Plaidoyer pour le bonhomme d'Ampère et pour quelques causes perdues

par P. ROUGÉE (Université de Rouen)

Il est de bon ton de sourire du bonhomme d'Ampère, du tire-bouchon de Maxwell ou de tout autre "monstre tridactyle" (cf. J. M. Chevallier — Matériaux pour un dictionnaire — Bulletin A.P.M. N° 283), et de considérer avec un peu de mépris les attardés qui s'en servent. A commencer par les physiciens.

Enseignant la mécanique, d'un point de vue uniquement théorique, j'ai moi-même entre autres beaucoup de produits vectoriels à effectuer, et j'utilise beaucoup plus mon tire-bouchon à cet usage que pour déboucher de fines bouteilles. Je l'ai fait longtemps furtivement, complexé que j'étais par le mépris cité plus haut.

A une époque où chacun peut revendiquer hautement le droit aux comportements sociaux ou sexuels les plus surprenants, on me permettra j'espère de dire pourquoi je me suis finalement libéré de ce complexe.

J'accorde tout de suite aux mathématiciens, et sans l'ombre d'un doute, que les gadgets en question sont absolument et résolument étrangers à la définition d'une orientation dans un espace affine ou vectoriel. Oui donc aux classes d'équivalence dans l'ensemble des bases, ou à la parité des transpositions de Monsieur Chevallier, ou à toute autre méthode qui conviendra.

On m'accordera, en revanche, que l'outil mathématique ainsi défini est communément utilisé par les physiciens, mécaniciens, architectes, etc ..., pour schématiser le monde réel. Et que si toute subjectivité est exclue du monde mathématique, où tout est rationnel et logique, la démarche qui consiste à mettre en correspondance monde réel et modèle mathématique est au contraire toute subjective : elle fait appel à notre raison qui nous donne accès au monde mathématique et à nos sens qui nous donnent accès au monde réel.

Or cette subjectivité rend la communication hasardeuse. Ici on ne démontre plus : on montre, et on fait sentir. Si lorsque deux mathématiciens dialoguent ils ne peuvent que se comprendre, en principe, lorsqu'un physicien fait sentir à un peintre un lac et un sapin en lui parlant de droite et de plan perpendiculaires, le second est en droit de répondre au premier qu'il ne comprend pas et de lui faire une toile pour expliquer sa propre façon de voir les choses. Et si c'est un peintre abstrait, c'est le physicien qui risque de devoir avouer son incompréhension.

Dans une telle impasse on a le droit, sinon d'en venir aux mains, du moins de parler avec les mains, si cela peut faire avancer les choses.

Eh bien, et même s'il ne s'en sert pas que pour cela, les monstres tridactyles sont indispensables au physicien pour *montrer* (et non démontrer) quels sont les objets du monde réel que, par convention, lui et ses collègues représentent par une base ou un repère positif dans le monde mathématique qu'ils utilisent pour schématiser ce monde réel.

Et pour en terminer avec ce "Physicien pur" disons qu'il est tout à fait normal qu'il utilise un outil mathématique sans être absolument au fait de tous les raffinements qui ont procédé à sa construction, l'essentiel pour lui étant de savoir s'en servir, c'est-à-dire de lui faire faire tout ce qu'il est capable de faire sans se taper sur les doigts par maladresse. Que je sache, on peut être mathématicien et utiliser la télévision pour communiquer avec ses collègues, sans pour cela savoir comment cette télévision fonctionne dans le détail, et sans se sentir méprisé par le caméraman.

Par ailleurs, un enseignant mathématicien qui mathématise des situations concrètes se comporte en physicien (avec toutes mes excuses pour ceux qui trouveraient cela compromettant). S'il n'utilise pas le bonhomme d'Ampère pendant la phase de mathématisation, il a tort. S'il l'utilise après, c'est-à-dire pendant une phase de pratique mathématique, il a tort encore.

Je sais qu'il est malaisé de toujours changer ainsi de casquette, mais c'est l'aspect le plus pédagogiquement intéressant du métier.

Je sais aussi que le dit bonhomme est souvent utilisé à des fins moins défendables : au cours d'une pratique mathématique on fait une figure (ce qui revient à proposer une représentation concrète du monde mathématique : inverse de la mathématisation) et on montre sur la figure avec un tire-bouchon que telle base est positive.

La cause est entendue, cela est indéfendable. Je voudrais simplement montrer qu'on peut aussi ne pas trop le condammer, en m'appuyant sur deux types de remarques : d'une part tout le monde a des accommodements avec l'enfer et d'autre part l'innocence ne voit pas le mal à ce qu'elle fait.

Auparavant il est nécessaire de remettre un peu les choses en place. Car ce qui précède est une façon très idéalisée de voir les choses. Les deux mathématiciens dialoguant mis en scène plus haut n'existent pas, pas plus que n'existe un monde mathématique auquel auraient accès quelques élus.

Par contre, chaque individu se bâtit un petit cinéma intérieur qui va en se développant et en se modifiant. Et dans l'ensemble de ces cinémas, ou de ces moi, la communicabilité est (presque !) une relation d'équivalence dont une des classes est la science mathématique.

Sur cette base, simpliste je l'accorde, on peut se poser quelques questions. Les secondes auront trait à la communicabilité entre deux moi mathématiques, et plus particulièrement à la pédagogie où le problème des rapports de l'innocence avec le mal se posera.

Les premières ont trait au fonctionnement d'une intimité mathématique : comment se développe-t-elle ? Est-elle disjointe du reste du moi ? Comment un mathématicien, grand ou petit, assimile-t-il une notion nouvelle ?

Il est probable que, cette notion lui étant totalement ou partiellement étrangère, il n'existe pas dans les circonvolutions de son cerveau un programme ou une structure d'ordre purement mathématique qui lui permettra d'appréhender d'emblée et dans toute sa richesse cette notion nouvelle. Au contraire, ce programme, au sens informatique du terme, va se créer au fur et à mesure de l'assimilation. Ce ne sera au début qu'un manteau d'Arlequin troué, bâti en ramifiant des sous-programmes préexistants, et dont certains ne seront même pas mathématiques. A commencer par le tout premier : lorsqu'on lit "On appelle "compact" etc ...", le premier programme appelé en consultation dans notre cervelle est relatif au mot "compact" de notre vocabulaire non mathématique. Car si l'inventeur de la notion a appelé cela ainsi c'est bien pour doubler l'information rationnelle contenue dans les axiomes d'une information subjective et non mathématique contenue dans le mot.

Et puis, ce programme nouveau ira en s'enrichissant, en se ramifiant avec les autres programmes. Au début, il ne contiendra que quelques éléments d'information et ce n'est que peu à peu que l'on aura vraiment pris conscience du faisceau des propriétés que la notion possède.

Ainsi donc, le monde mathématique aseptique et parfait évoqué au début est bâti avec de l'argile. Chacun en a en soi une ébauche plus ou moins élaborée, plus ou moins bonne, plus ou moins vaste, avec des parties assez pures et d'autres douteuses, en perpétuelle amélioration et extension. Une sorte de haut fourneau dans lequel le métal pur se décante peu à peu par séparation d'avec les scories. Et nous retombons là dans le concret et le subjectif que nous pensions avoir quitté. La glaise nous colle aux souliers. Les purs esprits n'existent pas.

Dans cette élaboration du monde mathématique intérieur (ou collectif : ce dernier utilise plus de neurones et vivra jusqu'à extinction de la race, mais il est de même nature) nous avons un jour abordé au rivage de la bonne définition de l'orientation d'un espace affine ou euclidien. Le voyage avait commencé en apprenant à manger sa soupe avec sa belle main et se termine par l'éjection de notre intimité mathématique des dernières scories que sont les gadgets d'Ampère et de Maxwell. Un peu vexé d'avoir cru jusqu'à un âge aussi avancé sinon au père Noël du moins à ce bonhomme-là, et peu enclin par nature à mépriser le mauvais mathématicien que l'on était avant, on méprise un peu les mauvais mathématiciens que sont ceux qui n'ont pas encore abordé au rivage. Cela n'est pas charitable mais réconforte. Et puis ça incite les traînards à ramer un peu pour accoster plus vite, pour leur plus grand bien (ce que d'ailleurs tout le monde a évidemment fait à l'heure actuelle). Mais cela devient une erreur lorsque ce mépris s'étend au physicien pour qui, comme nous l'avons montré, il ne s'agit pas d'une scorie mais d'un moyen d'expression indispensable.

D'une façon générale, il faut bien sûr, malgré la non-existence décelée plus haut, s'appuyer à fond sur la dialectique monde réel et monde mathématique, et poursuivre chacun sa recherche du mieux mathématique. Mais sans se faire trop d'illusion et sans nier la glaise que l'on traîne à ses souliers. Ne pas renier ses origines : les mathématiciens sont tous sinon fils de paysans du moins fils de physiciens ! Et sans oublier que l'absolu n'existe pas.

Qui n'a été un jour mécontent en relisant une rédaction mathématique faite quelques années auparavant ? Entre temps ses programmes intimes se sont affinés et enrichis et il peut leur arriver de ne plus reconnaître pour vrai ou convenable ce que, plus rudimentaires, ils avaient admis auparavant. Ce qui ne signifie pas que la chose démontrée soit fausse. Simplement on s'aperçoit qu'on l'avait reconnue pour vraie à la légère, pour des raisons qui apparaissent douteuses ou insuffisantes à l'heure de la relecture.

Et sans, enfin, se cacher qu'il y a aussi un aspect de consommation, ou de mode dans cette pratique.

Mode sociale, mais aussi mode individuelle : quand on découvre la supercherie du tire-bouchon on s'en voudrait de propager cette hérésie chez ses étudiants et on la combat, en faisant par exemple des produits vectoriels sans sortir l'instrument de sa poche. Cela dure un temps, le temps qu'il faut pour purifier son moi intime, car c'est d'abord de cela qu'il s'agit ! Et puis peu à peu la fièvre tombe, le scandale paraît moins grand. Alors on donne bien sûr une définition correcte d'un espace affine orienté, on dit qu'il sert à représenter le monde réel, on se laisse aller à faire une figure, c'est-à-dire à proposer au contraire une représentation matérielle du monde mathématique, et à donner avec la figure le truc du tire-bouchon. Parce qu'après tout c'est commode et ça évite de penser : ça permet de réfléchir à autre chose.

Et cela est bien ainsi : lorsque suffisamment de moi mathématiques ont ainsi fait leur lessive c'est la pensée mathématique collective qui se trouve avoir fait la sienne. Elle peut alors réintégrer le bonhomme d'Ampère ; non pas bien sûr pour définir l'orientation, mais pour aider dans la technique des calculs, là où il a fait ses preuves. Il ne sent plus le fagot ; il est récupérable.

Ce qui précède concerne le comportement subjectif du mathématicien de profession. Sur le plan plus objectif qu'est celui de notre métier et de la pédagogie, les réflexions ci-dessus ont aussi leur incidence.

Notre rôle est d'aider l'élève à créer son monde intérieur (représentation et explication du monde réel qui l'entoure : "La culture est l'adaptation de l'homme à son milieu". Morvan Lebesque) et en particulier son monde mathématique. Il faut l'aider à étoffer, étendre, ramifier, sublimer ses programmes et à bien s'en servir. C'est là le but fondamental, et tout le reste est tactique.

Une démonstration proposée par le professeur n'a pas à plaire à l'homme mathématicien qui se cache derrière ce professeur. Elle doit être abordable par les programmes de l'élève et les faire utiliser correctement, même s'ils n'ont pas atteint la pureté mathématique qu'on aimerait qu'ils aient, même s'ils font encore usage du bonhomme d'Ampère.

Une notion nouvelle devra non seulement être mathématiquement bien définie, mais elle devra aussi être enracinée dans tout l'acquis utilisable de l'élève, mathématique ou non mathématique, par des dessins, des rapprochements, des assimilations. Il faut faire sentir pour faire comprendre. Et il peut être à cet effet intéressant de créer des programmes pré-mathématiques intermédiaires, du genre orientation de l'espace par le bonhomme d'Ampère, qui se transformeront un jour par sublimation et élimination des scories en un programme plus conforme aux canons de la pureté mathématique. Une notion nouvelle trop abstraite, qui ne trouve pas dans les structures préétablies une souche, même non mathématique, sur laquelle se greffer risque de ne pas s'imposer. Un interdit jeté par le professeur sur une méthode utilisée par l'élève et qui fait appel à un de ces programmes pré-mathématiques risque de faire régresser cet élève qui mettra en veilleuse ce programme au lieu de chercher à le sublimer. Le germe mis au frigo, la germination ne se fait pas.

Il faut bien sûr que chaque enseignant fasse la chasse aux sorcières dans son intimité mathématique, et que tous s'efforcent de dégager les méthodes pédagogiques optimum qui permettront aux élèves d'ingurgiter le moins de scories possibles qu'ils auraient ensuite à éliminer, ou ce qui est plus grave qui risquent de gauchir leur moi mathématique.

Mais il ne faut pas confondre les deux démarches, même si la première éclaire la seconde. Les élèves viennent à nous avec une structure mentale qui est ce qu'elle est et sur laquelle nous devons greffer. Et ils continuent à vivre dans le monde réel, auquel ils demandent aussi des réponses aux questions mathématiques que nous leur posons. L'apprentissage de l'orientation a commencé pour eux en se regardant dans une glace. J'ignore s'il passe obligatoirement par le bonhomme d'Ampère, mais je dis que c'est une question de tactique pédagogique et pas de morale mathématique. Les voûtes des cathédrales ont été bâties sur des coffrages en bois au sommet d'immenses échafaudages qui restaient en place des années avant qu'on ne les démonte, afin de laisser au mortier à prise lente le temps d'acquérir toute sa résistance.

Enfin j'aimerais dire, au risque moi aussi de sentir le fagot, que lorsqu'on réalise combien le monde réel, et surtout le monde moderne, est géométrique euclidien, on ne peut à la lumière des réflexions ci-dessus qu'être inquiet devant l'effacement de la géométrie de notre enseignement, et au premier chef de la géométrie "expérimentale" des triangles qui glissent et des rails qui ne peuvent se rencontrer, ainsi que devant le report en fin de scolarité de l'aspect métrique.

Qu'on ne se fasse pas de souci pour la bonne tenue de mon ménage mathématique : quand je bâtis l'espace euclidien je commence par l'aspect vectoriel et je finis par la métrique, de même que si je devais construire une maison je commencerais par les fondations. N'empêche que l'enfant qui dessine une maison ou l'homme qui ébauche les plans de son futur logis n'y font jamais figurer les fondations.

L'angle droit et le cercle sont présents partout. Tout dans notre environnement n'est que cubes, cylindres, roues. Le bébé de deux ans les empile, les emboîte, les fait tourner et les visse. Qui au débotté peut se souvenir d'un solide matériel familier qui soit parallélépipédique sans être rectangle ? La verticalité et l'horizontalité, donc l'orthogonalité, sont inscrits dans notre chair sinon dans nos chromosomes. Même les plantes les connaissent.

Peut-on faire fi des structures mentales pré-mathématiques que cet état de fait a imprimées dans le cerveau de nos élèves ? A-t-on le droit de ne pas les faire prospérer, de ne pas s'en servir comme sujets pour nos greffes ? Et sous prétexte qu'il s'agit de structures mathématiques trop complexes pour que ces élèves puissent du premier coup les acquérir dans toute leur pureté mathématique ?

Qu'est-ce d'ailleurs que la simplicité et la complexité ? En mathématiques les idées les plus simples arrivent souvent les dernières, et ce n'est pas un hasard. Il est évidemment indispensable en pédagogie d'avoir ces idées simples comme objectif et d'en faciliter l'accouchement. Mais pas aux forceps. Pas en commençant obligatoirement par elles.

Pour faire un mouvement précis l'homme a besoin de se sentir en bon équilibre sur un sol stable. Au besoin un garde-fou le rassurera même s'il ne s'en sert pas. Il ne s'habitue à la mouvance et à la relativité que peu à peu. C'est une des difficultés des transports publics, de la gymnastique, du pilotage, de l'étude de la cinématique, etc ... Une démarche paraîtra simple si elle s'effectue simplement à partir d'une base sûre. Or l'enfant, ou le non mathématicien, a vécu dans un monde dont l'aspect affine euclidien (aux deux sens du terme) l'a imprégné. C'est là sa base sûre.

En voir l'aspect vectoriel lui sera relativement simple : c'est découvrir quelque chose qui était un peu caché. En ignorer l'aspect métrique est beaucoup plus rude : c'est passer sous silence quelque chose qui saute aux yeux.

Bien sûr que l'adjonction d'un produit scalaire à un espace vectoriel enrichit et donc complique la structure. Mais le débutant n'a pas le choix de la structure dans laquelle il va travailler ! Il travaille sur une structure qu'il ressent subjectivement, dont il a une connaissance expérimentale et qui est ce qu'elle est. Et du point de vue métrique où il se place deux droites perpendiculaires forment une figure plus simple que deux droites quelconques, un cercle est plus simple qu'une ellipse, et les propriétés de la bissectrice sont plus simples que celles énoncées par le théorème de Thalès. La simplicité du cercle a été chantée par les poètes.

J'aimerais beaucoup, en cette période de polémique, que l'on ne trouve dans ces quelques réflexions que l'expression d'une inquiétude et le désir de donner un éclairage. Je n'ai ni certitude à imposer en la matière ni condamnation à prononcer.

Je n'ai d'ailleurs ni autorité pour le faire ni compétence : Monsieur Walusinski, je ne suis effectivement pas allé dans vos classes et je vous accorde que c'est le monde à l'envers si les physiciens mathématisent la pédagogie des mathématiques sans se soucier des expériences faites par les mathématiciens !

Je voudrais d'ailleurs dire que, en tant qu'enseignant de Mécanique, je suis profondément d'accord avec la Réforme et avec le type de formation mathématique qu'elle affirme vouloir donner aux élèves. Autant dire que je ne crois pas avoir la nostalgie de la droite de Simson, du cercle des neuf points ou même des cycloïdes, encore que ces dernières soient parfois utiles aux mécaniciens.

Mais si je ne désire pas qu'on se remette à faire glisser les triangles, c'est plus pour l'aspect triangle que pour l'aspect glissement. Car je ne comprends pas pourquoi il serait de mauvais goût, dans une période de mathématisation qui pour la géométrie pourrait venir assez tard, de faire glisser les parallélogrammes (et les rectangles !), alors qu'il est conseillé de faire mettre tous les objets rouges dans un même sac ou tous les objets carrés ou (ou et) bleus dans un même panier. Et, par pitié, sans les précautions du genre "on vous le fait faire bien que ce soit malpropre, mais c'est bien à contre-coeur, et vous verrez, plus tard on ne vous fera plus subir ce genre d'outrages" maintenant de règle dans certains manuels.

Je ne comprends pas qu'on se batte les flancs pour chercher des situations concrètes à mathématiser (bravo !) et qu'on ne veuille aborder la géométrie qu'avec les pincettes des mathématiciens purs.

Ou plutôt si, j'ai une interprétation à en donner. C'est qu'on en est pour la géométrie au stade de la toilette intime collective décrit plus haut. Le sujet sent encore le soufre et on préfère exercer ses talents de mathématisation du réel sur des sujets neufs (sans compter qu'ils ont *pour l'enseignant* l'attrait du jamais vu !). S'il en était ainsi il conviendrait de mettre fin à cet exorcisme nécessaire et d'aborder l'étape de la récupération.

J'en ai même une seconde, à laquelle évidemment je ne crois pas. C'est que le (sincère) discours du pédagogue mathématicien sur la (réelle) nécessité de faire pratiquer la mathématisation de situations concrètes serait aussi, un peu, la rationalisation inconsciente d'une pulsion intime de l'homme mathématicien, pulsion analogue au besoin de nature du citadin. Ce qui expliquerait pourquoi il prônerait la mathématisation — retour à la terre tout en n'aimant pas trop se salir les pieds, pourquoi il mathématiserait quelques fleurs en pots mais que pour le reste il ferait faire les gros travaux par le paysan du coin, se réservant de venir tondre le gazon en bonne compagnie pendant les week-end printaniers. Avec un peu de commisération pour la balourdise du dit paysan qui ignore que la variété de gazon qu'il a semée est celle utilisée par la reine d'Angleterre.

Monsieur Chevallier ne dit pas autre chose lorsqu'il déplore (?) le "(joyeux) abandon graduel (par le mathématicien) de l'exploration descriptive du monde physique".

Où je me permets de ne pas être tout à fait de son avis, c'est lorsqu'il oppose à l'"exploration descriptive" une "heure de la mathématisation" — car pour moi la mathématisation du monde physique *est*, à des degrés divers certes, une exploration descriptive de ce monde physique. Et ce qui sonne un jour, c'est l'heure des mathématiques, ou tout au moins de tel objet ou de telle théorie mathématique.

Et cela ne peut que sonner car c'est l'irruption dans un monde totalement nouveau où le bonhomme d'Ampère est interdit, même s'il a aidé à préparer l'accès à ce monde nouveau.

Ces jours-là sont des cols dans les itinéraires mathématiques de nos élèves. Notre travail ne consiste pas seulement à leur faire admirer le paysage à la descente, mais aussi, et pourquoi pas avec l'aide du bonhomme d'Ampère, à leur faire trouver le sentier le plus économique pour la montée.

Que l'homme mathématicien se désintéresse de l'exploration descriptive du monde réel comme objet de son activité mathématique, cela est affaire d'éthique personnelle. Mais s'il est prouvé comme je le crois que les meilleurs sentiers et surtout ceux qui amplifient le moins les distorsions d'origine sociale passent par cette exploration descriptive, alors les enseignants mathématiciens ont le devoir de les emprunter. Pour des raisons d'efficacité bien sûr, mais aussi pour la raison, qui me tient personnellement à coeur, que si nous ne le faisons pas nous abandonnons totalement à nos collègues physiciens ou naturalistes l'honneur d'aider à la promotion de ceux qui partent perdants dans la course aux humanités classiques.