

# Vecteurs, glisseurs, torseurs... et mathématiques sociales

par P. ROUGÉE (Université de Rouen)

La lecture de la fiche "Vecteurs" reçue dans un récent Bulletin m'incite à vous faire part de ces quelques réflexions, qui sont celles d'un utilisateur mécanicien et portent donc essentiellement sur le paragraphe 2 de cette fiche consacré à l'emploi des vecteurs en Mécanique.

## Vecteurs

Tout d'abord, je suis heureux de l'accent mis sur le couple  $(P, \vec{v})$  d'un point  $P$  d'un espace affine  $\mathcal{A}$  et d'un vecteur  $\vec{v}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  associé à  $\mathcal{A}$ , au détriment du bipoint justement condamné. En dehors évidemment du Mathématicien traitant des rapports entre  $\mathcal{A}^2$  et  $\mathcal{E}$ , quel utilisateur des espaces affines a-t-il jamais besoin de l'extrémité  $B$  du vecteur lié,  $(A, \overrightarrow{AB})$ ? Et va pour le terme "pointeur" ...

Par contre, je ne puis approuver la définition :

"Le moment en  $A$  du pointeur  $(P, \vec{v})$  est le pointeur  $(A, \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v})$ "  
que je propose de remplacer par : " $\dots$  est le vecteur  $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$ "

Ce qui n'interdit pas d'introduire le *champ des moments*, dont le graphe est l'ensemble des pointeurs  $(M, \overline{MP} \wedge \vec{v})$ ,  $M \in \mathcal{A}$ . Et au moins, avec cette définition, la relation  $\overline{AP} \wedge \vec{v} = \overline{BP} \wedge \vec{v} + \overline{AB} \wedge \vec{v}$  si souvent utilisée exprime bien une relation entre les moments en A et B comme on le dit couramment.

Pour exactement les mêmes raisons, vitesse et accélération d'un point M doivent, à mon avis, être définies comme étant des éléments de  $\mathcal{E}$  et non des pointeurs d'origine M.

### Glisseurs

Mais je voudrais surtout parler ici des vecteurs glissants, que vous proposez d'appeler glisseurs. Auparavant, je ne résiste pas au plaisir de signaler la définition suivante, lue dans un ouvrage de cinématique datant d'une dizaine d'années : "*Vecteur astreint à rester sur son support*" J'imagine qu'une réédition postérieure à mai 1968 aurait donné "autorisé à se déplacer sur son support".

Ce que je crois à propos du vecteur glissant, c'est que le problème à son sujet n'est pas d'en trouver une bonne définition et une bonne appellation, mais plutôt de l'extirper de l'esprit des gens pour cause d'inutilité. Voici mes raisons.

Tout d'abord, contrairement à ce que l'on dit souvent, ce que le physicien appelle force concentrée appliquée à un corps matériel *doit* être schématisé par un pointeur  $(M, \vec{F})$  (force  $\vec{F}$  appliquée en M), et non par un glisseur. Même si pour certains usages on n'utilise que le glisseur  $(D, \vec{F})$ , où D est la droite passant par M et parallèle à  $\vec{F}$  (c'est (presque) le cas dans l'application du principe fondamental de la dynamique à un solide) il n'en va pas ainsi pour tous les usages. Par exemple, la puissance de cette force est le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{V}(M)$  où  $\vec{V}(M)$  est la vitesse de M et non celle d'un hypothétique point de D.

De façon plus générale, ce que le physicien appelle système de forces exercées à un instant donné sur un corps matériel occupant à cet instant la position  $\Sigma$  dans  $\mathcal{A}$  sera schématisé par une mesure  $F$  définie sur  $\Sigma$  et à valeur dans  $\mathcal{E}$ , généralement définie dans la pratique par sa densité massique, volumique ou autre, c'est-à-dire par un champ de vecteurs et une mesure scalaire. Les forces de pesanteur sont évidemment de ce type. Cette notion devrait donc être introduite le plus rapidement possible.

Or, si l'on sait ajouter (? ! ) deux forces exercées en un même point, on est dépourvu devant deux forces appliquées en des points différents. Les vecteurs glissants sont nés de la technique qui consiste, dans le cas de forces coplanaires, à les faire glisser (? ! ) sur leur support de façon à les transformer en forces appliquées en un même point pour pouvoir les ajouter.

Le mathématicien comprend évidemment qu'en faisant glisser on remplace un pointeur par un autre jugé équivalent (à certains points de vue mais bien sûr pas à tous), donc que l'on introduit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ , et que ce que l'on ajoute ce ne sont pas les pointeurs  $p_1$  et  $p_2$  de départ mais leurs images  $f(p_1)$  et  $f(p_2)$  par une application  $f$  de l'ensemble  $P$  des pointeurs dans un ensemble  $X$  muni d'une loi d'addition, application  $f$  dont la restriction à chacune des classes d'équivalence est constante.

L'emploi de la notion de vecteur glissant consiste à choisir pour  $\mathcal{R}$  la relation "ont même support et même mesure", pour  $X$  l'ensemble  $\frac{\mathcal{A} \times \mathcal{E}}{\mathcal{R}}$  des vecteurs glissants, et pour  $f$  l'application canonique de  $\mathcal{A} \times \mathcal{E}$  dans  $\frac{\mathcal{A} \times \mathcal{E}}{\mathcal{R}}$ .

Or il s'agit là d'une demi-mesure. D'une part l'ensemble des vecteurs glissants n'a pas une structure bien agréable, et en particulier la somme de deux vecteurs glissants ne peut être définie que s'ils sont coplanaires, parfois laborieusement (composition de forces parallèles) et encore pas toujours (cf. les fameux couples).

D'autre part la voie est bouchée à toute généralisation : qu'est-ce qu'une mesure vectorielle glissante ?

Enfin, une dernière chose me contrarie sur le plan pédagogique, et je m'excuse si elle concerne plus le mécanicien que le mathématicien. Il ne me paraît pas sain de permettre à une force, qui schématise une action mécanique concrète en un point précis, de s'abandonner à des glissements dangereux pour s'accoupler au hasard des rencontres et donner naissance à un être que je baptiserai encore force, qui aura la même nature mathématique, mais qui ne schématisera plus une action mécanique précise exercée en un point précis. C'est un peu comme si en ajoutant les volumes de deux bouteilles j'essayais de faire croire que j'obtiens une nouvelle bouteille, plus grande, en partant des deux premières. De telles pratiques préparent et justifient l'irruption incongrue de mystérieuses forces centrifuges ou gyroscopiques au milieu des devoirs de nos élèves.

Pour en revenir à nos forces, c'est-à-dire à nos pointeurs, que nous voulons ajouter, il faut se persuader que ce que l'on ajoute en fait ce sont leurs *champs de moments*. Et donc que le bon choix consiste à prendre pour  $\mathcal{R}$  la relation "ont même champ de moments", pour  $X$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs, et pour  $f$  l'application qui associe à un pointeur  $(P, \vec{F})$  son champ de moments :

$$M \longrightarrow \overline{MP} \wedge \vec{F}$$

Les classes d'équivalence sont toujours les vecteurs glissants, mais perdent de leur intérêt puisque ce qui est ajouté ce sont les moments. Par ailleurs, l'addition est évidemment partout définie puisque  $f$  est à valeur dans un espace vectoriel, ce qui est un gros progrès.

Enfin la généralisation est immédiate. On remplace l'ensemble des pointeurs,  $\mathcal{A} \times \mathcal{E}$ , par l'ensemble des mesures  $F$  définies sur  $\mathcal{A}$  et à valeurs dans  $\mathcal{E}$ , qui contiendra en particulier les ensembles finis de pointeurs, on définit le champ des moments d'une telle mesure comme étant le champ

$$\vec{\mathcal{C}}_F : M \in \mathcal{E} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{C}}_F(M) = \int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{MP} \wedge dF(P)$$

et l'application  $f$  sera l'application  $F \rightarrow \vec{\mathcal{C}}_F$

On vérifie évidemment la relation caractéristique

$$\overrightarrow{\mathcal{C}}_F(A) = \overrightarrow{\mathcal{C}}_F(B) + \vec{\mathcal{C}} \wedge \overrightarrow{BA} \quad \forall A \text{ et } B \in \mathcal{A}$$

avec

$$\vec{\mathcal{C}} = \overrightarrow{F(\mathcal{A})} = \int_{\mathcal{A}} dF(P)$$

qui montre d'une part que  $\vec{\mathcal{C}}_F$  est un champ affine dont l'application linéaire associée est l'application antisymétrique :  $\vec{U} \rightarrow \vec{\mathcal{C}} \wedge \vec{U}$ , et d'autre part et bien évidemment que nous débouchons sur la notion de torseur.

### Torseurs

Ce qui précède a fait comprendre que la notion de torseur remplace avantageusement la notion de vecteur glissant, mais *ne la prolonge pas*.

La démarche qui consiste à introduire les torseurs comme classes d'équivalence dans l'ensemble des systèmes finis de vecteurs glissants, pour la relation "ont même champ de moments", démarche qui est en fait imposée par tous les programmes contenant les torseurs, est donc indéfendable.

La notion de vecteur glissant ne se défend que dans la mesure où elle est jugée recevable par de jeunes élèves alors que la notion de moment, et à fortiori de torseur, ne le serait pas. Mais dès que ces notions sont utilisées le vecteur glissant peut et doit être oublié. Il renaîtra d'ailleurs de ses cendres, comme nous le verrons, sous une forme convenable.

Je ne crois pas pour autant qu'il faille définir les torseurs comme classes d'équivalence des systèmes finis de pointeurs : cela nous interdirait de parler du torseur des forces de pesanteur, qui sont des forces réparties et non discrètes. Ni d'ailleurs dans l'ensemble des mesures vectorielles : cela nous interdirait de parler du torseur des forces magnétiques, qui, en dehors de la fiction des masses magnétiques, ne relève pas du schéma développé ici.

Je ne crois pas enfin qu'il faille définir un torseur comme étant une classe d'équivalence, et ceci pour la simple raison que l'être mathématique qui sera utilisé par la suite ne sera jamais cette classe elle-même, mais presque exclusivement le champ de ses moments. Sans compter qu'un être mathématique défini par création et non par caractérisation risque fort de rester auréolé d'un voile de mystère, et de ce fait réservé aux initiés. Les torseurs sont de ceux-là. Et puis qui définit le volume comme étant une classe d'équivalence dans l'ensemble des domaines de  $\mathbb{R}^3$  ?

Il y a longtemps que certains mécaniciens se sont libérés de la relation d'équivalence pour définir les torseurs — (cf., parmi les ouvrages d'enseignement récents, MECANIQUE de P. Brousse, Collection U). —

Je crois toutefois qu'un dernier pas reste à faire pour banaliser totalement la notion de torseur et bien la situer dans le contexte mathématique. Ce dernier pas consiste à prendre comme définition d'un torseur l'être mathématique préexistant qui le caractérise et qui est en fait le plus utilisé à son propos, à savoir son champ de moments.

Nous donnons ci-dessous les étapes essentielles d'une telle façon de concevoir et présenter le chapitre "Torseurs". Il s'agit à notre avis d'un excellent chapitre d'application des chapitres "Espaces vectoriels" et "Espaces affines".

#### Définition :

On appelle torseur (dans l'espace affine euclidien de dimension 3  $\mathcal{A}$  d'espace vectoriel associé  $\mathcal{E}$ ) tout champ de vecteurs affine dont l'application linéaire associée est antisymétrique.

*c'est-à-dire* : Toute application  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{E}$  telle qu'il existe  $\vec{t} \in \mathcal{E}$ , appelé vecteur de  $\mathcal{T}$ , vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{T}}(A) = \vec{t}(B) + \vec{t} \wedge \overrightarrow{BA}$$

#### Commentaires :

1°) Par rapport à la démarche classique, la valeur en M de  $\mathcal{T}$  se substitue à l'ancien moment en M. Le terme moment est réservé aux pointeurs et autres mesures vectorielles (en mécanique : aux forces proprement dites).

2°) Les torseurs font d'emblée partie d'un ensemble déjà connu du lecteur et bien structuré. Les opérations classiques sur les torseurs sont donc définies d'emblée, et il est trivial de vérifier que l'ensemble  $\mathcal{T}$  des torseurs est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ .

3°) Les champs affines et les applications antisymétriques de  $\mathcal{E}$  dans lui-même auront évidemment été étudiées au préalable. L'équipro-

jectivité des torseurs sera reliée à l'antisymétrie de l'application linéaire (cf. P. Brousse).

*Théorème :*

Le champ des moments d'une mesure vectorielle  $F$  est un torseur dont le vecteur est  $\int_{\mathcal{A}} d\vec{F}(P)$ . Ce torseur est dit "associé à  $F$ ", ou "torseur de  $F$ ".

*Commentaire :*

Ce théorème situe l'outil torseur dans la schématisation des forces en mécanique. On traitera évidemment les cas particuliers où  $F$  est un pointeur, un ensemble fini de pointeurs, un couple de pointeurs de mesures opposées, etc ...

*Théorème :*

Quel que soit  $A \in \mathcal{A}$ , l'application

$$\mathcal{T}_A : \mathcal{T} \rightarrow (\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{T}}(A)) \in \mathcal{E}^2$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{E}^2$ . L'isomorphisme inverse associé à  $(\vec{R}, \vec{G}) \in \mathcal{E}^2$  le champ  $\vec{\mathcal{T}} : M \rightarrow \vec{\mathcal{T}}(M) = \vec{G} + \vec{R} \wedge AM$

*Notations :*

$\mathcal{T}_A^{-1}((\vec{R}, \vec{G}))$ , qui est le torseur dont le vecteur est  $\vec{R}$  et dont la valeur en  $A$  est  $\vec{G}$ , peut être noté  $\left[ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{G} \end{array} \right]_A$

*Terminologie :*

$\vec{\mathcal{T}}$  et  $\vec{\mathcal{T}}(A)$  sont les coordonnées vectorielles en  $A$  de  $\vec{\mathcal{T}}$ .

*Remarque :*

Il sera pédagogiquement souhaitable de faire le rapprochement avec l'application  $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$  qui associe à  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  le triplet  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  de ses coordonnées dans une base  $\mathcal{B}$  donnée, et avec la notation peu orthodoxe mais bien pratique,  $\left( \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right)_{\mathcal{B}}$  pour désigner le vecteur dont les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  sont  $u_1, u_2$ , et  $u_3$ . A ce sujet, ne pourrait-on pas mettre l'accent sur l'aspect opératoire d'une base d'un espace vectoriel ?

*Conséquences (entre autres)*

1°)  $\mathcal{T}$  est de dimension 6

$$2°) \lambda_1 \vec{\mathcal{T}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathcal{T}}_2 = \lambda_1 \vec{\mathcal{T}}_1 + \lambda_2 \vec{\mathcal{T}}_2$$

$$3°) \lambda_1 \left[ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{G}_1 \end{array} \right]_A + \lambda_2 \left[ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{G}_2 \end{array} \right]_A = \left[ \begin{array}{c} \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2 \\ \lambda_1 \vec{G}_1 + \lambda_2 \vec{G}_2 \end{array} \right]_A$$

$$4°) \vec{\mathcal{T}} = \left[ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{T}} \\ \vec{\mathcal{T}}(A) \end{array} \right]_A \quad \forall \vec{\mathcal{T}} \text{ et } A$$

**Théorème :**

Les champs constants sont des torseurs dont le vecteur est nul, et réciproquement. De tels torseurs sont appelés couples. L'ensemble C des couples est identique à  $\mathcal{T}_A^{-1}(\{\vec{0}\} \times \mathcal{E})$  quel que soit A. C'est donc un sous-espace vectoriel de T de dimension 3.

*Exemple :* Torseur associé à un couple de pointeurs de mesures opposées.

**Théorème :**

Si un torseur  $\mathcal{T}$  est nul en un point A il est nul en tout point M de la droite D passant par A et parallèle à  $\vec{v}$ . Lorsqu'il en est ainsi  $\mathcal{T}$  est le torseur associé à tout pointeur  $(M, \vec{v})$  de mesure  $\vec{v}$  et de support D. Un tel torseur est appelé *glisseur* (de support D et de vecteur  $\vec{v}$ ).

**Remarque :**

Il s'agit évidemment de la renaissance annoncée du vecteur glissant sous une forme utilisable cette fois.

**Théorème :**

L'ensemble des glisseurs dont le support passe par A donné est identique à  $\mathcal{T}_A^{-1}(\mathcal{E} \times \{\vec{0}\})$ . C'est donc un sous-espace de dimension 3 de T, supplémentaire de l'ensemble des couples.

**Conséquence :**

Décomposition unique d'un torseur  $\mathcal{T}$  en somme d'un glisseur dont le support passe par A donné et d'un couple :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \mathcal{T}(A) \end{bmatrix}_A$$

**Théorème :**

Soit  $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un repère de  $\mathcal{A}$ . L'ensemble des six torseurs

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{0} \end{bmatrix}_A, \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{e}_i \end{bmatrix}_A, i = 1, 2, 3,$$

constitue une base de T.

(La recherche des éléments centraux — axe central, etc ... — ne relève pas de l'algèbre linéaire).

**... Et Mathématiques Sociales**

En guise de conclusion, j'aimerais dire quelques mots sur les problèmes pédagogico-mathématiques de l'enseignement de la mécanique et de la physique, et sur certaines résonances que j'y vois.

Il me faut d'abord dire combien en tant qu'utilisateur mécanicien je suis convaincu de l'efficacité tant pédagogique que scientifique des outils mathématiques modernes. C'est une évidence, tout comme l'est la nécessité de la réforme de l'enseignement des mathématiques et de l'adaptation à cette réforme des enseignements de la mécanique et de la physique. Et cette dernière nécessité est aussi, à mon avis, une aubaine pour ces disciplines.

Cela étant dit, il me semble toutefois que les choses iraient peut-être un peu mieux si les mathématiciens se départissaient un peu d'une attitude souvent trop triomphaliste. La bonne conscience est souvent dangereuse pour soi et agaçante pour les autres. D'autant que tout n'est pas toujours blanc ou noir comme nous allons le voir sur deux exemples.

Le premier aura trait aux différentielles. Si pour un physicien elles sont toujours petites, c'est peut-être bien parce que c'est l'aspect d'application linéaire tangente qui leur est le plus utile. Et cet aspect est tout à fait respectable et se révèle bien utile pour la généralisation de la notion de dérivée en analyse fonctionnelle.

Puisque cette façon de voir les choses est particulièrement utile, elle devrait être sinon prioritaire du moins mise en valeur dans l'exposé mathématique. Il ne s'agit pas pour le mathématicien de contredire le physicien mais d'expliquer pourquoi  $dx$  est petit en physique ; et aucun cours sur les différentielles ne devrait être fait sans application au calcul d'erreur.

La réalité est parfois toute autre, et je crains fort que souvent  $dx$  n'appartienne d'autant plus à  $\mathbb{R}$  tout entier dans le cours de mathématiques qu'il est plus petit en physique.

Le second exemple concerne les vecteurs polaires et axiaux qu'utilisent parfois physiciens et mécaniciens. Les premiers sont réputés normaux par opposition aux seconds qui ont la réputation de changer de sens quand on change l'orientation de l'espace ! Voilà un comportement qui, je l'espère, deviendra avec la réforme de moins en moins compréhensible à un élève normalement constitué.

Or il s'agit d'une dialectique qui a fait ses preuves, qui se révèle utile au physicien, et qui a une logique interne tout à fait rigoureuse. Elle cache donc sous le projet subjectif prêté aux vecteurs de changer ou non de sens, une structure mathématique précise qu'il incombe au mathématicien d'analyser et d'expliquer, et en tout premier lieu à ses élèves à propos de leur cours de physique si le besoin s'en fait sentir.

Si pour ce faire il cherche aide et consulte les fiches de la Commission du dictionnaire de l'A.P.M.E.P. il trouvera ceci :

"*Vecteur polaire*" : vecteur qui peut-être défini indépendamment de l'orientation de l'espace. S'oppose à vecteur axial.



“Vecteur axial” : parfois employé pour désigner un vecteur qui ne peut être défini sans que l'orientation de l'espace soit connue ; tel est le cas des produits vectoriels, moments, rotationnels, etc ...

Ce qui lui apprendra que même au temple de la bonne mathématique, où certes la nature n'a plus horreur du vide, les vecteurs craignent quand même encore un peu la solitude (1).

On prône aujourd'hui à juste titre la mathématisation du réel et les mathématiques vivantes. Mais n'est-ce pas en définitive ce qu'ont toujours fait physiciens et mécaniciens ? Que les outils mathématiques qu'ils forgent soient parfois douteux ou inachevés, qu'ils utilisent mal ou sans les précautions nécessaires des outils mathématiques classiques, cela arrive. Mais en définitive ils font leur part dans la nécessaire division du travail et il appartient au mathématicien de faire la sienne. Le physicien se sert d'outils mathématiques ; son objet n'est pas la réflexion sur ces outils. C'est au contraire le rôle du mathématicien de définir, améliorer, compléter et propager les outils mathématiques.

Et il le fait certes, mais en perdant souvent la notion d'outil, pour se laisser aller à l'ivresse immatérielle des mathématiques pures. Sur le plan de la recherche d'abord où même si une théorie a une origine physique, elle est tellement désincarnée, généralisée, elle a tellement perdu toute référence à son origine physique qu'elle est totalement ésotérique pour le physicien.

Sur le plan de l'enseignement ensuite, où le mathématicien bâtit son monde bien parfait et aseptique, sans référence au concret. Il ne lui viendrait pas à l'idée de traiter l'optique géométrique comme illustration de la théorie des matrices en double du cours de physique, ni rien de ce genre.

Cela serait pourtant aussi de la mathématisation du réel.

On me dira à juste titre que je fais là le procès de la situation ancienne, et que la réforme va changer tout cela. Je n'en suis pas du tout convaincu, même si je le souhaite. Car enfin, il faut se rendre compte que nous sommes là en plein dans la dialectique du faire et du parler, de l'action et du discours, de la technique et de la culture, du manuel et de l'intellectuel, de l'utilitaire et du gratuit, du travail et du jeu, etc ...

Et il est très important de remarquer que les mathématiques modernes c'est aussi le passage de la Science mathématique du premier pôle de cette dialectique au second. C'est son accession enfin reconnue au rang de culture noble à part entière, avec toute la signification sociale que cela sous-entend. Dans les bonnes familles le fort en maths ne fera plus de complexe devant le fort en philo ; il lui portera même plutôt ombrage !

Et cela est bel et bon. C'est la reconnaissance d'un fait indéniable. Il faut s'en réjouir.

Mais on peut aussi s'en inquiéter.

D'abord parce que noblesse oblige. Quand on est habile de ses mains et bien né on devient sculpteur ou violoniste mais pas soudeur à l'arc. Cela explique peut-être la volonté actuelle de qualifier de jeu l'activité mathématique, ainsi que le désintérêt des mathématiciens devant les problèmes mathématico-pédagogiques des physiciens ou mécaniciens : force, travail, énergie, cela sent la sueur devant jeu et créativité.

Ensuite, et cela est beaucoup plus grave, parce que la culture attire la culture comme l'argent attire l'argent.

Privilégier (ou tout au moins lui rendre son rang) l'aspect culturel des mathématiques sur leur aspect technique, le côté jeu intellectuel sur le côté utilitaire, le discours sur l'action, la compréhension de la numération sur la pratique des quatre opérations, la dérivabilité sur le calcul des dérivées, c'est parfait. Il faut le faire, cela élève l'âme et rend de surcroît la technique plus sûre.

Mais on peut se demander si le faire trop, ou trop tôt, ce n'est pas provoquer un phénomène de résonance chez les élèves bénéficiant d'un privilège culturel de par leur origine sociale, et donc les valoriser devant ceux qui, moins préparés à l'abstraction, moins rompus au maniement d'un langage mais au contraire plus socialement motivés par le maniement d'un outil, auraient, eux, besoin de pratiquer plus longuement la technique pour à travers elle et par elle, et lentement, accéder à autre chose.

S'il en était ainsi, les mathématiques participeraient alors à part entière cette fois, et beaucoup plus qu'auparavant, aux côtés de la littérature et du latin, au phénomène de centrifugation ou de distillation fractionnée sur critères sociaux bien connu dans notre enseignement secondaire.

On verrait alors se développer un enseignement de belles mathématiques pour la formation d'une élite, d'autant plus belles qu'elles se suffiraient à elles-mêmes et éviteraient toute compromission, et un enseignement de mathématiques utilitaires pour physiciens, enseignement technique et besogneux divers.

---

(1) On aura beaucoup plus de satisfaction sur le sujet en consultant le Bulletin de l'Union des Physiciens de mai 1972, dont on ne peut d'ailleurs que conseiller la lecture à tous les mathématiciens pour la majorité de ses articles, à propos desquels le dialogue peut s'établir de façon très fructueuse.