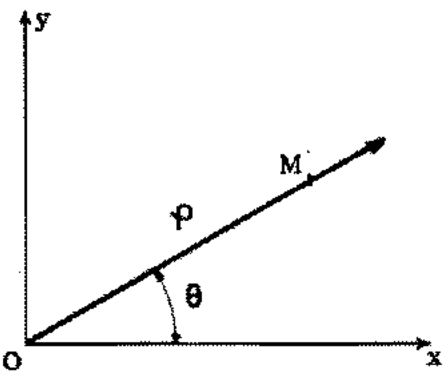
Différentiation ou intégration ? Applications techniques

Francisque SALLES et René BOIREL (I.N.S.A. - Lyon)

L'application à la physique du calcul différentiel a rendu possible l'accroissement du développement scientifique depuis le XVIIIe siècle.

Les succès obtenus dans ce domaine ont bien établi l'efficacité de la différentiation. C'est pourquoi depuis longtemps elle a une si grande importance dans la formation mathématique des chercheurs et ingénieurs.

La puissance de ce calcul est indéniable : si l'on connaît une relation dans "l'infiniment petit évanouissant" qui définit l'état d'un phénomène à l'instant t, on peut penser toute son évolution et, par suite, la contrôler efficacement. En ce sens, écrire l'équation différentielle d'un phénomène, n'est-ce pas avoir la satisfaction de le maîtriser au moins intellectuellement ?



De plus, on dépasse ainsi le cas particulier considéré, en le rattachant à des structures plus générales. Par exemple, (fig. 1) si nous avons une densité fonction de $p = \mathrm{OM}$, l'indice absolu de réfraction est une fonction de p, $n(p)$. La loi de Descartes permet d'écrire $\frac{\sin i}{n} =$ constante, ce qui devient en différentiant dans "l'infiniment petit évanouissant", $\operatorname{cotg} i \, di = \frac{dn}{n}$, équation différentielle générale réglant par exemple le chemin d'un rayon lumineux dans notre atmosphère. En remontant des différentielles aux intégrales, on obtient la solution générale ; et, pour passer aux cas particuliers, il ne reste en principe qu'à adapter les constantes d'intégration aux conditions initiales.

L'algorithme différentiel constitue donc un instrument intellectuel très utile pour satisfaire les deux visées principales de la connaissance scientifique : la compréhension du monde physique et l'action rationnellement conduite.

Malheureusement, l'application du calcul différentiel à des situations matérielles concrètes est souvent délicate. En effet, dès que le chercheur ou l'ingénieur doit effectuer des calculs numériques, il opère nécessairement sur des valeurs non évanouissantes, qui définissent des propriétés sur une petite longueur, et non plus en un point : il s'agit toujours de petites différences finies.

Nous nous proposons d'étudier les processus d'application aux problèmes techniques de l'algorithme infinitésimal, en comparant sous l'angle de leur efficacité les méthodes de différentiation et d'intégration, en vue de dégager les raisons de leurs difficultés respectives et leur signification épistémologique.

Pour l'étudiant en Mathématiques, la différentiation est en général une opération plus facile que l'intégration.

S'il doit effectuer un calcul comprenant une expression différentielle, il sait théoriquement qu'il en viendra à bout en consultant avec soin un tableau de dérivées. Par contre, le calcul formel d'une intégrale n'est pas toujours possible. Si l'on y parvient, c'est habituellement à la suite de transformations ingénieuses, qu'il faut imaginer pour la ramener à un cas classique, ou même grâce à l'invention de nouvelles transcendantes : par exemple, l'aire de $y = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ à $x > 0$ donne le logarithme népérien.

La situation est toute différente pour le physicien ou l'ingénieur : Ils peuvent se permettre des calculs approchés à condition qu'ils aboutissent à des résultats qui soient à la fois suffisamment précis et significatifs.

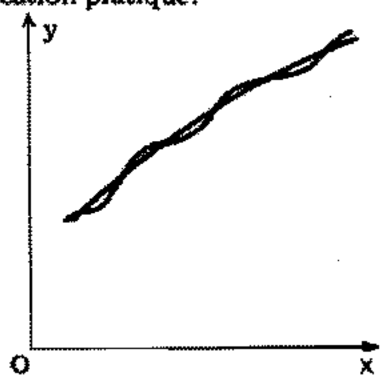
Or, de ce point de vue, l'intégration approchée est toujours plus facile que la différentiation approchée, même avec les calculateurs électroniques. En effet, ces deux opérations reviennent respectivement, la première à la mesure approximative d'une aire, et l'autre à l'évaluation de la tangente trigonométrique d'un angle. Et il est plus facile d'évaluer une aire qu'une tangente trigonométrique. Telle est la première raison de la supériorité de l'intégration sur la différentiation dans les calculs numériques.

D'ailleurs le fait que l'intégration est liée à l'évaluation d'une aire ne rend-il pas sa compréhension plus facile que celle de la notion de dérivée ? L'enfant de 7 à 8 ans a la notion de "surface", que lui suggère la vue d'une pièce spacieuse. Ultérieurement, le découpage d'un rectangle en carrés élémentaires lui donnera la notion d'"aire". A partir de 12 ans, le dessin d'une courbe sur du papier millimétrique peut lui permettre d'accéder intuitivement à la notion d'intégrale comme limite de $\sum_0^x y(x)\,\Delta x$. Au contraire, il est bien difficile de faire comprendre à des élèves de 15 à 18 ans la notion de dérivée, limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δy et Δx tendent vers zéro! Elle n'est vraiment assimilée par les jeunes intelligences que grâce à l'interprétation géométrique de la tangente trigonométrique. C'est pourquoi certains pédagogues avertis recommandent de commencer par des notions d'intégration avant d'aborder la différentiation.

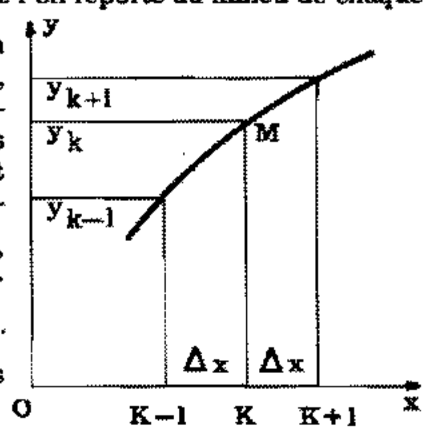
Pour prendre davantage conscience de la supériorité de l'intégration dans lès calculs numériques, examinons de plus près *comment se présente en fait la différentiation pour l'ingénieur ou le physicien.*

Il dispose soit d'une courbe continue tracée par un appareil enregistreur, soit d'une table de valeurs discrètes généralement en correspondance avec une progression arithmétique de l'argument.

Dans le premier cas, la courbe est caractérisée souvent par de faibles oscillations autour d'une forme générale. La définition mathématique de la dérivée perd alors toute signification pratique. C'est ce qui se produit quand on utilise, par exemple, un potentiomètre à variation discontinue de résistance par spires. Le technicien procède dans ce cas au "lissage" de la courbe : il s'attache ainsi, non pas au phénomène infiniment petit, mais au phénomène global ; la dérivée de la courbe "lisse" est le "taux de variation", qui devient la seule notion utile pratiquement (fig. 2).



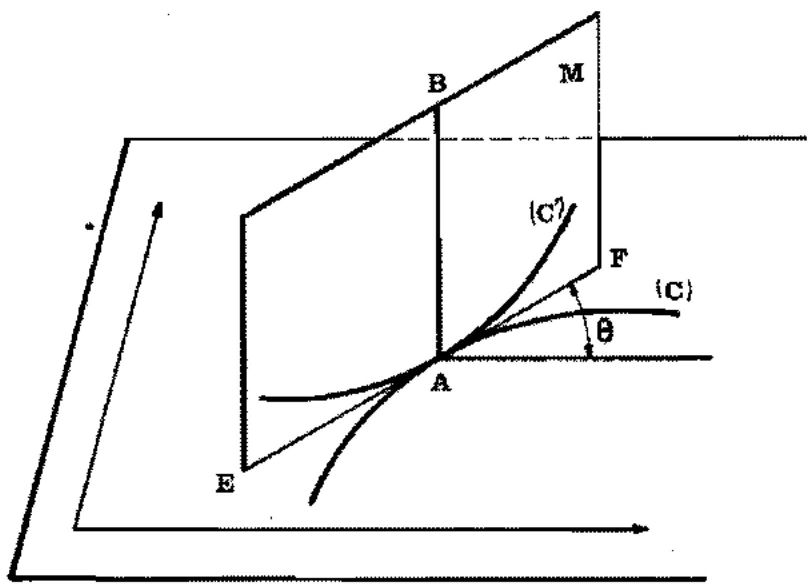
Dans le cas où l'on dispose d'une table de valeurs discrètes, si la raison de la progression arithmétique de l'argument est suffisamment petite, l'évaluation directe des $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que l'on reporte au milieu de chaque intervalle donne une approximation de la dérivée. Si Δx est assez grand, on utilise d'abord la méthode précédente, ce qui donne autant de points que d'intervalles, soit n ; pour le point M_{xo+k}, on utilise la parabole passant par les points d'indice $k-1$, k, $k+1$, et d'axe parallèle à 0y. La dérivée pour k est $\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\Delta x}$ (fig. 3). Pour les points extrêmes, on a recours à des polynomes du 4ème degré.



On a ainsi n + 1 points pour la courbe dérivée, donc au total 2n + 1 points que l'on reporte sur un graphique, qu'on "lisse" pour avoir les valeurs présumées de la dérivée y'. Les calculs sont longs et délicats ; ils font appel, en définitive, plus au sens intuitif du calculateur qu'à la logique formelle.

Si l'on peut ainsi déterminer avec assez d'exactitude la dérivée première, il est pratiquement impossible de passer à la dérivée seconde et à fortiori aux dérivées d'ordre supérieur, alors qu'une suite d'intégrations approchées peut s'effectuer avec une assez grande facilité.

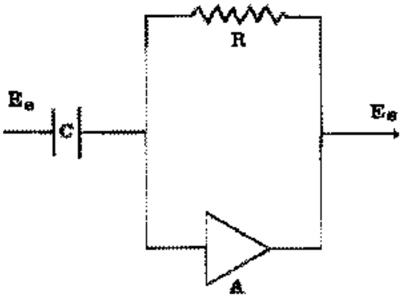
Pour pallier ces difficultés, on a imaginé des appareils donnant une valeur approchée de la dérivée en un point d'une courbe.



Pour les utiliser, on amplifie la courbe dans le premier cas examiné précédemment et l'on agrandit la courbe dans le deuxième cas en procédant à un nouveau "lissage" : soit C la courbe ainsi obtenue. Un des appareils différentiateurs, parmi les plus simples, comprend un miroir vertical M qui peut pivoter autour de l'axe AB (fig. 4) : on s'arrange pour que l'image C' de C ait même tangente EF que C.

Une graduation permet de lire la tangente trigonométrique de l'angle θ. On peut alors déterminer dans de bonnes conditions les valeurs de l'argument où la dérivée s'annule : elles correspondent aux extrêmums de y.

En calcul analogique, on a conçu des schémas électriques différentiateurs. Considérons, par exemple, celui de la figure 5 :

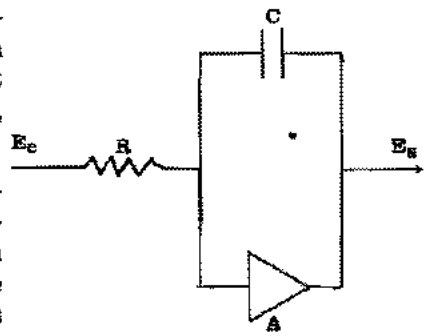


C = condensateur
R = résistance
A = amplificateur à lampes
E_e = tension d'entrée
E_s = tension de sortie

On a, à un facteur près, $E_s = \frac{dE_e}{dt}$.

Malheureusement, de tels schémas ont tendance à amplifier les bruits de fond, et des phénomènes de haute fréquence y déterminent des auto-oscillations. Aussi ne sont-ils pratiquement pas utilisés. Tout se passe comme si la nature refusait la différentiation.

Au contraire, les schémas électriques intégrateurs, tels que celui de la figure 6, fonctionnent correctement et donnent, à un facteur près, $E_s = \int_0^t E_e\, dt$.
L'utilisateur d'un calculateur analogique, pensant principalement en termes d'intégration, est donc habitué à d'autres démarches intellectuelles que celles codifiées par les mathématiques classiques.



Pour celles-ci, l'intégration de $y'' + ay' + by = f(t)$ consiste à chercher la solution générale avec ses deux constantes et à déterminer ces dernières avec y_0, y'_0, alors que le calculateur analogique résout le cas particulier ; la connaissance de y_0 et y'_0 détermine y''_0 :

$$y''_0 = -a\, y'_0 - by_0 + f(0)\ ;$$

c'est l'équilibre, qui a une importance physique considérable et dont le mathématicien ne parle pas. On pose $y'' = z$, d'où :

$$y' = \int_0^t z dt + y'_0 \quad ; \quad y = \int_0^t [\int_0^t z dt + y'_0] + y_0.$$

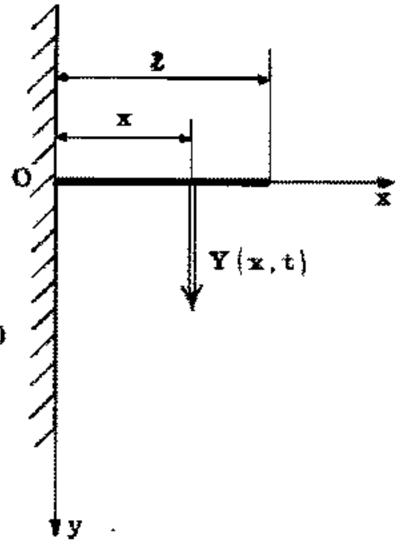
L'équation différentielle (générale) est remplacée par l'équation intégrale (particulière) suivante, qui introduit dès le début les conditions initiales :

$$\text{(I)} \qquad z + a[\int_0^t z dt + y'_0] + b \left\{\int_0^t [\int_0^t z dt + y'_0] + y_0\right\} = f(t).$$

Il est aisé de construire un schéma analogue d'une telle équation (I).

Remarquons enfin que le physicien peut obtenir ici une solution valable par calcul analogique, même si a, b sont des fonctions discontinues de t, alors que les méthodes mathématiques classiques sont impuissantes dans ce cas. (1)*

Donnons maintenant un exemple de calcul technique afin d'évaluer les difficultés et le temps de calcul respectifs quand on procède par différentiation ou par intégration.



Soit une poutre cantilever (fig. 7) de longueur l, de densité massique $\mu(x)$, d'inertie de flexion $I(x)$. S'il y a vibration $y(x,t)$ à partir de la position stable, on a l'équation aux dérivées partielles :

$$\mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0$$

équation qu'on ne sait pas résoudre théoriquement, μ et I étant des fonctions de x.

Si ces deux dernières données sont constantes, en posant $Y = \Sigma y(x) \cos \omega t$, on aboutit, avec $s^4 = \dfrac{m\omega^2}{EI\,l}$, $m = \mu\, l$, ω étant l'une des pulsations, à l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - s^4\, y = 0,$$

qui conduit à l'équation aux pulsations $\mathrm{ch}(sl).\cos(sl) + 1 = 0$, dont la plus basse des racines donne $\omega_1^2 = 12{,}37\,\dfrac{EI}{ml^3}$.

Nous allons essayer de procéder empiriquement, afin d'avoir une méthode générale dans le cas où μ et I sont fonctions de x.

Résolvons, par approximation, l'équation différentielle, par différences finies. En divisant la poutre en 5 tronçons, avec $5h = l$, $\dfrac{h^4 m}{EIl} = k$, $7k\omega^2 = \lambda$. Les λ sont les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 49 & -28 & 7 & 0 \\ -28 & 42 & -22 & 7 \\ 6 & -22 & 26 & -10 \\ 2 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)* – cf. "Utilisation en technique des équations différentielles, par F. SALLES, N T III, Ministère de l'air.

ce qui donne l'équation en λ :

$$\lambda^4 - 116\,\lambda^3 + 3766\,\lambda^2 - 23765\,\lambda + 4802 = 0.$$

Il faut résoudre par la méthode de Graeffe : on trouve $\omega^2 = 11{,}68\,\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{m}l^3}$. *L'erreur est de 5,68% et le temps de calcul de 8 heures.*

On remarque que la méthode différentielle donne les ω^2 proportionnels aux valeurs propres d'une matrice.

Si le calculateur veut utiliser les équations intégrales, il partage aussi la poutre en 5 tronçons. Par un calcul très facile, il détermine la fonction de Green correspondante, avec $\dfrac{6\,\mathrm{EI}}{\mathrm{m}\,h^4\,\omega^2} = \lambda$, les λ étant les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 7 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 26 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 54 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 88 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 125 \end{pmatrix}$$

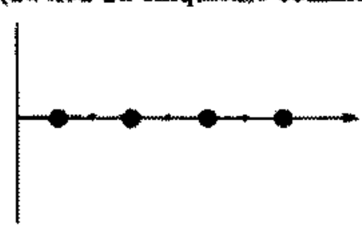
Ici les ω^2 sont inversement proportionnels aux valeurs propres de cette matrice. Comme nous voulons avoir la plus basse des pulsations, seule intéressante du point de vue technique, il suffit de trouver la plus grande des valeurs propres, ce qui est facile par un calcul itératif connu, alors que ce n'était pas possible précédemment, où il fallait résoudre l'équation du 4ème degré : ainsi on trouve $\omega_1^2 = 11{,}91\,\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{m}\,l^3}$.

L'erreur est seulement de 3,70% et le temps de calcul est abaissé à deux heures.

Ainsi l'intégration l'emporte sur la différentiation.

Mais il y a plus, car l'ingénieur, au lieu de faire une discrétisation purement mathématique de la poutre, peut opérer à partir d'une discrétisation ayant une signification physique : il concentre la masse en 4 points et il emploie les coefficients d'influence, qui ne sont autres que les valeurs de la fonction de Green (fig. 8). C'est une autre façon d'utiliser les équations intégrales.

Il a alors à chercher les valeurs propres de la matrice du quatrième ordre (au lieu du cinquième comme antérieurement) :



$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 4 & 27 & 54 & 81 \\ 10 & 81 & 200 & 343 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres ici aussi sont inversement proportionnelles aux ω^2. Un calcul d'itération donne

$$\omega_1^2 = 12{,}72\frac{EI}{ml^3}$$

Il y a 2,8% d'erreur seulement et le temps du calcul est abaissé à 1 heure (I)

Ainsi, *de sérieuses connaissances techniques amènent le calculateur averti à des calculs plus simples, plus précis* et moins longs que les calculs mathématiques purement formels, *surtout lorsqu'il utilise des méthodes d'intégration.*

Cette supériorité du calcul intégral sur le calcul différentiel pour les applications techniques n'aurait-elle pas des raisons profondes tenant à la nature même de la mathématisation du réel ?

L'application des mathématiques à la physique, comme les diverses "sciences appliquées", est essentiellement une coordination rationnelle des résultats de mesures, d'où l'on déduit certaines relations entre grandeurs qui doivent être, en fin de compte, vérifiées par l'expérience.

Or les mesures dont on part comportent toujours une marge d'erreur. Dès lors, il importe que les algorithmes utilisés dans les calculs numériques ne soient pas trop sensibles aux erreurs de mesure initiales.

Sous cet angle, l'intégration et l'utilisation des équations intégrales semble préférable à la différentiation et aux équations différentielles. En effet, *une erreur commise dans l'évaluation d'une grandeur se répercute en croissant dans les dérivées successives de cette grandeur, alors que l'intégration, au contraire, en diminue l'influence.*

C'est ce qui ressort notamment de l'exposé fait par M. Théodore Vogel "sur la diffraction des ondes par les inclusions", lors du Colloque International du C.N.R.S. consacré à "la propagation des ébranlements dans les milieux hétérogènes", qui a eu lieu à Marseille en Septembre 1961 (2).

Surtout l'intégration et la différentiation correspondent, au fond, à deux attitudes différentes en face du monde physique.

Ecrire une équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(t)\frac{dx}{dt} + C(t)x = f(t),$$

c'est penser, à l'aide d'infiniment petits évanouissants, *un problème général*, qui ne devient un problème particulier qu'avec l'introduction des conditions initiales.

---

(1) – Cf. la conférence de F. Salles au Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences, Brest, Juillet 1970.

(2) – Cf. publications du C.N.R.S., 1962.

Ecrire une équation intégrale, au contraire, c'est considérer un problème particulier, en se donnant les conditions initiales dès le début.

Or l'ingénieur, comme l'homme de laboratoire, ne se trouve-t-il pas en présence de situations concrètes particulières ?

"*Il n'y a de science que du général*", affirmait Aristote, qui ajoutait : "*et de réalité que du particulier*". La première partie de la formule du Stagirite correspond à l'attitude du théoricien, mais aussi à la visée profonde du calcul différentiel, tandis que la deuxième partie exprime celle du technicien, mais également la visée spécifique du calcul intégral.

Définissant des problèmes généraux, le calcul différentiel conduit celui qui l'utilise vers un résultat final susceptible d'interprétation physique certes, mais sans l'éclairer vraiment sur chaque étape des opérations, qui sont coupées pour lui de toute signification physique immédiate : elles n'ont qu'une signification formelle dans la plus grande partie des calculs. Et la détermination des constantes en fonction des conditions initiales ou aux limites peut être difficile à effectuer.

Au contraire, le calcul intégral portant sur des problèmes particuliers, les conditions initiales sont automatiquement introduites, et les phases de la progression vers le résultat final ont, en même temps que leur signification opératoire, une signification concrète, qui éclaire les démarches successives et en permet le contrôle.

Notamment, l'étude des phénomènes de vibrations à l'aide d'expressions différentielles est délicate : en effet, l'application des équations de Lagrange est difficile, car il faut alors inverser une matrice. C'est pourquoi il vaut mieux avoir recours à la "méthode des coefficients d'influence" (fonction de Green), où l'on procède par intégration (1).

Plus généralement, pour rendre compte de l'évolution d'un système physique, il est préférable de l'exprimer sous la forme du bilan énergétique des échanges avec l'environnement, du temps t_0 au temps t, qui permet l'utilisation du calcul intégral.

Le point de vue newtonien, où l'on identifie le système physique considéré à un ensemble de forces isolées, définies par la relation $f = m\,\gamma$, aboutit à des équations différentielles. On retrouve d'ailleurs ces dernières si on différentie l'expression intégrale obtenue par la première méthode, et qui est un bilan d'énergie, quel que soit le temps d'évolution considéré, ce qui permet une vérification.

Malheureusement, les habitudes prises au cours des années d'études théoriques font que la plupart des physiciens et ingénieurs

---

(1) — Cf. cours de l'I.N.S.A. "Les vibrations mécaniques", par F. Salles et G. Lesueur (Masson).

commencent par écrire des équations différentielles, sans songer aux équations intégrales qui souvent faciliteraient leur tâche pour les calculs numériques.

Ceux-ci, pour être efficaces, doivent porter sur des structures concrètes, et non sur de purs êtres de raison.

Les phénomènes considérés par le physicien ou le technicien sont toujours des cas particuliers, où l'on ne retrouve les schémas généraux que d'une manière approchée. Et un cas particulier, en tant que phénomène réel, est un phénomène total.

C'est justement cet aspect global de la réalité physique que tend à méconnaître le calcul différentiel lorsqu'il reconstruit les situations matérielles à l'aide d'infiniment petits évanouissants, qui sont en définitive des éléments considérés isolément.

C'est précisément cet aspect global des phénomènes qui est respecté, au contraire, dans l'intégration.

L'esprit scientifique éprouve de grandes difficultés pour exprimer la dynamique des totalités : ne préfère-t-il pas la voie royale des démarches analytiques aux méthodes synthétiques ?

Ces dernières semblent suspectes à priori aux esprits rigoureux dans la mesure où elles risquent de faire négliger des paramètres "secondaires", mais dont l'influence cependant réelle serait mise en évidence par une analyse fine : dans une intégrale, les termes considérés comme douteux en raison de l'imprécision des mesures correspondantes ne sont-ils pas noyés dans les termes plus importants mieux connus ? Dès lors, comme le faisait remarquer le général Vernotte au Colloque International du C.N.R.S. déjà cité (1), si les conséquences des quantités incertaines sont effacées dans l'intégration — et c'est bénéfique pour les calculs —, ne risque-t-on pas ainsi d'oublier parfois leur action physique, et d'aboutir à une conception théorique indûment simplifiée, d'où l'on déduira finalement des résultats grossièrement erronés ?

Si, en raison de cette propension pour les méthodes analytiques, qui renforce les habitudes acquises au cours des études supérieures, on a le sentiment de ne pouvoir commencer l'approche rigoureuse d'un phénomène qu'en écrivant une équation différentielle, il convient peut-être, dans une deuxième phase des recherches, d'essayer de revenir à des équations intégrales, qui dans beaucoup de cas permettent des calculs approchés plus faciles, mais aussi souvent plus précis, parce que l'aspect global du phénomène étudié a ainsi plus de chances de n'être pas méconnu.

(1) – cf. Colloque International du C.N.R.S. sur "La propagation des ébranlements dans les milieux hétérogènes", P. 250-251.

En définitive, les tensions entre la différentiation et l'intégration sont l'expression en Mathématiques appliquées des divergences entre deux orientations fondamentales de l'activité scientifique : le projet d'analyse fine et le souci de ne pas perdre de vue l'aspect global des phénomènes concrets.