vectoriel, adj. 1972-1/3

Le sens originel "relatif à des vecteurs", "qui est de la nature des vecteurs" a eu une signification propre tant que *vecteur* désignait une notion géométrique bien déterminée, le "segment de droit orienté" tenu pour inséparable de sa direction. Mais à présent c'est à la notion d'*espace vectoriel*, devenue fondamentale, qu'il convient de rattacher les autres expressions [VECTEUR]. Noter que certains n'hésitent pas à dire *vectoriel* tout court pour "espace vectoriel" ; mais l'usage se répand de dire *espace linéaire* (angl. *linear space*).

1. Espace vectoriel.

1.1. Soit $(K,+,.)$ un corps, désigné en abrégé par K, dont 0 est l'élément nul et 1 l'élément unité ; soit $(E, \hat{+})$ un groupe commutatif, et 0_E son élément neutre ; soit enfin une loi externe, application de KxE dans E, notée $(\lambda,x) \mapsto \lambda \,\hat{\cdot}\, x$, ces diverses lois étant soumises à la condition

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x,y) \in E^2, \qquad \bigwedge \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \,\hat{\cdot}\, x = (\lambda \,\hat{\cdot}\, x) \,\hat{+}\, (\mu \,\hat{\cdot}\, x) \\ \lambda \,\hat{\cdot}\, (x \,\hat{+}\, y) = (\lambda \,\hat{\cdot}\, x) \,\hat{+}\, (\lambda \,\hat{\cdot}\, y) \\ \lambda \,\hat{\cdot}\, (\mu \,\hat{\cdot}\, x) = (\lambda \,.\, \mu) \,\hat{\cdot}\, x \\ \quad 1 \,\hat{\cdot}\, x \;\; = x \end{array}$$

Alors $(E, \hat{+}, \hat{\cdot}, K)$ est dit un *espace vectoriel* sur K ou un K-*espace vectoriel* (si $K = \mathbf{R}$, on dit : espace vectoriel réel ; si $K = \mathbf{C}$, on dit : espace vectoriel complexe). Les éléments de K sont dits les *scalaires* de l'espace, les éléments de E les *vecteurs* de l'espace, ces mots n'ayant de sens que par la distinction qu'ils introduisent entre les rôles des éléments des deux ensembles d'un même espace. Par un abus de langage constant et commode on désigne souvent par la même lettre (ici E) l'espace vectoriel et l'ensemble de ses vecteurs, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à redouter.

1.2. *Remarques :*

1. Bien que le système d'axiomes ci-dessus soit un des plus usuels, il n'est pas le seul utilisé. De toute façon on a les propriétés :

$$\forall x \in E, \quad 0 \mathbin{\hat{\cdot}} x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in K, \quad \lambda \mathbin{\hat{\cdot}} 0_E = 0_E$$
$$\forall x \in E, \quad (-1) \mathbin{\hat{\cdot}} x = -x$$

2. La loi $\hat{+}$ est l'addition vectorielle, dans la pratique notée souvent par un simple + comme l'addition des scalaires ; 0_E est le vecteur nul, souvent noté aussi 0 comme le scalaire nul ; la loi $\hat{\cdot}$ est la multiplication externe, souvent notée par simple juxtaposition comme la multiplication interne sur K. Il en résulte un allègement de l'écriture, mais qui ne doit pas inciter à confondre scalaires et vecteurs.

3. Du fait que les vecteurs se sont introduits comme vecteurs-translations opérant sur un espace affine, la notation $\overrightarrow{AB}$ est devenue traditionnelle pour désigner le vecteur-translation qui amène un point A sur un point B de l'espace affine. Mais l'emploi systématique de la flèche suscrite à une lettre unique (comme v) n'a pas de justification profonde, et l'on tend à s'en affranchir (sauf, parfois, pour certaines lettres qui peuvent prêter à confusion comme i ; mais il vaudrait mieux changer de lettre).

1.3. *Exemples :*

1. L'ensemble F des applications de **R** dans **R**, avec l'addition et la multiplication définies par :
$\forall x, \quad (f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x) \quad$ et $\quad \forall x, \forall \lambda, (\lambda \mathbin{\hat{\cdot}} f)(x) = \lambda f(x)$
est un espace vectoriel réel.

2. Plus généralement l'ensemble des applications d'un ensemble quelconque E dans un K-espace vectoriel est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur K quand on pose :

$$\forall x \in E \quad (f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K \quad (\lambda \mathbin{\hat{\cdot}} f)(x) = \lambda f(x)$$

3. L'ensemble P des polynomes à une indéterminée sur un corps K, muni de l'addition des polynomes et de la multiplication d'un polynome par un élément de K, est un K-espace vectoriel.

4. L'ensemble V des translations sur un espace affine réel, muni de la composition des translations et de la multiplication par un réel, est un **R**-espace vectoriel.

5. K étant un corps, si l'on définit sur K^n une addition par

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \hat{+} (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

et une multiplication externe par

$$\lambda \hat{\cdot} (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n),$$

K^n est un K-espace vectoriel ; en particulier tout corps est un espace vectoriel sur lui-même (ses éléments étant alors aussi bien vecteurs que scalaires). Mais on prendra garde que **C** par exemple peut donner naissance à (**C**,+,.,**C**), qui est un espace vectoriel *complexe* (habituellement noté **C**), et à (**C**,+,.,**R**), qui est un espace vectoriel *réel* qu'il ne faut pas confondre avec le précédent.

6. Etant donné un groupe V commutatif, s'il existe dans l'anneau de ses endomorphismes un sous-anneau K qui soit un corps, alors V est un K-espace vectoriel.

1.4. *Espace vectoriel topologique :* espace vectoriel réel ou complexe, muni d'une topologie pour laquelle les applications $(x,y) \mapsto x \hat{+} y$ et $(\lambda,x) \mapsto \lambda \hat{\cdot} x$ sont continues.

Espace vectoriel normé, espace vectoriel euclidien, etc.

[NORMÉ, EUCLIDIEN, HERMITIEN, HILBERTIEN].

2. Sous-espaces vectoriels.

2.1. Soit $(E, \hat{+}, \hat{\cdot}, K)$ un K-espace vectoriel. Si E' est une partie non vide de E, *stable* pour les lois $\hat{+}$ et $\hat{\cdot}$ (c'est-à-dire si : $\forall x \in E', \forall y \in E', \forall \lambda \in K, x \hat{+} y \in E'$ et $\lambda \hat{\cdot} x \in E'$), on démontre que E', muni des lois induites par les précédentes est un espace vectoriel ; et l'on dit que E' est un *sous-espace vectoriel* de E. Tout espace vectoriel E admet pour sous-espaces triviaux lui-même et $\{0_E\}$.

On montre que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E ; cela n'est pas vrai en général de la réunion.

Exemples et contre-exemples. Reprenons les quatre premiers exemples [1.3] :

1. L'ensemble des applications de **R** dans **R** continues est un sous-espace de F ; l'ensemble des applications de **R** dans **R** croissantes n'en est pas un.

2. Tous les espaces vectoriels fonctionnels sont des sous-espaces d'espaces vectoriels du type décrit à l'exemple 2.

3. L'ensemble des polynomes de P, de degré au plus égal à 5, est un sous-espace de P ; l'ensemble des polynomes de P, de degré 5, n'en est pas un.

4. L'ensemble V_2 (resp. V_1) des translations qui laissent invariant un plan P donné (resp. une droite D donnée) est un sous-espace vectoriel de V (V_1 est d'ailleurs un sous-espace vectoriel de V_2 si D est parallèle à P). En revanche, le sous-ensemble de V réduit à une translation non nulle n'en est pas un.

2.2 *Treillis des sous-espaces vectoriels.* On démontre que l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné est un treillis [TREILLIS].

2.3 *Sous-espaces supplémentaires* [SUPPLÉMENTAIRE]

3. Autres expressions.

3.1. *Multiplication vectorielle ; produit vectoriel.* Dans un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3, on appelle *multiplication vectorielle* la loi de composition interne qui à tout couple de vecteurs (u, v) associe le vecteur *p* usuellement défini comme suit : a) si *u* et *v* sont linéairement dépendants, *p* est nul ; — b) si *u* et *v* sont linéairement indépendants, *p* est orthogonal à *u* et *v*, de sens tel que le triplet (u,v,p) soit direct, et a pour longueur $|u|.|v|. \sqrt{1 - \cos^2 (u,v)}$, c'est-à-dire encore $\sqrt{|u|^2 .|v|^2 - (u\,|\,v)^2}$, où (u|v) désigne le produit scalaire de *u* et de *v* (on rappelle à ce propos que dans l'espace euclidien on peut définir le cosinus d'un couple de vecteurs dont aucun n'est nul, mais que, si leur plan n'est pas orienté, le sinus du couple ne peut être défini sans ambiguïté).

Le vecteur *p* ainsi défini s'appelle *produit vectoriel de u* et de *v* (pris dans cet ordre) ; on le note ordinairement $u \wedge v$, mais il vaudrait mieux adopter une notation telle que $u \,{}_{\pi}\, v$, pour écarter tout risque de confusion avec le produit extérieur de *u* et de *v* (bivecteur) qui apparaît en algèbre extérieure.

Si le volume d'un triplet de vecteurs a été préalablement défini comme une certaine forme trilinéaire alternée liée à la structure euclidienne et à l'orientation de l'espace, le produit vectoriel de *u* et de *v* peut être défini comme le vecteur dont le produit scalaire par un vecteur *arbitraire w* est Vol (*u*, *v*, *w*). L'intérêt de cette définition est qu'elle se généralise dans un espace euclidien de dimension finie *n* quelconque muni d'un volume euclidien orienté, fournissant ainsi le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs (pris dans un ordre donné).

La multiplication vectorielle, non associative, est distributive par rapport à l'addition des vecteurs, et anticommutative c'est-à-dire que, quel que soit le couple (u,v), $v \,{}_{\pi}\, u = -(u \,{}_{\pi}\, v)$.

3.2. *Fonction vectorielle :* fonction qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel.