vecteur, n. m.

Etym.: Racine latine *veh-* ou *vec-* (transporter); de même qu'un véhicule, mais dans des emplois différents, un *vecteur* est l'instrument d'un transport; *ex.:* l'anophèle est le vecteur de la malaria. A partir de là l'évolution sémantique peut se résumer ainsi :

a) Le mot apparaît en Astronomie avec valeur adjective dans l'expression *rayon vecteur* (droite censée « porter » une planète dans son mouvement autour du Soleil, par exemple); on passe aisément de là au sens classique en coordonnées polaires.

b) La Géométrie adopte le *vecteur* avec un sens encore voisin du précédent, celui de « segment de droite orienté », qui laisse des traces durables en Mécanique.

c) Actuellement le mot désigne les éléments d'un espace vectoriel (ou d'un module) et en particulier les translations d'un espace affine [①].

A la suite de cette évolution, beaucoup de locutions traditionnelles devront être abandonnées : en particulier les locutions « vecteur lié » et « vecteur libre » sont fortement déconseillées, d'autant plus qu'aujourd'hui elles risquent de créer des confusions avec les vecteurs d'une partie liée ou d'une partie libre d'un espace vectoriel.

1. Géométrie.

1.1. *Géométrie linéaire.* La notion aujourd'hui fondamentale est celle d'*espace vectoriel* ou, plus généralement, de *module*; élaborée à partir des « vecteurs géométriques », elle les a largement dépassés. De ce fait, le mot *vecteur* n'a de sens que relativement à un espace vectoriel ou à un module donnés, où l'on attribue deux rôles distincts à deux ensembles (qui peuvent éventuellement être confondus); cette distinction se traduit dans le langage par les appellations « ensemble des vecteurs » et « ensemble des scalaires » [VECTORIEL, MODULE].

1.2. *Géométrie affine.* La tendance actuelle est de construire les espaces affines sur des espaces vectoriels, considérés comme préalablement donnés; alors la notion de vecteur n'offre aucune ambiguïté. Toutefois on a longtemps adopté, et on peut encore utiliser des exposés où, partant d'un ensemble $\mathcal{A}$, dont les éléments sont appelés *points*, convenablement structuré (droites, plans, parallélismes,...), on détermine dans $\mathcal{A}^2$ une relation d'équivalence, appelée *équipollence*, dont les classes posséderont une structure d'espace vectoriel (la construction axiomatique d'un espace affine sans la donnée préalable d'un espace vectoriel présente certaines difficultés pour obtenir la transitivité de l'équipollence ainsi que le corps des scalaires; voir : Artin, *Algèbre géométrique*, ch. II et Dubreil-Lesieur-Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis*, ch. V-VI, p. 234, remarque 2).

D'une façon comme de l'autre, à tout espace affine $\mathcal{A}$ on peut associer un espace vectoriel $\mathcal{E}$ qui est celui des translations opérant sur les points de $\mathcal{A}$. Il est souvent utile de considérer les couples formés d'un point et d'un vecteur, qu'il est suggéré d'appeler *pointeurs* (anciennement « vecteurs liés »). Le pointeur (P, v) est dit d'origine P et de vecteur v; deux pointeurs de même vecteur sont dits *équipollents*.

Le point M, translaté de P par v, sera noté $P + v$ (le vecteur-translation peut être considéré comme une application, ce qui légitimerait une notation telle que $v(P)$, mais cette dernière notation peut avoir des inconvénients dans le cas d'espaces vectoriels dont les éléments sont déjà des fonctions). Corrélativement on notera M-P, ou également $\overrightarrow{PM}$, le vecteur qui amène P en M.

Pour P fixé, l'application $v \mapsto P + v$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}$; cette bijection, qui dépend de P, permet de transporter la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{A}$. Ainsi l'ensemble des points de l'espace affine peut être considéré comme espace vectoriel de multiples façons; pour particulariser un de ces espaces, il suffit d'en préciser l'origine, c'est-à-dire l'image, P, du vecteur-translation nul. L'espace vectoriel d'origine P est canoniquement isomorphe à l'ensemble des pointeurs d'origine P, et la plupart du temps on identifiera ces deux espaces.

L'application de $\mathcal{A} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}^2$: $(P, v) \mapsto (P, P + v)$ est une bijection. Les éléments de $\mathcal{A}^2$ sont usuellement appelés *bipoints*; la bijection précédente permet de traduire en termes de bipoints ce qu'on a dit au sujet des pointeurs et réciproquement. Ainsi l'équipollence des pointeurs (P, M-P) et (Q, N-Q) se traduit par l'équipollence des bipoints (P, M) et (Q, N). *Le mot « équipollent » ne doit pas être utilisé pour les vecteurs,* l'équipollence précédente signifiant pour eux l'*égalité* M-P = N-Q, ou $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QN}$ (ce sont les classes d'équipollence des bipoints qu'on appelait jadis « vecteurs libres »).

Relativement à un même espace affine, l'espace des translations, les espaces de pointeurs attachés aux divers points et l'espace des classes d'équipollence des pointeurs (ou des bipoints) sont des espaces vectoriels tous isomorphes entre eux.

La notion de pointeur se généralise plus naturellement que celle de bipoint, ce qui restreint beaucoup l'intérêt, parfois excessif, accordé à cette dernière. En effet la notion d'espace vectoriel attaché à un point préfigure celle d'espace vectoriel tangent en un point d'une variété différentiable (une « bonne » surface par exemple).

1.3. *Géométrie euclidienne.* On appelle *vecteur unitaire* tout vecteur dont le carré scalaire est 1.

2. Mécanique.

2.1. *Champ de vecteurs.* Étant donné un espace affine $\mathcal{A}$ sur un espace vectoriel $\mathcal{E}$, un *champ de vecteurs* sur $\mathcal{A}$ est une application de $\mathcal{A}$, ou d'une partie de $\mathcal{A}$, vers $\mathcal{E}$. Le graphe d'un champ de vecteurs est donc un ensemble de pointeurs.

Étant donné un champ f : $M \mapsto v$, les notions de circulation, de rotationnel, de divergence, de flux sont relatives *au champ f*, et non aux vecteurs v comme on le dit souvent par abus de langage.

2.2. *Glisseur.* L'expression « vecteur glissant » est déconseillée, elle tend d'ailleurs à être remplacée par *glisseur.* Un glisseur peut être défini comme un couple (D, v) formé d'une droite D de l'espace affine et d'un vecteur v, de même direction, de l'espace vectoriel associé.

2.3. *Moments de pointeurs ou de glisseurs.* En un point donné le *moment* d'un pointeur ou glisseur est une notion parfaitement nette alors que le « moment d'un vecteur » ne signifie rien. Le moment en A d'un pointeur (P, v) est le pointeur $(A, \overrightarrow{AP} \wedge v)$; c'est aussi le moment en A du glisseur (D, v) si P est un point quelconque de son support D.

2.4. *Potentiel vectoriel.* Étant donné un champ f, s'il existe un champ g dont f soit le champ de rotationnels, on dit habituellement que g est un « potentiel-vecteur » de f (tolérable dans cet emploi particulier, mais *potentiel vectoriel* semblerait préférable). Un champ n'admet en général aucun potentiel vectoriel, mais, s'il en admet un, il en admet une infinité, qui diffèrent par un gradient.

3. Algèbre linéaire.

3.1. *Vecteur propre.* On dit que v est un *vecteur propre* d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel si v n'est pas nul et s'il existe un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$.

3.2. *Covecteurs d'un espace vectoriel* E. Les formes linéaires sur E, c'est-à-dire les applications linéaires de E dans son corps des scalaires, sont aussi appelées *covecteurs* de E; ils forment un espace vectoriel (le dual E* de E) qui n'est isomorphe à E que si la dimension est finie, et cet isomorphisme n'est pas canonique en général. Les coordonnées d'un covecteur sont covariantes dans les changements de base de E [VARIANCE].

vecteur, n. m.

3.3. *Contravecteurs d'un espace vectoriel* E (sur un corps K). On appelle ainsi les applications linéaires du corps K des scalaires dans l'espace E. Si f est un contravecteur, on a pour tout scalaire s : $f(s) = sf(1)$, et il est clair que l'application $f \mapsto f(1)$ est un isomorphisme canonique de l'espace des contravecteurs de E sur l'espace E lui-même.

Ainsi, si l'on note $v \mapsto \underset{\smile}{v}$ l'isomorphisme inverse du précédent, on a, pour tout scalaire s et tout vecteur v, $\underset{\smile}{v}(s) = sv$, et, si φ est une application linéaire, il est facile de tirer de là : $\underset{\smile}{\varphi(v)} = \varphi \circ \underset{\smile}{v}$. Dans nombre de cas l'isomorphisme précédent permet de confondre sans inconvénient, et même avec avantage, vecteurs et contravecteurs; en effet, avec cette identification, c'est-à-dire en omettant le signe $\smile$, on obtient $\varphi(v) = \varphi \circ v$, et cette seconde notation est plus commode puisque la composition des applications est associative.

Cependant cette identification n'est pas toujours sans dangers; en particulier elle ne peut se faire quand les vecteurs v sont déjà par eux-mêmes des applications, par exemple si E est un espace fonctionnel ou, plus simplement, si v est déjà par ailleurs une application linéaire ou un covecteur.

Dans un changement de base de E, les coordonnées d'un contravecteur sont, comme celles d'un vecteur, contravariantes[VARIANCE].

Exemple : Si v et g sont respectivement un vecteur et un covecteur de E tels que $g(v)$ soit non nul, alors l'application P définie par $\dfrac{1}{g(v)}\, \underset{\smile}{v} \circ g$ projette sur la direction de v parallèlement au noyau de g; on a d'ailleurs $P^2 = P$.

3.4. *p-vecteur.* Parfois utilisé pour désigner le produit extérieur de p vecteurs ou, plus généralement, tout tenseur (complètement) antisymétrique d'ordre p. Pour $p = 2$, on disait « bivecteur », etc.

Cet usage peut prêter à confusion avec des termes tels que *quadri-vecteur*, parfois employé par les physiciens pour désigner les vecteurs de l'espace-temps de dimension 4, par opposition aux vecteurs de l'espace géométrique de dimension 3.

4. Autres expressions.

4.1. *Rayon vecteur.* Pourvu qu'on ne cherche pas à analyser cette expression toute faite, elle reste utilisable dans le domaine particulier où on l'emploie [COORDONNÉE].

4.2. *Vecteur axial, vecteur polaire.* Expressions encore rencontrées, mais plutôt déconseillées [AXIAL, POLAIRE].