A propos d'un texte d'Einstein relatif à la géométrie

par Michel DE COINTET (Strasbourg)

"Le grand prestige de la mathématique repose ... sur le fait que c'est elle qui confère aux sciences exactes un certain degré de certitude qu'elles ne pourraient pas atteindre autrement.

Ici surgit une énigme qui a fortement troublé les chercheurs de tous les temps. Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule les propriétés des objets réels ?

A cette question il faut, à mon avis, répondre de la façon suivante : pour autant que les propositions de la mathématique réfèrent à la réalité elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne réfèrent pas à la réalité. La parfaite clarté sur ce sujet n'a pu devenir bien commun que grâce à cette tendance en mathématique, qui est connue sous le nom d'axiomatique. Le progrès réalisé par cette dernière consiste en ceci que la partie logique et formelle est soigneusement séparée du contenu objectif ou intuitif. D'après l'axiomatique, la partie logique et formelle constitue seule l'objet de la mathématique, mais non pas le contenu intuitif ou autre qui lui est associé.

Examinons de ce point de vue un axiome quelconque de la géométrie, par exemple le suivant : par deux points de l'espace on peut toujours tracer une ligne droite, et l'on n'en peut tracer qu'une seule. Comment cet axiome doit-il être interprété dans le sens ancien et comment dans le sens moderne ?

Interprétation ancienne.— Chacun sait ce qu'est une droite et ce qu'est un point. Que cette connaissance provienne de la faculté de l'esprit humain ou de l'expérience, de la coopération de toutes les deux ou d'ailleurs, le mathématicien n'est pas obligé d'en décider ; il abandonne cette décision au philosophe. Fondé sur cette connaissance, qui est donnée avant toute mathématique, l'axiome susnommé (comme tous les autres axiomes) est évident, c'est-à-dire, qu'il est l'expression d'une partie de cette connaissance "à priori".

Interprétation moderne.— La géométrie traite d'objets qui sont désignés par les termes de point, droite, etc. Une connaissance quelconque ou intuition de ces objets n'est pas supposée ; la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes (dont celui mentionné plus haut est un *exemple), qui doivent être également conçus comme purement formels, c'est-à-dire dépourvus de tout contenu intuitif ou accessible à l'expérience.*

Ces axiomes sont des créations libres de l'esprit humain. Toutes les autres propositions géométriques sont des déductions logiques des axiomes (qui doivent être conçus seulement au point de vue nominaliste). Ce sont les axiomes qui définissent en premier lieu les objets dont traite la géométrie. Et c'est pourquoi Schlick, dans son livre sur la Théorie de la connaissance, a très justement regardé les axiomes comme des définitions implicites.

Cette conception des axiomes, qui est représentée par l'axiomatique moderne, débarrasse la mathématique de tous les éléments qui ne lui appartiennent pas, et dissipe ainsi l'obscurité mystique qui enveloppait jadis ses fondements. Une telle exposition épurée rend de même évident que la mathématique comme telle est incapable d'énoncer quoi que ce soit, ni sur les objets de la représentation intuitive, ni sur les objets de la réalité. Par les termes de point, droite, etc., il ne faut entendre dans la géométrie axiomatique que des concepts schématiques vides de contenu. Ce qui leur confère un contenu n'appartient pas à la mathématique. Mais il est d'autre part certain que la mathématique en général et la géométrie en particulier doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Le terme de géométrie, qui signifie "mesure du terrain", le prouve déjà. Car la mesure du terrain traite des positions relatives possibles de certains corps de la nature, c'est-à-dire de parties du corps terrestre, de cordeaux, de jalons, etc ... Il est clair que le système de concepts de la géométrie axiomatique seule ne peut formuler aucun énoncé sur le comportement de cette espèce d'objets de la réalité que nous voulons appeler "corps pratiquement rigides". Pour pouvoir fournir des énoncés de ce genre, la géométrie devrait être dépouillée de son caractère logique et formel, de telle sorte qu'on puisse coordonner aux concepts schématiques vides de la géométrie axiomatique des objets de la réalité accessibles à l'expérience. Pour effectuer cela, il suffit d'ajouter la proposition suivante :

Des corps solides se comportent, quant à leurs possibilités de position, comme des corps à trois dimensions de la géométrie euclidienne ; les propositions de cette dernière contiennent alors des énoncés sur le comportement des corps pratiquement rigides.

La géométrie ainsi complétée est manifestement une science dérivée de l'expérience ; nous pouvons même la considérer comme la branche la plus ancienne de la physique. Ses énoncés reposent essentiellement sur l'induction de l'expérience, et non pas seulement sur des déductions logiques. Nous appellerons la géométrie ainsi complétée *géométrie pratique, et nous la distinguerons dans ce qui suit de la géométrie axiomatique pure. La question de savoir si la géométrie pratique du monde est euclidienne ou non a un sens précis et la réponse ne peut être fournie que par l'expérience. Toute mesure de longueur en physique est de la géométrie pratique dans ce sens ; de même encore la mesure de longueur géodésique et astronomique, si l'on ajoute la proposition expérimentale que la lumière se propage en ligne droite — en ligne droite dans le sens de la géométrie pratique.*

J'accorde d'autant plus d'importance à la conception de la géométrie ainsi caractérisée qu'il m'aurait été impossible de construire sans elle la théorie de la relativité."

A. EINSTEIN
LA GEOMETRIE ET L'EXPERIENCE
Gauthier - Villars 1933 (pages 13 à 16)

Le professeur de philosophie et moi-même avions donné ce texte à lire à nos élèves de Terminale C, l'an dernier. Je voudrais simplement rapporter ici quelques-unes des nombreuses questions qui nous furent alors posées et auxquelles nous avons essayé de répondre en commun. Elles m'ont beaucoup appris. D'abord, sur mes élèves que je ne soupçonnais pas d'une telle réflexion — même exprimée parfois maladroitement — Ensuite, sur mon enseignement dont plus d'une sont, nolens volens, une sérieuse critique. Elles m'ont fait réfléchir longuement : qui étais-je pour fixer, à priori, l'horizon intellectuel de mes élèves ? Quelle était la qualité de mon enseignement mathématique, s'il ne dissipait pas, s'il entretenait, voire créait, de par lui-même, de telles confusions ? La nature des programmes d'antan, le fait de n'être pas seul en cause étaient des alibis trop faciles pour être convaincants.

Voici donc ces questions (je n'ignore pas une part d'arbitraire dans leur regroupement) :

— Y a-t-il plusieurs sortes de mathématiques, c'est-à-dire existe-t-il une mathématique admise (axiomes) et une mathématique démontrée ? A chaque ensemble d'axiomes de base correspond une mathématique. Découvrirons-nous un jour la vraie mathématique et bannirons-nous les autres ?

— Dans l'interprétation ancienne, l'axiome est défini par son évidence absolue. Où sont les limites de l'évidence ? Dans l'interprétation moderne, l'axiome est une convention décidée par l'esprit. Quels sont les fondements de cette création ?

— Un axiome, si c'est ce que je crois, est un énoncé que nous devons croire, admettre sans démonstration. Est-il possible que les mathématiques si "exactes" reposent sur des choses admises ? Dans quelle mesure faut-il les admettre ?

— La mathématique est-elle fonction de la société qui la construit ou existe-t-il une mathématique universelle ?

— Einstein présente la mathématique comme spéculation purement abstraite et sans lien (en dehors des axiomes) avec la réalité. Mais cette manière de voir n'est-elle pas essentiellement moderne et réservée aux hauts raisonnements des mathématiciens ?

— Puisque les mathématiques ne sont qu'"un produit de la pensée humaine", comment peuvent-elles donner un degré de certitude aux sciences exactes, puisqu'elles ne sont fondées sur aucune expérience ?

— Les mathématiques ne sont-elles pas une traduction imagée (par l'écriture) et approchée (absence de vraie rigueur) des phénomènes naturels ?

— Pourquoi l'homme a-t-il inventé les mathématiques ? Etait-ce un besoin ?

— Les mathématiques sont-elles une science née du raisonnement ou bien sont-elles une simple constatation d'un état de choses qui nous dépasse ?

— Quel est le rôle des mathématiques dans la connaissance ?

— A quoi servent les mathématiques ? Non pas dans leur application, mais à quoi servent les recherches abstraites traitant de géométrie à n dimensions, par exemple ?

— La mathématique nous aide-t-elle à rechercher la vérité ? Avec la mathématique peut-on accéder à la "vérité objective" ?

— Les mathématiques sont-elles une science exacte ? Peut-on par les seules théories mathématiques prévoir des lois physiques jusqu'ici inconnues ? Ces prévisions sont-elles toujours l'exact reflet de la vérité ? Pouvons-nous les admettre sans réserve avant d'avoir obtenu confirmation expérimentale ?

— La mathématique en général doit son existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Les mathématiques sont-elles donc un moyen d'expression ?

— La mathématique n'est-elle qu'un instrument de calcul (qui permet de progresser en physique, par exemple) ?

— Rapports entre intuition et mathématique ?

— Qu'est-ce que le raisonnement en mathématique ?

— Y a-t-il une méthode en mathématique ?

— Qu'est-ce que démontrer ?

— La solution d'un problème de mathématique est toujours trouvée d'avance. Est-ce qu'il y a nécessité de chercher la solution si des centaines de fois on a trouvé la même chose ? Ce n'est pas notre solution mais *la* solution. On ne nous pose pas un problème, la solution ne dépend pas de nous. Est-ce que les mathématiques ne mettent pas fin en quelque sorte chez l'homme à ce qu'on appelle réflexion personnelle ? Ne tend-elle pas à placer l'homme dans un domaine irréel, qui manque d'originalité ?

Il me reste à émettre un souhait : qu'une part importante de la formation initiale et de la formation permanente des maîtres soit consacrée à une réflexion épistémologique sur la Mathématique. Ces questions montrent — s'il en était besoin — que cette réflexion n'est pas inutile, voire qu'elle est indispensable.