{0, 5, 10, 15, 20\}$.

Le carré IV est construit de la manière suivante :

On écrit dans la première ligne la suite 1, 2, 3, 4, 5 dans un ordre quelconque. La seconde ligne est obtenue par une permutation circulaire de la première ligne à partir du troisième terme. On répète ce procédé jusqu'à la dernière ligne.

Le carré V s'obtient de la même façon, mais par une permutation circulaire sur les colonnes ou bien par une permutation sur les lignes, mais à partir du quatrième terme.

4	5	3	2	1
3	2	1	4	5
1	4	5	3	2
5	3	2	1	4
2	1	4	5	3

IV

10	0	5	20	15
20	15	10	0	5
0	5	20	15	10
15	10	0	5	20
5	20	15	10	0

V

14	5	8	22	16
23	17	11	4	10
1	9	25	18	12
20	13	2	6	24
7	21	19	15	3

VI

III — Procédé géométrique

Les propriétés géométriques de certains tableaux de nombres sont beaucoup moins connues que les propriétés algébriques, mais au moins aussi intéressantes.

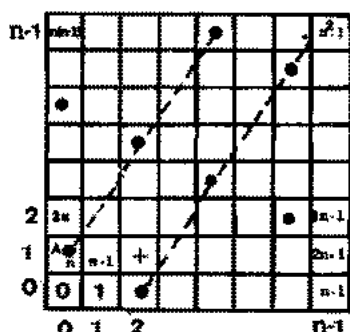
Afin de démontrer ces propriétés, nous allons donner un certain nombre de définitions.

Considérons un carré de côté n et numérotions les colonnes et les lignes de 0 à $n-1$.

Ainsi, la case indiquée par une croix (+) a pour coordonnées $(2,1)$.

Par analogie à la géométrie, nous parlerons de droite, vecteur, direction, etc ...

Au lieu de case, nous dirons point.



Corollaire 2

Dans les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le naturel b , les restes de la division par n de la suite $b, b + a p, \dots, b + (n-1)a p$, sont dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Considérons dans un carré de côté n (n premier) la case de coordonnées (α, β) et une direction de vecteur $\vec{u}(a, b)$.

La droite passant par (α, β) de direction $\vec{u}$ est l'ensemble :
 $(\alpha, \beta) ; (\alpha + a, \beta + b) ; (\alpha + 2a, \beta + 2b) ; \dots ; (\alpha + pa, \beta + pb) ; \dots ; (\alpha + (n-1)a, \beta + (n-1)b)$
 chacun des éléments étant divisé euclidiennement par n , on obtient :
 $(a_1, b_1) ; (a_2, b_2) ; (a_3, b_3) ; \dots ; (a_{p+1}, b_{p+1}) ; \dots ; (a_n, b_n)$.

D'après le corollaire 2, chacun des a_i et b_i ($1 \leq i \leq n$) est dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$ si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

La case (a_i, b_i) est occupée par le naturel $a_i + n b_i$. Faisons la somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n b_i) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i + n \sum_{i=1}^n b_i$$

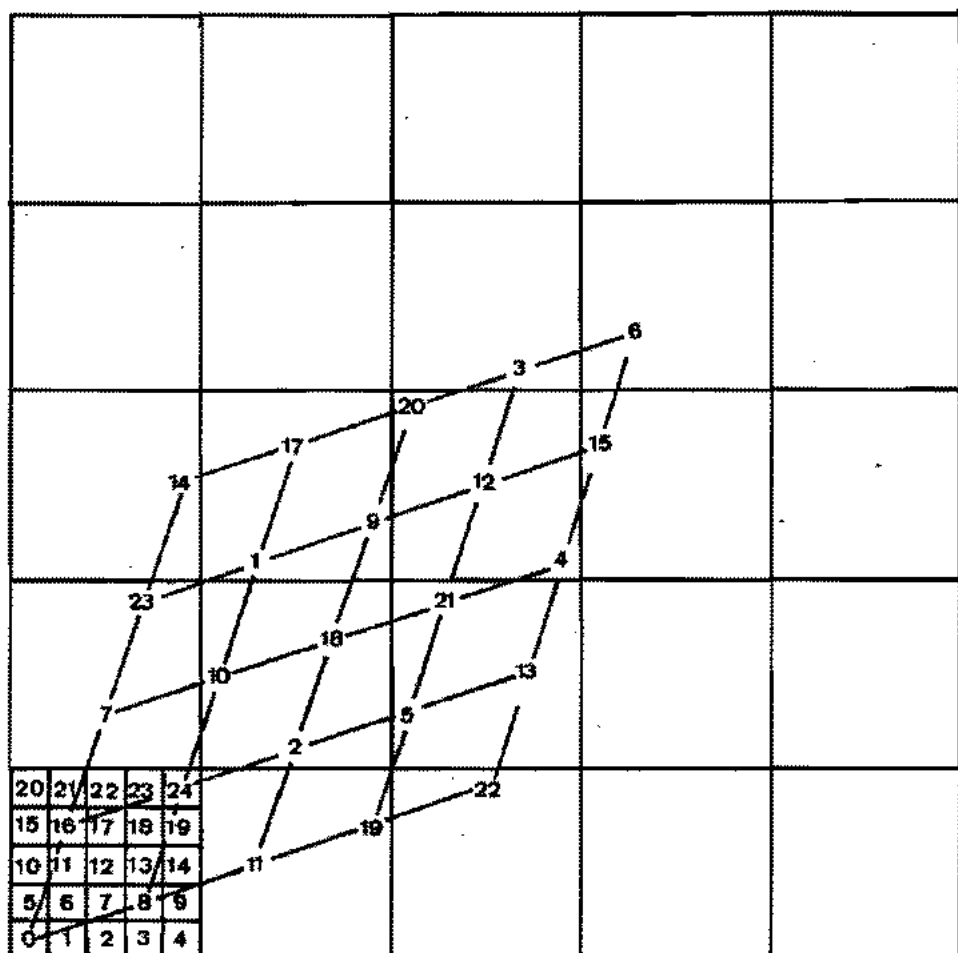
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n b_i) &= (1 + 2 + \dots + n-1) + n(1 + 2 + \dots + n-1) \\ &= \frac{n(n^2-1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui montre que la direction (a, b) , si $ab \neq 0$, est une direction magique.

A partir de cette propriété remarquable, on peut construire un carré magique d'ordre n premier par un procédé géométrique.

En effet, il suffit de prendre un point et un vecteur $\vec{u}(\frac{a}{b})$ ($ab \neq 0$) et le vecteur $\vec{u}'(\frac{b}{a})$ (ces deux vecteurs étant de directions symétriques par rapport à la diagonale), et de "développer" le carré selon ces deux directions et à partir du point choisi.

Au niveau du CM.2, ceci se présente comme un déplacement sur un quadrillage infini où le carré de côté n se reproduit indéfiniment.



14	17	20	3	6
23	1	9	12	15
7	10	18	21	4
16	24	2	5	13
0	8	11	19	22

On a choisi ici $a = 3$, $b = 1$.

Remarque : Il est possible de développer le carré symétriquement par rapport à une des deux médianes qui sont magiques, le carré obtenu aura une diagonale non magique, sauf si on fait en sorte que le centre du carré initial se transforme en le centre du carré final.

Dans la figure ci-dessous la diagonale secondaire est non magique.

