

Les rapports des groupes de travail de Caen

La géométrie

Animateur : GUINET (E.N.G. Evreux)

Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés classiques des carrés magiques, puis certaines propriétés géométriques moins connues, qui ont donné lieu à des applications au C.M. 2.

Rappelons qu'un carré magique est un tableau carré de nombres généralement naturels tel que la somme en ligne, colonne, diagonale, est partout la même.

On appellera cette somme : la somme magique.

Si les diagonales ne sont pas magiques, on dira que le carré est *semi-magique*.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons, sauf indication contraire, que les carrés magiques dont les éléments sont les termes d'une progression arithmétique.

I — Voici quelques propriétés algébriques générales que nous ne démontrerons pas, pour des raisons évidentes.

C_n est un carré magique de "côté" n formé des termes de la suite $1, 2, \dots, n^2$.

Si S_n désigne la somme magique, il est clair que :

$$S_n = \frac{1 + 2 + \dots + n^2}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Ainsi $S_3 = 15$, $S_4 = 34$, $S_5 = 65$.

Si on ajoute un même entier a à tous les termes d'un carré magique C_n , le carré obtenu est encore magique.

Dans ce cas, la somme magique est : $S'_n = S_n + na$

Si on multiplie chaque terme d'un carré magique par un entier k , on obtient un carré magique et la somme magique est : $S'_n = k.S_n$

Il s'ensuit, de tout ce qui précède, que si C_n désigne un carré magique dont les termes sont $1, 2, \dots, n^2$, on obtient un carré magique en remplaçant chacun de ses termes par ceux d'une suite arithmétique u_1, u_2, \dots, u_{n^2} .

Dans ce cas, la somme magique devient :

$$S = \frac{(u_1 + u_{n^2})}{2} n$$

Si on "ajoute" deux carrés magiques de même ordre, on obtient un carré magique de somme magique $S + S'$.

Remarque : Si on considère l'ensemble des carrés magiques d'ordre n construits sur Z , on obtient un Z -module.

Nous avons essayé au C.M.2, de faire découvrir et surtout expliquer certaines des propriétés ci-dessus.

Voici un des exemples que nous avons proposés.

Je passe sous silence les remarques des élèves qui prouvent combien le raisonnement était construit.

Nous avons donné le tableau :

			12
	4		15
	13	11	
		10	x

Nous avons supposé que la somme magique est 34. La croix (x) désigne le nombre cherché en premier. Ceci a amené, compte tenu de la somme magique, les élèves à décomposer certains nombres en somme de deux nombres, ce qui a donné les couples :

(1,6), (2,5), (~~3,4~~) en colonne (4ème)

(16,3), (~~15,4~~), (14,5), (~~13,6~~), (12,7) en diagonale.

5 est le seul compatible etc ...

Il faut veiller à ce que les élèves ne soient pas tentés de trouver les nombres au hasard.

Nous avons ajouté 5 à chacun des termes du carré magique obtenu et demandé la remarque s'imposant ainsi que l'explication.

Nous avons multiplié par 3 chacun des termes, puis ajouté les deux tableaux.

Les remarques concernant les propriétés ci-dessus font évidemment appel aux propriétés de l'addition et de la multiplication.

II — Construction des carrés magiques

Il n'existe pas de procédés simples et généraux, sauf peut-être en ce qui concerne les carrés semi-magiques, pour engendrer des carrés magiques d'ordre quelconque.

Voici deux méthodes :

1. Méthode due à Bachet de Méziriac (écrivain des 16ème et 17ème siècles à qui l'on doit : Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres) et valables uniquement pour les carrés d'ordre impair.

Nous allons construire un carré d'ordre 5 ($S_5 = 65$).

On écrit la suite naturelle de 1 à 25 dans le "moule" ci-dessous à gauche, les nombres entrant dans le cadre se trouvent placés.

			1			
		6		2		
	11		7		3	
16		12		8		4
21		17		13		9
	22		18		14	
		23		19		15
			24		20	
				25		

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Par simple déplacement des éléments extérieurs au cadre vers les cases vides, on obtient le carré magique ci-dessus à droite.

2. Méthode due à La Hire, mathématicien français des 17^{ème} et 18^{ème} siècles, applicable à la construction des carrés magiques d'ordre impair ou multiple de 4.

En ce qui concerne les carrés d'ordre pair non multiples de 4, il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode simple.

La méthode repose sur le principe suivant :

Etant donné la suite naturelle $\{u_n\} = \{1, 2, \dots, n^2\}$ et les suites arithmétiques :

$$\begin{aligned} \{v_n\} &= \{1, 2, \dots, n\} \\ \{s_n\} &= \{0, n, 2n, \dots, (n-1)n\} \end{aligned}$$

il est évident que chacun des termes de la suite $\{u_n\}$ peut être obtenu par addition d'un terme de la suite $\{v_n\}$ avec un terme de la suite $\{s_n\}$.

Ainsi, on est amené à construire deux carrés magiques d'ordre n , le premier étant constitué des éléments de la suite $\{v_n\}$, chaque élément étant répété n fois, le second formé de la même manière par les éléments de la suite $\{s_n\}$. Par "addition" de ces deux carrés magiques, on obtient un carré magique d'ordre n dont les termes sont ceux de la suite $\{u_n\}$, à condition qu'il n'y ait pas de répétition.

Voici deux exemples :

a) Carré d'ordre 4

On va construire deux carrés magiques :

le premier avec les termes de la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ et le second avec les termes de la suite $\{0, 4, 8, 12\}$.

Le carré 1 est construit de la manière suivante :

dans la première ligne, on inscrit la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ dans n'importe quel ordre, dans la deuxième ligne on écrit la suite dans l'ordre inverse. La troisième ligne s'obtient en permutant les deux premiers termes de la

première ligne, puis les deux derniers termes. La quatrième ligne s'obtient en écrivant la troisième dans l'ordre inverse.

Le carré II se construit de la même façon, mais par un balayage vertical et non horizontal.

Le carré III est magique d'ordre quatre.

4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2
2	3	4	1

I

0	8	12	4
12	4	0	8
4	12	8	0
8	0	4	12

II

4	9	14	7
15	6	1	12
5	16	11	2
10	3	8	13

III

b) Carré d'ordre 5

On va construire deux carrés à partir des suites $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{0, 5, 10, 15, 20\}$.

Le carré IV est construit de la manière suivante :

On écrit dans la première ligne la suite 1, 2, 3, 4, 5 dans un ordre quelconque. La seconde ligne est obtenue par une permutation circulaire de la première ligne à partir du troisième terme. On répète ce procédé jusqu'à la dernière ligne.

Le carré V s'obtient de la même façon, mais par une permutation circulaire sur les colonnes ou bien par une permutation sur les lignes, mais à partir du quatrième terme.

4	5	3	2	1
3	2	1	4	5
1	4	5	3	2
5	3	2	1	4
2	1	4	5	3

IV

10	0	5	20	15
20	15	10	0	5
0	5	20	15	10
15	10	0	5	20
5	20	15	10	0

V

14	5	8	22	16
23	17	11	4	10
1	9	25	18	12
20	13	2	6	24
7	21	19	15	3

VI

III — Procédé géométrique

Les propriétés géométriques de certains tableaux de nombres sont beaucoup moins connues que les propriétés algébriques, mais au moins aussi intéressantes.

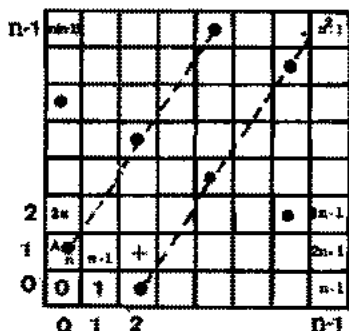
Afin de démontrer ces propriétés, nous allons donner un certain nombre de définitions.

Considérons un carré de côté n et numérotions les colonnes et les lignes de 0 à $n-1$.

Ainsi, la case indiquée par une croix (+) a pour coordonnées $(2,1)$.

Par analogie à la géométrie, nous parlerons de droite, vecteur, direction, etc ...

Au lieu de case, nous dirons point.



Etant donné un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, un naturel λ ($0 \leq \lambda \leq n-1$) : nous appellerons droite passant par A l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$$x = (x_0 + \lambda a) \pmod{n}$$

$$y = (y_0 + \lambda b) \pmod{n}$$

Son vecteur directeur est \vec{u} .

Deux droites seront parallèles si leurs vecteurs directeurs sont linéairement dépendants.

Tout ensemble de droites parallèles sera appelé direction.

Plaçons, dans le carré de côté n , la suite naturelle $0, 1, \dots, n^2-1$ dans cet ordre.

La case de coordonnées (α, β) sera occupée par le nombre $\alpha + n\beta$.

Nous allons démontrer que si n est premier, toutes les directions, sauf deux, sont magiques.

La somme magique est évidemment $\frac{n(n^2-1)}{2}$ puisque le premier terme de la suite est zéro.

Pour démontrer cette propriété, nous allons utiliser le théorème suivant : n est un naturel premier, p est un naturel non multiple de n . Les restes de la division par n des termes de la suite : $0, p, 2p, \dots, (n-1)p$ sont dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$.

En effet, supposons que deux termes de la suite précédente donnent le même reste dans leur division par n . Par exemple $k p$ et $k' p$.

$$\text{Alors } k p - k' p = 0 \pmod{n} \Leftrightarrow (k - k')p = 0 \pmod{n}.$$

Comme n est premier, et p non multiple de n , $k - k' = 0 \pmod{n}$ ce qui est impossible.

Corollaire 1

Les restes de la division par n de la suite $0, ap, 2ap, \dots, (n-1)ap$, (a étant un naturel non multiple de n) sont dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Corollaire 2

Dans les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le naturel b , les restes de la division par n de la suite $b, b + a p, \dots, b + (n-1)a p$, sont dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Considérons dans un carré de côté n (n premier) la case de coordonnées (α, β) et une direction de vecteur $\vec{u}(a, b)$.

La droite passant par (α, β) de direction \vec{u} est l'ensemble :
 $(\alpha, \beta) ; (\alpha+a, \beta+b) ; (\alpha+2a, \beta+2b) ; \dots ; (\alpha+pa, \beta+pb) ; \dots ; (\alpha+(n-1)a, \beta+(n-1)b)$
 chacun des éléments étant divisé euclidiennement par n , on obtient :
 $(a_1, b_1) ; (a_2, b_2) ; (a_3, b_3) ; \dots ; (a_{p+1}, b_{p+1}) ; \dots ; (a_n, b_n)$.

D'après le corollaire 2, chacun des a_i et b_i ($1 \leq i \leq n$) est dans un ordre quelconque $0, 1, 2, \dots, n-1$ si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

La case (a_i, b_i) est occupée par le naturel $a_i + n b_i$. Faisons la somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n b_i) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i + n \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n b_i) = (1 + 2 + \dots + n-1) + n(1 + 2 + \dots + n-1)$$

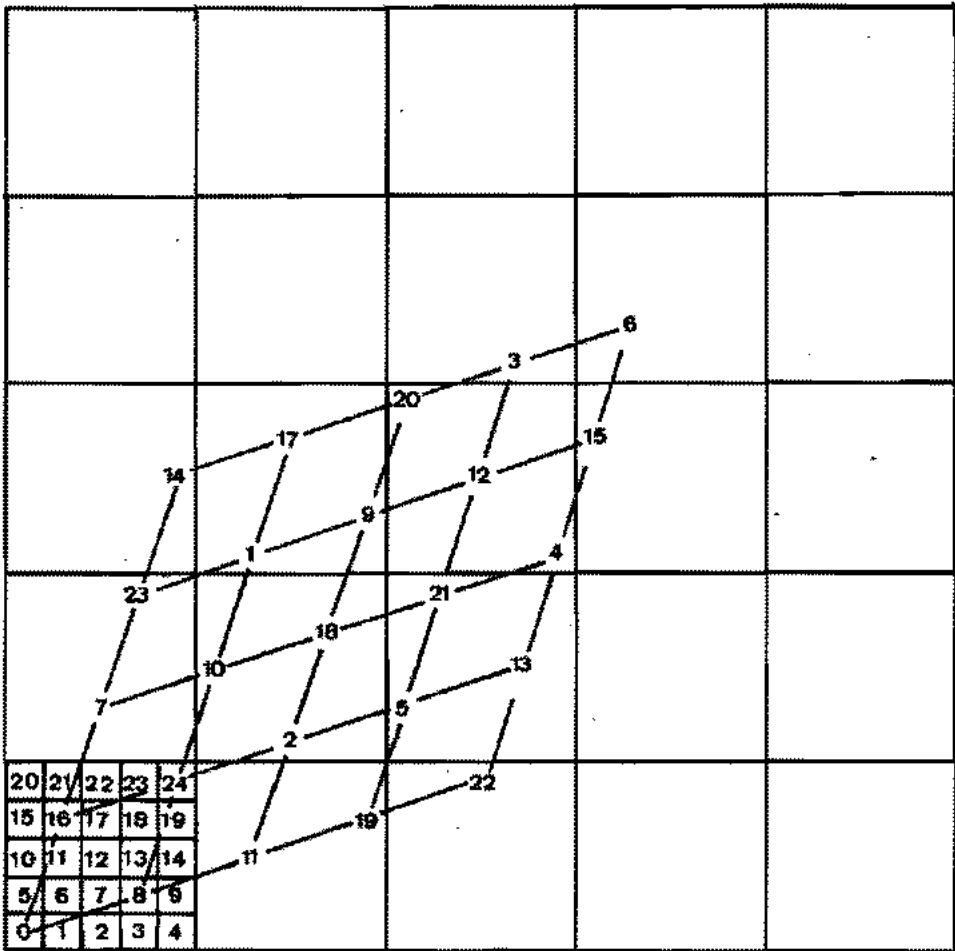
$$= \frac{n(n^2-1)}{2}$$

Ce qui montre que la direction (a,b) , si $ab \neq 0$, est une direction magique.

A partir de cette propriété remarquable, on peut construire un carré magique d'ordre n premier par un procédé géométrique.

En effet, il suffit de prendre un point et un vecteur $\vec{u}(\frac{a}{b})$ ($ab \neq 0$) et le vecteur $\vec{v}(\frac{b}{a})$ (ces deux vecteurs étant de directions symétriques par rapport à la diagonale), et de "développer" le carré selon ces deux directions et à partir du point choisi.

Au niveau du CM.2, ceci se présente comme un déplacement sur un quadrillage infini où le carré de côté n se reproduit indéfiniment.

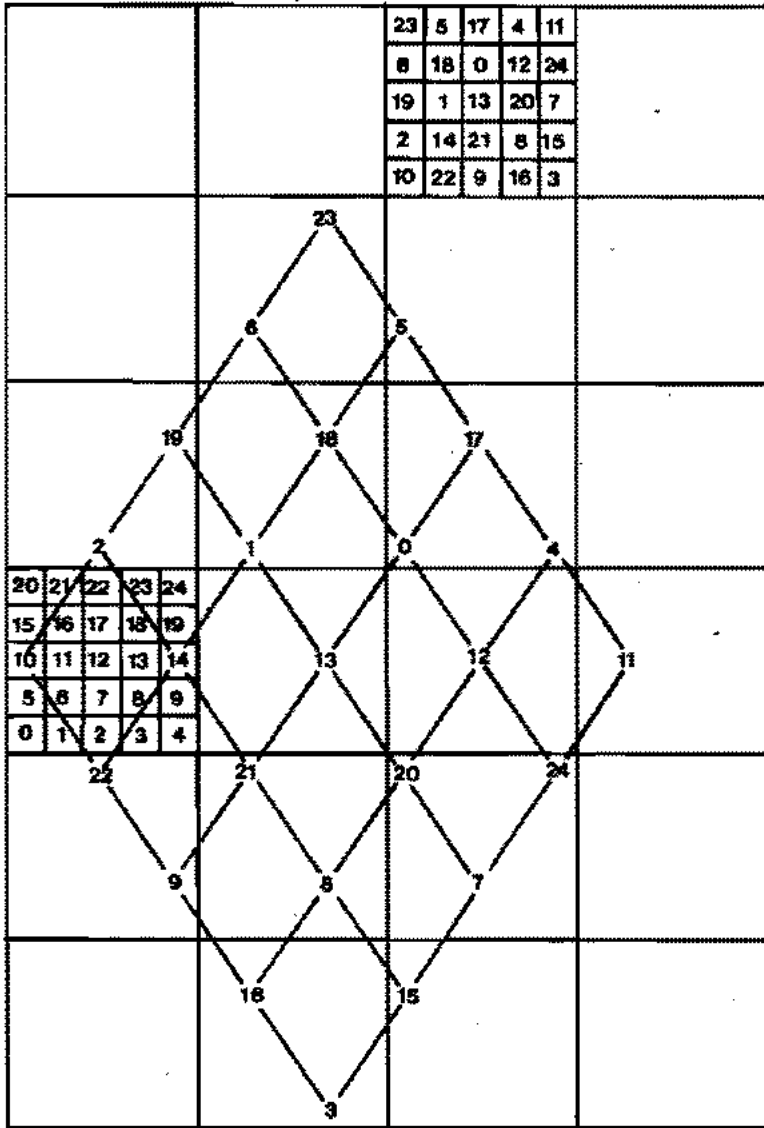


14	17	20	3	6
23	1	9	12	15
7	10	18	21	4
16	24	2	5	13
0	8	11	19	22

On a choisi ici $a = 3, b = 1$.

Remarque : Il est possible de développer le carré symétriquement par rapport à une des deux médianes qui sont magiques, le carré obtenu aura une diagonale non magique, sauf si on fait en sorte que le centre du carré initial se transforme en le centre du carré final.

Dans la figure ci-dessous la diagonale secondaire est non magique.



La géométrie à l'école élémentaire

Animateur : D. DUCLOS

La séance débute par les questions suivantes :

- Est-ce qu'on pourrait définir le domaine de la géométrie ?
- Que faut-il proposer aux enfants avant la classe de sixième ?
- En quoi la nouvelle géométrie diffère-t-elle de l'ancienne ? Il s'agit avant tout d'une nouvelle manière plus dynamique de la présenter et de l'exploiter.

Un participant indique trois directions de travail :

- Observation des êtres géométriques
- Construction
- Transformation.

Le problème du *vocabulaire* est alors posé : "côtés égaux", "angle" etc ...

Il faut s'entendre sur un minimum.

Pour les "côtés égaux", la difficulté apparaît lorsqu'on observe deux figures et que l'on veut les superposer. On constate que des segments ont même longueur. Le maître doit être discret, muet, et les enfants ne prononceront pas le mot "égal".

On peut dire côtés isométriques ou de même longueur.

On peut aussi faire de la géométrie sans utiliser de terminologie.

Autre question : On fait des transformations sur des réseaux. Est-ce naturel ? Il semble que ce soit très algébrique.

Réponse : C'est une gradation des difficultés. Il est très difficile de travailler sur un plan. D'autre part, pour les coordonnées d'un point, on utilise surtout des couples d'entiers.

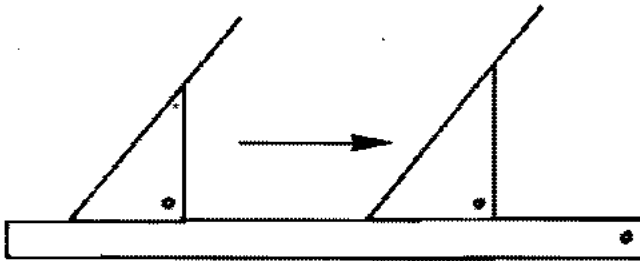
Si on veut travailler sur une figure, on la trace, on la découpe, on étudie son trajet. C'est une sorte d'animation. On peut aller d'une direction dans une autre direction. Il faut faire prendre conscience de la nécessité d'une orientation, de la nécessité d'un repérage (exemple du globe terrestre).

On peut prendre des réseaux finis. Il y a une meilleure imprégnation pédagogique lorsqu'on travaille sur un modèle fini.

On peut craindre de créer des habitudes (pour l'élève) de travailler sur le discret, le discontinu et qu'il n'éprouve par la suite des difficultés pour les réels. Mais il faut démultiplier le processus d'apprentissage et en affinant le quadrillage on fait une approche de \mathbb{R} .

Le *parallélisme*, comment l'aborder ?

Une règle qui roule (translateur) permet de tracer des parallèles. C'est un appareil à tracer des parallèles de même que la règle est un appareil à tracer des droites.



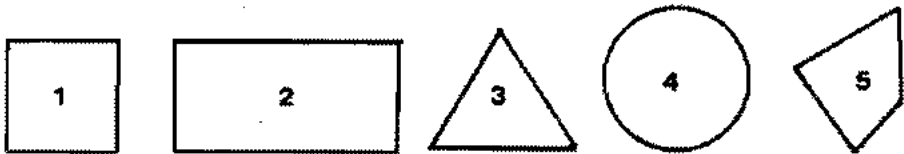
Beaucoup pensent que c'est une notion intuitive et qu'il faut montrer que la distance est constante.

Pour d'autres, la notion de distance sera introduite ultérieurement.

Il serait intéressant de déterminer les notions essentielles, les concepts primitifs (rond, carré, ...)

Ainsi à partir d'un ensemble de figures on observe les propriétés suivantes :

La figure n° 1 est un carré.



Il y a 8 façons de le faire coïncider avec son calque.

4 façons pour le rectangle,

une infinité de façons pour le disque.

On fait des pliages, on note les plis (axes de symétrie) d'où une classification des figures.

Le rectangle fait partie de "la famille de ceux qui peuvent coïncider par deux pliages".

On pourrait travailler sur des notions *topologiques* (qui plaisent aux enfants) avant de travailler sur des notions plus difficiles comme la perpendicularité, le parallélisme, la distance ... etc ... C'est une approche plus globale de l'espace.

Exemples :

— La géométrie sur un ballon permet de découvrir la propriété topologique : "un point situé sur la ligne reste sur la ligne après déformation".

— Les notions d'intérieur, d'extérieur, de frontière, de ligne, de connexion permettent la créativité de l'enfant.

— Construire un labyrinthe à quatre régions.

La topologie prépare aussi l'étude des solides :

— "construire un solide à partir d'un patron"

— un ballon et une tasse sans queue sont "topologiquement équivalents" etc ...

— avec une feuille de papier peut-on construire un ballon ?

Un participant pose le problème de la *finalité* de l'enseignement de la géométrie (à l'école élémentaire).

S'agit-il de l'acquisition d'un certain nombre de concepts ? ou de l'adaptation à un problème quelconque, c'est-à-dire l'apprentissage de la mathématisation d'une situation ?

Il semble que ce soit un début de mathématisation et qu'il faille essayer de dégager des concepts qui permettent de classer d'autres situations dans une situation déjà rencontrée.

La *géométrie projective* est un domaine intéressant à explorer. Toutes les propriétés topologiques sont conservées.

Exemples :

● L'ombre par le soleil d'une fenêtre rectangulaire a la forme d'un parallélogramme, quelle que soit la position du plan de projection par rapport au plan de la fenêtre (exceptionnellement un segment de droite).

● La projection plane d'un triangle est toujours un triangle (exceptionnellement un segment de droite).

En projection ponctuelle, lorsque le plan de figure est parallèle au plan de projection, la figure et sa transformée sont homothétiques l'une de l'autre.

Mais cela demande une mise en scène, une installation matérielle spéciale.

Conclusion : Il existe des difficultés pour les maîtres du 1er degré, n'ayant pas de formation spéciale. Ces derniers réclament quelques lignes directrices pour avoir une route commune.

Et l'A.P.M. devrait agir dans ce sens dans les différentes académies.

Les opérateurs numériques

Animateur : M. ROBERT

Les opérateurs numériques étudiés sont des fonctions de N vers N définies par le moule

$$\dots * n = \dots$$

n étant un naturel quelconque, et $*$ désignant l'une des quatre opérations dans N : addition, soustraction, multiplication, division. S'il s'agit de la division, on opère dans $N^* = N - \{0\}$.

L'opérateur est noté \hat{n} .

1 - Ensemble des opérateurs définis à partir de l'addition

$$O_+ = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots\}$$

La loi composition de deux opérateurs est une loi de composition interne dans O_+ , on la désigne par τ

$$\hat{n} \tau \hat{p} = \frac{\hat{n}}{\hat{n} + \hat{p}}$$

2 - Ensemble des opérateurs définis à partir de la soustraction

$$O_- = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots\}$$

τ est une loi de composition interne dans O_-

$$\bar{n} \tau \bar{p} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + \bar{p}}$$

3 - Réunion de ces deux ensembles

$$O_+ \cup O_- = \{\dots \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots\}$$

Dans cet ensemble le composé de la forme $\bar{n} \tau \bar{p}$ est toujours défini.

Mais le composé de la forme $\bar{n} \tau \hat{p}$ n'est pas défini $\left(\frac{\bar{n}}{\hat{p}} + \frac{\hat{0}}{\hat{0}} \right)$. C'est une fonction qui n'appartient pas à l'ensemble considéré.

- En "agrandissant" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux composés on montre que τ est une loi de composition interne dans le nouvel ensemble Ω

- On introduit dans Ω une relation d'équivalence \mathfrak{R} :

Deux éléments de Ω sont équivalents s'il existe un naturel q tel qu'ils donnent la même image à tout naturel $x \geq q$.

Ω est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\{\hat{1}, \bar{1} \tau \hat{2}, \bar{2} \tau \hat{3}, \dots\}$$

La relation d'équivalence est compatible avec la loi τ . On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en modifiant le sens de ce

mot. La loi de composition est alors la loi induite par τ sur les classes. C'est une loi de composition interne dans l'ensemble $\frac{\mathbb{N}}{\mathcal{A}}$, qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

4 — Ensemble des opérateurs définis à partir de la multiplication

$$O_x = \{ \overset{x}{0}, \overset{x}{1}, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots \}$$

τ est une loi de composition interne dans O_x , il en est de même dans

$$O_x^* = \{ \overset{x}{1}, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots \}$$

5 — Ensemble des opérateurs définis à partir de la division

$$O_x^* = \{ \overset{x}{1}, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots \}$$

τ est une loi de composition interne dans O_x^*

6 — Réunion des ensembles O_x^* et O_x^*

$$O_x^* \cup O_x^* = \{ \dots, \overset{x}{3}, \overset{x}{2}, \overset{x}{1}, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots \}$$

Le composé de la forme $\overset{x}{n} \tau \overset{x}{p}$ n'est défini que si un des naturels n ou p est multiple de l'autre.

S'il n'en est pas ainsi, le composé $\overset{x}{n} \tau \overset{x}{p}$ est un nouvel opérateur n'appartenant pas à l'ensemble précédent.

Il est noté $\frac{\overset{x}{n}}{\overset{x}{p}}$

Le composé $\frac{\overset{x}{6}}{\overset{x}{4}}$ désigne la même fonction que $\frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{2}}$. Donc

$$\frac{\overset{x}{6}}{\overset{x}{4}} = \frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{2}} \text{ et plus généralement } \frac{\overset{x}{3k}}{\overset{x}{2}} = \frac{\overset{x}{3k}}{\overset{x}{2k}}$$

Nous ne garderons pour cet opérateur que la notation : $\frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{2}}$

"Agrandissons" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux opérateurs :

$$\Omega = \{ \overset{x}{1}, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots, \overset{x}{2}, \overset{x}{3}, \dots, \frac{\overset{x}{2}}{\overset{x}{3}}, \frac{\overset{x}{2}}{\overset{x}{5}}, \frac{\overset{x}{2}}{\overset{x}{7}}, \dots, \frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{2}}, \frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{4}}, \frac{\overset{x}{3}}{\overset{x}{5}}, \dots \}$$

Dans cet ensemble un composé du type $\overset{x}{n} \tau \overset{x}{p}$ est toujours défini.

De plus $\overset{x}{2} \tau \overset{x}{3} = \overset{x}{3} \tau \overset{x}{2}$

Mais le composé $\overset{x}{4} \tau \overset{x}{6}$ n'est pas défini. Il en est ainsi pour tout composé de la forme $\overset{x}{n} \tau \overset{x}{p}$ lorsque les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Les composés $\frac{\overset{x}{n}}{\overset{x}{p}} \tau \overset{x}{q}$ et $\overset{x}{q} \tau \frac{\overset{x}{n}}{\overset{x}{p}}$ sont toujours définis. Mais les composés

$\frac{x}{p} \tau \frac{x}{q}, \dot{q} \tau \frac{x}{n}, \frac{x}{p} \tau \frac{x}{r}$ ne sont en général pas définis.

Ainsi

$$\frac{\frac{x}{3}}{4} \tau \frac{\frac{x}{4}}{3} \text{ n'est pas défini}$$

Remarque

Nous ne rencontrons pas l'écriture " $\frac{3}{2}$ ". Appellerons-nous "fraction" l'opérateur $\frac{x}{2}$?

Si nous avons $\frac{x}{2} : 4 \mapsto 6$

dirons-nous que la "fraction $\frac{3}{2}$ " donne à 4 pour image 6 ?

Pourrions-nous dire que 6 est le "produit" de 4 par la "fraction $\frac{3}{2}$ " ?

Ce serait parler d'une opération inconnue faisant intervenir un "nombre" inconnu !

Par convention, nous pouvons écrire l'expression $(4 \times 3) : 2$ sous la forme abrégée $4 \times \frac{3}{2}$, mais alors ce signe "X" n'est pas un signe de multiplication.

D'autre part, nous pouvons appeler "produit" le composé, s'il existe, de deux éléments de Ω par τ . Mais désigner cette opération dans Ω par "X" paraît une grave confusion entre une opération sur les naturels et une opération sur les fonctions..

De toutes façons, l'expression "produit de deux fractions" est généralement dépourvue de sens dans Ω .

7 — On peut "agrandir" l'ensemble Ω par l'introduction des opérateurs du type

$$\dot{n} \times \frac{x}{p}$$

pour lesquels les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Nous obtenons ainsi un nouvel ensemble Ω' dans lequel :

- a) τ est une loi de composition interne ;
- b) on peut introduire une relation d'équivalence \mathcal{R} : deux éléments de Ω' sont équivalents s'il existe un naturel p tel qu'ils donnent la même image à tous les multiples de p . Ω' est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\left\{ \frac{x}{3}, \dot{6} \tau \frac{x}{4}, \dot{9} \tau \frac{x}{6}, \dots \right\}$$

- c) la relation d'équivalence est compatible avec la loi τ . On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en changeant le sens de ce

mot. La loi de composition de ces nouveaux "opérateurs" est alors la loi induite par Γ sur les classes. C'est une loi de composition interne dans l'ensemble Ω'/\mathcal{R} , qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à celui des rationnels strictement positifs muni de la multiplication.

Conclusion

Il est souhaitable de ne pas utiliser le mot "fraction" dans l'enseignement élémentaire, de se borner à l'étude des opérateurs n ou n , de la composition de deux opérateurs de même type et, dans quelques cas précis, de la composition de deux opérateurs de types différents.

Opérateurs numériques (suite)

Rapporteurs : Janine TOUPIN et Alain BOUVIER

Pendant et après l'exposé de Madame ROBERT, s'établit une discussion générale entre les participants.

Les participants sont d'accord avec Madame Robert, pour conclure à l'impasse de la construction présentée puisqu'elle ne permet pas de retrouver le corps des nombres rationnels ($2/3 \times 3/2 \neq 1$).

La lourdeur de cette construction la condamne du point de vue pédagogique ; cette "pseudo-théorie", ne reposant en outre sur aucun fondement mathématique, apparaît comme particulièrement dangereuse.

Dans l'étude et l'exploitation des opérateurs numériques, certains suggèrent d'aborder les restrictions de ces opérateurs, ces dernières étant définies sur une partie de \mathbb{N} .

Le problème du recyclage a été soulevé. Les instituteurs présents témoignent de leur inquiétude. Tous s'accordent à trouver ridicule le stage de six mois et jugent indispensable la formation permanente.

Les "recycleurs" sont ainsi amenés à poser les questions suivantes :

- Doit-on bloquer ce stage ?
- Faut-il donner un certain savoir ou traiter de façon prioritaire certains sujets auxquels les recyclés sont sensibles ? par exemple, le signe d'égalité ?

Musique et mathématique à l'école maternelle

Animatrice : Angélique FULIN

Rapporteur : Monique GOUSSIEZ

Le sujet de ce groupe de travail avait suscité un intérêt certain et les inscriptions y étaient nombreuses. Cependant ni l'animatrice ni les participants ne se sont résolus à rester dans les limites qu'il imposait. Les concerts de la veille avaient, de différentes manières, ouvert des horizons plus vastes. Il était impossible de ne pas s'y référer pour apprendre à connaître mieux "*Nos Cousins de la Musique*".

La parenté est lointaine, depuis Pythagore, et nombreux sont ceux qui, aujourd'hui encore, cultivent simultanément les arts libéraux du Quadrivium. L'A.P.M. se devait, dans un moderne souci d'interdisciplinarité, de contribuer à la survivance de l'humanisme ancien. Les temps semblaient favorables : nos compositeurs contemporains ont presque tous une formation de mathématiciens ou de physiciens : leur musique s'est dite "sérielle" puis "stochastique". La musique concrète elle-même, tout empirique au départ, dose et varie les sons avec une précision, une perfection mathématique.

Mais qu'en est-il au niveau de l'enseignement ? Nous trouvons là soit simplement des procédés et un langage mathématiques, soit surtout un esprit de recherche pédagogique commun à toutes les disciplines. En fait, les questions soulevées par l'auditoire auraient pu être posées à quelque spécialiste que ce fût :

- Doit-on utiliser dès le départ un langage universel déjà connu ?
- Les enfants doivent-ils refaire le chemin chronologique de l'humanité ?
- N'ont-ils pas plus de facilité à emprunter, aux côtés de leurs parents, le chemin jalonné par les grandes oeuvres dont nous avons convenu qu'elles constituent notre "culture" ?
- Faut-il donner de hauts exemples ?
- Certaines conventions sont-elles inéluctables ?
- Dans quelle mesure l'enfant doit-il (peut-il) être réceptif ou créateur ?

A l'instar de nos plus réputés animateurs A.P.M., c'est avec une foi souriante, chaleureuse, étayée, efficace, qu'Angélique Fulin, sans vouloir toutefois donner "la" réponse, entraîne ses interlocuteurs à creuser davantage les questions, apportant tout le poids de son savoir et de son expérimentation personnels. A chaque question, des exemples de réponses mêlant procédés, moyens, finalités, interviennent.

Evoque-t-on les particularismes de chaque folklore et la difficulté d'approche réelle des différentes *musiques populaires* ? Une étude

convergente permet de dégager des constantes universelles : l'octave, la quarte, la quinte, phénomènes physiques, rapports numériques simples de fréquences, perceptibles par les premiers harmoniques d'un fondamental, se retrouvent quasiment partout. Ces intervalles vont constituer le cadre de structures qui pourront s'organiser de différentes façons, chargeant de sens parfois opposés des éléments en apparence semblables : dans l'échelle pentatonique de la musique chinoise, la tierce mineure, intervalle mélodique conjoint, exprime le bien-être ; la tierce majeure, qui se présente comme un intervalle distendu, convient pour illustrer la douleur. Dans la musique européenne, la tierce majeure, intervalle harmonique intégré à l'accord parfait, donne une impression de plénitude, mais c'est autour de la tierce mineure mélodique que se chantent beaucoup de nos vieux refrains. Ajoutons qu'il ne faudrait pas réduire les chants du folklore aux transcriptions contestables que nous ont transmis de bonne foi les auteurs de recueils dont la valeur scientifique reste assez faible. Ignorants de cette affirmation que le rythme français est dominé par le "binaire", nos enfants se transmettent encore de bouche à oreille le rythme à cinq temps de "A ma main droite j'ai un rosier" ou de "J'ai descendu dans mon jardin".

Il conviendra de la même façon de se méfier de l'acquis culturel dont les morceaux de bravoure peuvent être dénaturés par une vulgarisation excessive, par l'esthétique nouvelle d'une époque pour laquelle ils n'ont pas été conçus, et ne sont plus, de toute façon, adaptés à notre genre de vie : le génie de Mozart extrapolait sur des perruques poudrées.

Le moment est alors venu de se poser plus précisément la question (préoccupation parallèle, là encore, à celle de nos mathématiciens) : "Qu'est-ce que la musique ?" — Une création humaine ? — Alors, le chant des oiseaux, non ? Un son électronique, oui ? — Peut-être est-elle un ensemble, à l'occasion un singleton, de sons "humanisés", c'est-à-dire perçus, interprétés par l'oreille et le cerveau. Le Musicien est-il forcément un "auteur", un "génie" ? — Le premier musicien n'est-il pas l'enfant, l'enfant au brin d'herbe tendu, à l'élastique vibrant, à l'assiette frappée ?

Le but du musicien-pédagogue est d'abord de faire s'exprimer, se développer la personnalité de l'enfant. Pour cela, il lui est nécessaire de savoir écouter celui-ci, de connaître ses possibilités, ses besoins dans tous les domaines. (Le riche moment que cette six ou septième année, où l'enfant affirme son équilibre psycho-moteur, organise autour de lui l'espace et le temps !). Il existe en France peu de travaux sur les débuts musicaux de l'enfant. L'écholalie, au joli nom, a jusqu'ici suscité peu de commentaires. Citons cependant quelques ouvrages :

— Psychologie des aptitudes musicales — Boris TEPLOV — P.U.F.

- Développement génétique de la perception musicale — Arlette ZENATTI — C.N.R.S.
- Le sens tonal chez l'enfant — Michel IMBERTY — C.N.R.S.
- Les bases psychologiques de l'éducation musicale — Edgar WILLEMS — Pro Musica, Bienne.
- Le rythme, la musique et l'éducation — Emille JAKUES-DALCROZE — Foetisch Lausanne.
- L'éducation musicale en Hongrie — Jacqueline RIBIERE-RAVERLAT — Leduc.
- Traité des objets sonores — Pierre SCHAEFFER — Seuil.

Il convient, et particulièrement en pédagogie de la musique, de respecter les trois démarches qui, bien que progressives, peuvent être simultanées :

- 1) travail sensori-moteur, essentiellement instinctif, qui correspond à un moment d'exploration et où la perception s'affine ;
- 2) contribution affective, nécessitant une motivation : on utilise la découverte, on la complète, on y répond ;
- 3) travail intellectuel : organisation, représentation écrite, codage.

Ce classement est à rapprocher de celui que propose Edgar Willems :

- 1) à la vie physiologique correspond l'instinct, spécialement celui du rythme (battements de la sève, du sang — cycles saisonniers) ;
- 2) à l'affectivité, la mélodie (gazouillement) ;
- 3) à l'intellect, l'harmonisation (com-préhension des accords, des dissonances).

(Edgar Willems ajoute une quatrième classe : l'élément "supra-intellectuel", aspiration vers un "pôle spirituel" à quoi il associe l'intuition, la création musicales).

Précisons pour chacun de ces classements que l'intersection des différents ordres est possible à tous les niveaux : l'invention d'un rythme simple, par frappés de mains, celle d'une mélodie, ne serait-elle que de sons consécutifs, sont déjà *improvisation* et peuvent être exploitées en vue d'une création. Encore faut-il que ces premières tentatives soient encouragées, ce que la pédagogie traditionnelle de la musique instrumentale a trop souvent négligé au profit d'un seul aspect : la reproduction d'oeuvres écrites. Ainsi ont été formés nos grands interprètes, instrumentistes brillants, virtuoses au service des génies créateurs. Se rend-on toujours exactement compte du caractère d'élite d'une telle éducation qui, par ailleurs, aliène l'enfant en le rendant rapidement prisonnier d'une technique et incapable d'une expression personnelle ?

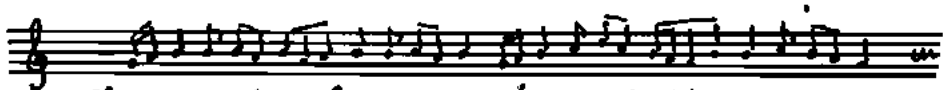
Mais qui dit *création* dit *composition*, choix de règles, de consignes de jeu. Il y aura pour les maîtres un grand intérêt à connaître la démarche des artistes contemporains car les trouvailles des enfants peuvent s'orienter inconsciemment sur les mêmes voies.

Ainsi en est-il dans le domaine du *rythme*.

Le rythme ne s'apprend pas : il vient, il se respire, il se sent, il se vit. Et non pas d'abord ce battement régulier qui n'est que la mesure, mais la phrase rythmée que l'enfant, encore incapable de compter, répète spontanément ou à laquelle il répond.

— Remarques : la latitude d'inventer une réponse personnelle éloigne la possibilité de jugements de valeur de la part des autres enfants ; on sait l'importance qu'accordent les psychologues à l'aptitude plus ou moins grande à reproduire un rythme ; défaillance notable des petits "intellectuels" qui veulent d'abord comprendre et dont la raison inhibe déjà les réflexes ; là comme en mathématique, l'enfant montre une facilité d'adaptation, une ouverture dont beaucoup d'adultes sont incapables — voir la sûreté avec laquelle il répète les rythmes syncopés des moindres chansons modernes ! Le fait qu'à l'armée certaines recrues soient physiquement incapables de marcher au pas est-il un contre-exemple ? — Au contraire, il est bien plutôt l'illustration d'une autre analogie mathématique-musique : le rythme militaire, traditionnel et imposé comme l'on sait, est mécanique, automatique ; c'est le rythme par division de la première page de nos anciens solfèges dont chacun se rappelle l'arbre très "mathématique" (au sens péjoratif !) Celui-ci donnant, d'évidence, la prépondérance au rythme binaire et invitant, pour marquer la mesure, à compter ! Or, battre une mesure à $3/4$, ce n'est pas compter : 1, 2, 3, c'est déjà valser ! —

Et qu'advient-il quand un musicien veut transcrire les pulsations irrégulières de la danse populaire ? quand Stravinsky veut contrarier tel rythme par d'autres totalement différents et faire exploser, dans certaines de ses oeuvres, ce qu'Henry Barraud appelle "une espèce de subversion rythmique" ? — (Pour comprendre les musiques d'aujourd'hui — Henry Barraud — Seuil) — Il n'est plus question d'admettre une fois pour toutes un système unique de références. Messiaen, lui, pour vaincre un automatisme qu'il juge néfaste, propose le rythme par multiplication : partir de la plus petite pulsation (ou) — le pas-unité dans la danse folklorique — et la multiplier librement ; librement mais non anarchiquement, comme le montre l'utilisation qu'il fait de la valeur ajoutée ou du "rythme non rétrogradable" (combinaison rythmique dans laquelle on rencontre la même succession de valeurs de notes, qu'elle soit lue de gauche à droite ou de droite à gauche — séquence "réfléchie", symétrique, qui coïncide avec son image-miroir, et ne peut donc être différenciée de sa propre rétrogradation) :



Chant populaire basque - unité de pulsation : la crotche



Mexicain : Quatre pour la fin du temps.

Exemple de valeur ajoutée



Mexicain : id.

rythme non intégrable

(unité de pulsation : la double crotche)

3 5 8 5 3 | 4 3 7 3 4 |

Hauteur des sons, autre terrain de recherches mais champ d'expériences tout-à-fait analogue pour Stockhausen qui voit dans les qualités du son quelles qu'elles soient les manifestations d'un seul et unique phénomène vibratoire dont la fréquence est perçue comme hauteur pour les périodes comprises entre 1/3.200ème et 1/16ème de seconde,, comme durée entre 1/16ème et 8 secondes et comme forme entre 8 secondes et 15 minutes.

La tonalité est-elle convention ou structure naturelle ? L'enfant, d'une part influencé par son milieu et nos habitudes, d'autre part dépendant de sa propre perception et de son stade génétique, est-il "tonal" ou "atonal" ? La désagrégation du diatonisme par ses hardiesses de plus en plus grandes (polytonalité, chromatisme, dodéca-phonisme) s'explique-t-elle par la pure spéculation ou par la redécouverte de possibilités latentes que nous avait fait négliger le trop fini système tonal ? Ne faut-il pas se garder de répondre et chercher toujours davantage, d'abord avec les enfants ?

Teplov a expérimenté qu'un enfant — voire un adulte musicalement inculte — ne perçoit pas de différence à l'audition d'un chant accompagné d'une part dans le ton exact, d'autre part dans un ton différent, ce qui sonne étonnamment faux pour une oreille exercée. Un enfant qui invente une chanson ou une phrase musicale sur quelques lames de xylophone ne termine pas nécessairement par une tonique et si, un début de phrase lui étant suggéré, il achève alors cette phrase par une cadence tonale, on peut supposer que ce début était suffisamment

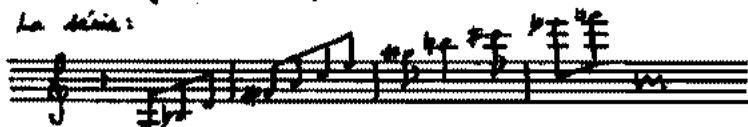
inscrit dans le système tonal pour que la convention de la formule finale soit implicite et impose d'elle-même le modèle connu.

Éducation du sens mélodique : obtenir qu'avec le moindre objet (bâtonnets, couvercles métalliques, boîtes remplies de graines, bouteilles d'eau) l'enfant, produisant un bruit, l'écoute, le cultive, l'affine, faisant de ce bruit un son ; qu'avec deux ou trois lames de carillon il organise toutes les séries de sons possibles ; qu'il alterne des timbres, choisissant parmi les diverses combinaisons soit celle qui lui plaît le plus, soit celle qui illustre le mieux telle idée à exprimer. Jouer à trouver chacun, successivement, une note différente de celle des autres, à tenir tous ensemble chacun sa note, quitte à revenir enfin à l'unisson. Nous revoici tout près des règles de composition contemporaines.

L'observation attentive de partitions permet de mieux mesurer cette évidence : dans son Concerto pour violon, Alban Berg a organisé les 12 sons de la série à partir des 4 notes fondamentales du violon et d'un choral de Bach, puis il joue à renverser les intervalles obtenus, à modifier les rythmes, à créer des polyphonies, faisant oublier la technique dodécaphonique au profit d'une intense émotion dramatique :

Alban Berg : Concerto pour violon

La série :



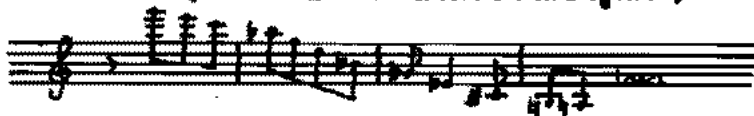
12 ordres : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

intervalles : 2^m 2^m 3^m 2^m 2^m 3^m 2^m 2^m 2^m 2^m 2^m 2^m

cadenzà viol. du violon : 1-3-5-7

Choral de Bach : 8-10-11-12

Série descendante (mêmes ordres des intervalles - même rythme)

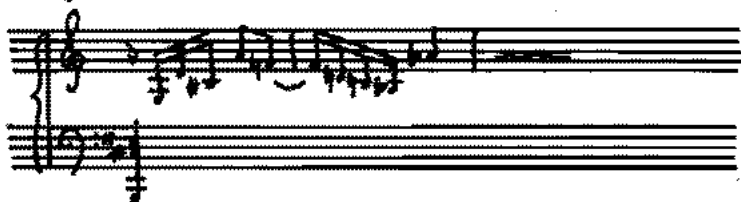


Autre présentation de la série descendante :

sons 1-2-3 groupés en accord parfait

modification du rythme

changements d'octaves



Au delà du dodécaphonisme, Xenakis ou Ohana enrichissent l'échelle par la présence des quarts de tons ou des tiers de tons, créant ainsi leurs palettes personnelles comme le font nos enfants avec leurs "bouteillophones" ou leurs cithares désaccordées, soucieux de ranger les éléments de l'ensemble obtenu suivant des ordres déterminés. Et ce seront alors de nouveaux "modes" à l'instar de Messiaen et de ses "modes à transpositions limitées"; ou bien, les enfants constitueront des "réservoirs" de notes dont ils feront des "formes ouvertes" ainsi que Boucourechliev laissant le choix du parcours libre d'un îlot à l'autre de ses Archipels. Nous voici donc conduits aux plus récentes partitions qui réservent d'autres surprises, d'autres parallèles avec les recherches poursuivies dans nos classes : inventions dans le codage du langage musical qui ne s'exprime plus uniquement sur des portées, mais par des procédés si différents suivant les auteurs que plusieurs pages préalables sont nécessaires pour l'explication de ce codage — symboles personnels, signes de communication ... Quant à accuser les compositeurs modernes de fantaisie et leurs oeuvres de facilité, il n'est que de lire leurs écrits ou de considérer leurs partitions pour écarter ce préjugé.

Créateur plus modeste mais non plus négligeable, l'enfant peut aller plus loin que sa spontanéité qui n'est qu'une première étape. Familiarisé d'emblée avec les méthodes d'audition active et d'improvisation, il s'habitue au langage musical et l'utilise avec aisance pour compléter ses moyens d'expression. Un cours préparatoire de Corbeil a travaillé toute l'année de cette façon : après avoir assisté à une exposition d'automates, il a fabriqué son propre robot ; celui-ci est devenu l'inspirateur d'une musique puis d'une danse "espacienne", tandis que s'est créé tout un jeu dramatique mis en scène autour d'une vaste fresque et que s'est progressivement réalisée par l'invention de symboles une partition très précise de l'"oeuvre".

Créativité chez l'enfant, participation inspirée de l'exécutant et même de l'auditeur "actif", foisonnement de recherches et d'expérimentations de la part des compositeurs, à tous les niveaux, la musique d'aujourd'hui se vit.

La Charte de CHAMBERY a marqué les cinq années qui viennent de s'écouler.

La Charte de CAEN jouera un rôle important dans les années à venir.

Reportez-vous sans tarder à la page 713.

L'école moderne et les mathématiques

Animateur : DELBASTY

Rapporteurs : R. UEBERSCHLAG, O. ROBIOLLE

Le groupe qui s'est réuni avec Delbasty comprenait une trentaine de personnes et la discussion s'est établie très librement autour des thèmes suivants :

- 1/ Quelles mathématiques apprendre aux élèves ?
- 2/ Quel est le rôle de l'école ?
- 3/ Comment démarrer dans sa classe ?

1. Delbasty raconte comment il est arrivé à la mathématique : à l'École Normale, on lui avait appris à utiliser différents matériels ; il s'est rendu compte que le calcul n'intéressait pas les enfants et que les exercices qu'il leur proposait transformaient ceux-ci en singes savants. Il redoute qu'une certaine façon d'enseigner la mathématique moderne conduise à utiliser un matériel d'école au lieu de donner à l'école sa vraie destination qui est de faire aimer la vie. Actuellement, ce qu'il y a de plus urgent, c'est d'apprendre aux enfants à voir. Si on éveille l'enfant au milieu, il mathématise naturellement. L'école devrait regarder dans l'enfance ce qui est éveil. Les enfants n'ont pas besoin de structures imposées pour apprendre le langage, il faut leur laisser le temps, le droit à la parole.

Une auditrice fait remarquer que la mathématique s'exerce et qu'elle n'est pas seulement affaire d'intuition ; il faut trouver un lieu d'exercice, c'est l'école car on ne peut confier à la famille le soin de former intellectuellement les enfants. Delbasty répond qu'il ne tient pas à supprimer l'école mais la situation d'élèves dans laquelle on place les enfants. Il examine comment naturellement les enfants découvrent des structures : pour le calcul des probabilités, il constate que l'enfant doit vaincre d'abord des superstitions ancestrales : en lançant une pièce de multiples fois pour compter la répartition des "pile ou face" il ne se contente pas de constater, il veut agir sur le résultat. Ainsi, il parle à sa pièce, il se met en colère, il ment, il lui attribue un désir de le contraire. Il faut qu'un compagnon décide ("il faut nous mettre libre") pour que la classe procède à cent mille jets de pièces pour vérifier l'effet du hasard. Delbasty conclut que ce qui est important est d'arriver à l'état d'enfance et d'empirisme. En lisant Boole, Galois, Helmholtz, il a vérifié que ces auteurs avaient eu le génie de la simplification et procédé par tâtonnement empirique, par économie d'énergie.

2. Delbasty précise que son école n'est pas celle de la non-directivité : il a un emploi du temps mais il accorde toujours un temps

suffisant à se mettre à l'écoute des enfants. Il estime que les enfants ne doivent pas tellement acquérir des connaissances mais plutôt se faire des racines. Ainsi, ils gardent l'habitude de lever la tête. Plus tard, même avec un métier ingrat, ils resteront positifs. Il cite l'exemple d'un de ses élèves qui revient le soir, non pas pour se plaindre de son métier actuel (cuisinier) mais pour lui annoncer qu'il est sûr de faire mieux : "tu verras ce dont je suis capable quand je trouverai autre chose..."

Il estime que la pédagogie a peur de la vie, elle est en danger de vie. Actuellement, selon lui, les enseignants devraient être préoccupés par la défense de l'existence humaine, sa survie. On n'a pas besoin de grammaire, on a besoin de dire non. Les enseignants, comme les intellectuels, se consolent par la grammaire, les mathématiques modernes, mais ils sont incapables d'actions civiques, c'est-à-dire de tirer les conséquences de la science actuelle. Rostand parle dans le désert. Il faut rendre les choses biologiques et non logiques, il faut craindre une grande dessiccation par l'école.

On objecte que la renaissance s'est faite en réaction contre une vie trop primitive, trop naturelle. Delbasty ne conçoit pas la renaissance comme un phénomène intellectuel mais comme le fleurissement de la sensibilité populaire. L'école, de même, ne devrait pas transmettre les connaissances (sauf secondairement), elle devrait enseigner la création, développer la fibre créatrice et contestataire.

3. Quelques camarades se plaignent d'avoir échoué en appliquant les méthodes Freinet. Ils font remarquer à Delbasty que c'est le fait de travailler à la campagne qui lui a permis d'enseigner ainsi. Réponse : si tu ne réussis pas, c'est parce que tu es trop orgueilleux, et nous le sommes tous. Il faut démarrer par le petit, c'est-à-dire en modifiant un détail secondaire. Notre classe est en route lorsque nos enfants ont un peu plus de confiance en eux-mêmes. Pour cela, nous utilisons un certain nombre de techniques de communication. Mais ces techniques sont parfois détournées de leur destination. Ainsi, des correspondants échangent des étiquettes de fromages alors que les enfants voudraient savoir comment on vit ailleurs, ce qu'on y invente, ce qu'on y cherche.

Travailler à la campagne, ce n'est pas un privilège, c'est travailler avec des gens méfiants, réservés, hostiles à la nouveauté. Il faut de nombreuses années pour conquérir le milieu.

Question : que faire des enfants qui ne veulent pas s'engager dans un travail ?

Réponse : si des jeunes refusent le travail, c'est parce qu'on charge la jeunesse de toute une pathologie.

Il faut enfin se méfier des mots. Il y a des gens qui attendent qu'on invente un mot nouveau pour agir. Ainsi, la pédagogie d'attente n'existe pas car personne n'aime attendre.

En ce qui concerne un enseignement individuel, Delbasty pense avant tout que la classe doit vivre pour que les enfants s'enrichissent les uns les autres. L'acquisition de la mémoire se fait par le corps, par les pieds, et non seulement par l'exercice intellectuel : on perd les réflexes de faire quand on sait trop.

On s'aperçoit que cette séance n'a pas été consacrée exclusivement à la mathématique, mais a cherché essentiellement l'action et la responsabilité des enseignants.

Calcul numérique à l'école élémentaire

Animateur : M. CREPIN

1. Utilisation du signe =

C'est, en première approche, un signe sténographique qui correspond à un moule du type : ...=...

Il y a égalité au niveau des *représentants* d'une même chose, et non au niveau des *représentés*.

On peut écrire $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4$

mais on ne peut écrire 3 billes rouges = 3 billes rouges.

En fait, la relation "... est égal à ..." ou "égale" est une relation d'équivalence : les différentes propriétés de cette relation permettent de préciser certaines utilisations du signe =

Réflexivité

On peut donc écrire $3 = 3$

(ceci était déconseillé, voire interdit, dans les instructions de 1945).

Symétrie

Ceci est très important car en raison de notre système d'écriture, on a trop tendance à favoriser la lecture de gauche à droite.

Exemple 1 : $3 + 5 = 8$ mais aussi $8 = 3 + 5$.

La deuxième écriture étant favorisée à l'école primaire par ce qu'on appelle "les décompositions des nombres" : ces dernières seront très utiles au niveau de la technique des opérations.

$$13 \times 4 = (10 + 3) \times 4 = \dots$$

Il faut aussi remarquer pour la première écriture $3 + 5 = 8$ que $(3 + 5)$ et 8 jouent le même rôle : c'est une écriture "statique" et non dynamique : il faudra dans cet esprit éviter de dire " $3 + 5$ fait 8 ", laquelle relation n'est pas symétrique (la réciproque serait : 8 est fait par $3 + 5$? !).

Exemple 2 : $\forall_n a, \forall_n b, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Il est évident que dans l'optique "factorisation", c'est dans le sens droite — gauche que l'on utilise le plus l'égalité.

Il faudra donc dans cette optique conditionner dès l'école primaire la symétrie de la relation.

Transitivité

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 \\ 3 \times 4 = 144 : 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 3 + 3 + 3 = 144 : 12$$

Cette transitivité permet d'écrire une suite d'égalités :

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 144 : 12$$

Nous abordons à partir de cet exemple et en conclusion le fait que l'égalité a pour but de mettre en valeur les multiples écritures d'un même nombre.

2. Le calcul numérique

Il doit être basé sur la lecture et l'exploitation des tables d'addition et de multiplication.

Celle-ci permettront (à partir de nombreux exemples) l'approche des *propriétés des opérations*, sans la compréhension desquelles il ne peut y avoir de calcul numérique.

Dans un deuxième temps, le but du calcul numérique sera de décoder des situations concrètes.

Pour terminer cette présentation du calcul numérique et avant d'aborder le problème des techniques, nous pouvons dire qu'il y a peu de modèles (addition et multiplication) mais de nombreuses écritures (provenant des propriétés).

3. Opérateurs

Il ne rentrait pas dans le cadre de ce groupe de travail d'aborder le problème épineux de l'introduction des opérateurs à l'École Primaire.

D'autres groupes de travail se sont penchés sur la question (voir en particulier les articles de Madame Robert et de F. Colmez dans "La Mathématique à l'École Primaire").

Cependant il est permis de penser que si l'approche théorique des opérateurs, approche qui déboucherait sur la notion d'application de N ou de fonction

dans N est difficile à l'école primaire en raison du fait qu'on travaille sur des ensembles numériques finis, les opérateurs présentent un intérêt dans la mesure où ils *aident au calcul numérique* en variant les situations et les présentations.

C'est cette variété de présentations qui d'après les commentaires semble dominer l'esprit du programme rénové de 1970.

En particulier, la présentation de la soustraction à partir de l'addition, et de la division à partir de la multiplication, apparaissent clairement par cette notation.

4. Techniques opératoires

Le problème des techniques opératoires paraît être un bon exemple de l'esprit du *programme rénové*, à savoir qu'il n'y a pas de changement sur le fond, mais sur la forme.

Ce n'est pas un nouveau programme quant au contenu, mais le même programme avec des méthodes différentes.

L'opération fondamentale est l'*addition*.

Le fait que ce soit la seule opération au programme du C.P. doit permettre de mieux l'appréhender, en partant de la table, et en étudiant ses propriétés sur de nombreux exemples.

Il convient de distinguer deux choses pour les techniques opératoires :

- le niveau mathématique
- le niveau pédagogique.

a) le niveau mathématique

● *soustraction*

La recherche de la différence se présente comme une *équation*, abordée dès la fin du C.P. comme "exercices à trous".

La recherche de la solution se fait à partir de la table.

● *multiplication*

C'est une addition répétée.

Ceci apparaît très nettement dans la construction des tables de multiplication.

Pour bien faire appréhender cette construction, il convient de varier les exemples, et nous voyons ici l'intérêt de la construction des tables en base quelconque.

A ce propos, il faut bien remarquer que le but de la numération dans une base autre que dix n'est pas de faire du codage et du décodage, mais bien de dégager les structures et les propriétés des opérations en "cassant les habitudes".

Remarque : Au niveau du maître un exercice très intéressant est, pour une opération donnée en base dix, de faire la même opération dans une autre base : l'habitude et la mémorisation ne jouant plus, nous nous rendons bien mieux compte des difficultés que peut avoir l'élève.

● *division*

Elle se présente à partir de la multiplication de la même manière que la soustraction à partir de l'addition.

Le but donc de ce niveau mathématique est de faire comprendre le lien existant entre ces différentes opérations.

Le problème de la technique va en découler, en précisant bien au départ que, pour chaque opération, nous connaissons une *technique générale bien élaborée*, mais qu'il convient ici de ne rien imposer (contrairement aux définitions et aux propriétés) et de faire découvrir la technique par les enfants.

b) *le niveau pédagogique*

C'est précisément à ce niveau qu'intervient la découverte des techniques opératoires (et pas obligatoirement de la technique "idéale").

Il est bon à ce propos de rappeler deux choses :

— il existe des techniques transitoires (nous allons en développer certaines)

— il est bon de toujours revenir aux définitions et propriétés, car certaines opérations peuvent se présenter comme cas particuliers, et il serait inutile d'appliquer la technique générale.

● *la soustraction*

A côté de la technique classique (avec le principe des retenues), il convient de noter certaines méthodes qui dans des cas simples évitent de "poser la soustraction".

$$x = 9283 - 995 \Leftrightarrow x + 995 = 9283$$

$$x + 1000 = 9288 \Leftrightarrow x = 8288$$

Il est bon également de favoriser la technique dite "compter en addition" (recherche du complémentaire).

● *la multiplication*

Il est intéressant pour le maître de connaître la technique dite *à la musulmane* (développée dans de nombreux manuels d'arithmétique).

Elle présente l'avantage d'éviter les retenues partielles en séparant l'utilisation de la table de multiplication et de la table d'addition.

Ceci est particulièrement intéressant quand la mémorisation n'est pas encore parfaite.

Pour la multiplication par un nombre de deux chiffres, notre technique (arbitraire) du "décalage" devra être motivée.

$$\text{Ex. : } 236 \times 42 = (236 \times 40) + (236 \times 2)$$

$$\text{et } (236 \times 40) = (236 \times 4) \times 10$$

D'où une disposition transitoire intéressante :

$$\begin{array}{r} 236 \\ \times 42 \\ \hline 9440 \\ \quad 472 \\ \hline 9912 \end{array}$$

• la division

Cette technique est très élaborée donc très difficile à retenir si l'on reste au niveau du procédé.

Il suffit pour s'en convaincre d'effectuer une division soi-même en base huit (ou en base douze).

Ici aussi nous pourrions utiliser des techniques transitoires et en particulier

— poser les différences partielles, de manière à bien séparer multiplication et soustraction

$$\begin{array}{r|l} 728 & 17 \\ - 68 & \hline 048 & 42 \\ - 34 & \\ \hline 14 & \end{array}$$

— utiliser la méthode dite : "division en soustractions successives" (qui est celle utilisée par les machines à calculer).

4. Calcul numérique et mesures

Il convient tout d'abord de différencier à propos des mesures :

- l'aspect physique
- l'aspect calcul numérique

Ceci se traduira par une progression pédagogique que l'on peut schématiser ainsi :

- C.E. : usage des instruments
- C.M. : mesures à l'aide des instruments
calculs à propos des mesures.

Nous abordons ici une utilisation des techniques opératoires pour les problèmes concrets, et la notion d'encadrement et d'ordre de grandeur prend ici tout son intérêt.

Il est à noter que ceci est favorisé par l'introduction dans le programme des signes > et < dès le cours préparatoire.

Géométrie en troisième

Animateurs : R. GAUTHIER et A. MYX

Rapporteurs : LOUQUET et PRIMOIS

Résumer en deux pages ce débat est impossible. Indiquons succinctement ses "lignes de force", pour développer plus tard éventuellement certains points précis. Il faudra y revenir : la "géométrie" passionne les foules. On s'aperçoit très vite que les Collègues ne mettent pas tous, il s'en faut, le même contenu derrière les mots.

1. — Sur les notations utilisées en géométrie en quatrième

Les Collègues sont nombreux à souhaiter une harmonisation des notations dès la cinquième ou la quatrième. L'A.P.M. a déjà joué un rôle important dans ce sens : il faut poursuivre cet effort.

Les écritures (A,B) , $\{A,B\}$, \overline{AB} , $[A,B]$ ou $[AB]$, $d(A,B)$ semblent être adoptées par une majorité, avec un sens précis. Les notations pour la "droite AB", la "demi-droite d'origine A qui contient B" sont encore très diversifiées. Peut-on parvenir à un accord ?

D'ailleurs, si l'on demande aux collègues la raison de ce souhait, on évoque très vite le problème des examens, des changements d'établissement.

Il ne faut pas, trop vite, figer une notation, mais habituer l'enfant à passer de l'une à l'autre, à s'adapter à un autre mode d'écriture. En géométrie, le passé est tellement lourd, les habitudes tellement fortes ...

2. — Sur le programme de quatrième

Les Collègues, un peu affolés par ce programme, souhaitent savoir ce qui est important en quatrième pour aborder avec profit celui de troisième. Nombre d'entre eux vont pratiquer leurs propres allègements, avec le souci de bien préparer leurs élèves pour l'année suivante. La notion de *programme* prend donc le pas sur celle d'*intérêt pédagogique* : si l'on ne peut terminer un programme de l'année x , au moins faire le maximum pour achever celui de l'année $(x + 1)$, l'année $(x + 1)$ étant année d'examen ! Cette course d'obstacles est-elle compatible avec la rénovation pédagogique ?

Cette attitude fréquemment rencontrée est conditionnée par nos habitudes, ces fameux examens, et la structure hiérarchisée du système.

Pour revenir à des considérations plus terre à terre, disons que ce qui est important en quatrième dépend de la manière d'aborder le programme de troisième. Cette lapalissade est un peu facile, mais elle est.

Les Collègues unanimes pensent qu'ils ne termineront pas le programme de quatrième. Est-il bon de sacrifier le vectoriel ? Nous pensons au contraire que l'outil vectoriel est indispensable et facile : l'expérience l'a prouvé. Il est souhaitable de l'aborder en fin de quatrième et de l'utiliser à fond en troisième.

Alors, que peut-on alléger ? Il n'est pas possible de passer trop de temps sur droite affine, droite euclidienne ... La notion de barycentre ne doit pas prendre trop de temps. Les calculs sur les polynômes peuvent être répartis sur toute l'année.

On s'accorde à penser que ces programmes de quatrième et troisième ne peuvent rester très longtemps tels qu'ils sont. Il est souhaitable que la Commission Ministérielle ne se contente pas d'allègements, mais repense très vite les objectifs de ces programmes.

N'est-ce pas d'ailleurs la notion même de programme qu'il faut revoir ?

3. — Sur le programme de troisième

Nous ne reprendrons pas ici un exposé détaillé : on trouvera les contenus de ces exposés dans le Bulletin n° 284 (pour les points de vue 1 et 2)

p. 437 — Point de vue 1 : Usage d'un produit scalaire

p. 450 — Point de vue 2 : Une conception de la géométrie

p. 463 — Point de vue 3 : Présentation du plan euclidien (voir Commentaires officiels)

Le point de vue développé dans les Commentaires officiels a l'inconvénient de ne pas utiliser le vectoriel mis en place en quatrième.

A quoi bon forger un vectoriel si l'on ne l'utilise pas lorsqu'il serait efficace ?

Dans la discussion, les Collègues se posent des questions sur le problème des doublants en troisième l'an prochain, sur le B.E.P.C. (encore l'examen), sur l'entrée en seconde, sur le cours de physique en seconde.

A propos du B.E.P.C., à défaut de sa suppression, peut-on envisager une autre forme de l'épreuve de mathématiques ?

On semble souhaiter quatre à cinq exercices assez variés, pour lesquels on ne demanderait pas seulement à l'enfant d'appliquer des recettes, des formules, mais on solliciterait son aptitude à la réflexion, à l'initiative.

Réformer la nature d'une épreuve d'examen final n'est-il pas une composante indispensable d'une réforme d'ensemble ?

4. — *Pour l'avenir*

A chaque discussion sur les programmes actuels, on ressent cette inquiétude, ce profond malaise des Collègues devant les nouveaux programmes de quatrième et troisième. Il semble bien y avoir une profonde contradiction entre l'esprit des programmes de sixième, cinquième et ceux de quatrième — troisième. Autant les premiers peuvent favoriser la recherche, la découverte, le sens de l'initiative, autant les seconds semblent conçus pour de futurs mathématiciens. La construction linéaire, axiomatique et rigide de la géométrie semble mal convenir pour des élèves de 13-14 ans.

Les Collègues souhaitent que la Commission Ministérielle se remette rapidement au travail sur ces programmes en tenant le plus grand compte de résultats d'expériences, de suggestions diverses.

Ils souhaitent des programmes moins ambitieux et moins linéaires, de telle sorte que toute idée de "course de vitesse" disparaisse de leurs préoccupations quotidiennes : ils seront alors disponibles pour réfléchir à une pédagogie vivante. C'est une condition indispensable pour une réforme véritable.

Finalités de l'enseignement des mathématiques du premier cycle dans le cadre de l'enseignement obligatoire jusqu'à 16 ans

Animateur : P. BUISSON

De l'examen de la situation actuelle dans le premier cycle, il ressort que le problème de la répartition des élèves dans les diverses sections est crucial. Il semble totalement inadmissible qu'un pourcentage soit fixé à l'avance par le gouvernement (40%, 40%, 20%). C'est la négation même de la démocratisation de l'enseignement. Les critères de sélection, s'il en existe, sont difficiles à dégager, d'autant plus que les élèves viennent d'écoles différentes et qu'il n'y a aucune uniformité de notation.

La création de classes homogènes conduit actuellement à donner aux élèves "faibles" des conditions de travail plus mauvaises que dans les classes hétérogènes. Les classes de "faibles" sont aussi chargées que les autres, les professeurs qui en ont la charge sont souvent moins qualifiés et les élèves sont, dès le départ, traumatisés d'être catalogués comme "faibles". Même avec de meilleures conditions d'enseignement, le principe de cette sélection est mauvais ; l'aspect psychologique est déterminant. Les "forts" aussi bien que les "faibles" considèrent cette classification comme définitive et ne font plus d'effort.

L'enseignement dans le premier cycle prépare à l'entrée en seconde ou au passage du B.E.P.C. Les participants semblent avoir des opinions différentes sur la valeur de cet examen. S'il permet d'obtenir encore diverses situations, certains parents y semblent attachés pour des raisons affectives. Comme tout examen actuel, le B.E.P.C. a le tort de juger l'élève seulement sur une épreuve et il est permis de douter de sa validité quand le pourcentage de réussite est fixé à l'avance à 80%. Une attestation fondée sur les avis du conseil de classe ne serait-elle pas meilleure ? Dans les deux cas, il faudra envisager le problème de l'orientation des élèves.

Il semble indispensable de donner à l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle deux finalités complémentaires :

— D'une part, habituer l'esprit à une démarche intellectuelle :

- . cultiver l'esprit déductif,
- . former l'esprit de découverte, l'esprit créatif en donnant à l'enfant la possibilité de dégager les axiomes à partir d'une étude intuitive du concret,
- . développer l'esprit critique en confrontant la théorie avec le réel ou en comparant le problème posé avec le problème résolu,
- . favoriser l'expression et la communication, apprendre à poser un problème et à le résoudre.

— D'autre part donner une formation technique et scientifique :

- . vivre son siècle, comprendre le monde qui nous entoure, savoir s'adapter aux changements susceptibles de se présenter, démystifier ce qui semblerait de la magie,
- . éviter la formation de deux classes sociales : ceux qui savent et ceux qui suivent parce qu'ils ne comprennent rien.

L'enseignement des mathématiques contribuera ainsi à former un citoyen libre.

La conception que l'on a des programmes actuels est à revoir ; ils sont trop ambitieux, trop longs, conçus pour une élite, surtout dans les classes de quatrième et troisième. Il serait souhaitable que les programmes ne soient pas seulement des rubriques de connaissances mais qu'ils soient axés sur des thèmes ou des types d'activités.

Il semble qu'il ne soit pas possible de définir la finalité de l'enseignement des mathématiques à court terme d'un point de vue utilitaire ; il convient plutôt de se soucier de l'épanouissement de l'individu et de l'aptitude à une formation permanente.

Il importerait donc, dans le cadre de l'A.P.M.E.P., d'établir des listes de thèmes d'étude, certains obligatoires et d'autres laissés au choix du professeur.

Face au programme de quatrième

J. BOLON et L. DUVERT

Rapporteur : M. CHARRUEL

Les points suivants ont été abordés :

- I — Objectif du premier cycle.
- II — Mathématisation et terminologie.
- III — Programmes.
- IV — Conditions de travail des élèves.
- V — Questions particulières à la première année d'application du programme de quatrième.

Une motion a été rédigée.

Certains points, en particulier ceux de la motion, ont été repris à la Commission du Premier Cycle l'après-midi.

La motion a été refondue dans un cadre plus général ; il n'y a pas lieu de la reproduire ici.

I — Objectif du premier cycle

Construire l'enfant plutôt que construire la mathématique.

Apprendre à raisonner :

- la géométrie n'est pas le domaine privilégié du raisonnement déductif ;
- l'algèbre s'y prête également.

II — Mathématisation et terminologie en géométrie

Difficultés

- double sens des mots dans le modèle mathématique et dans le modèle physique,
- nécessité de fixer une terminologie dans le secondaire,
- la distinction entre modèle mathématique et modèle physique est mal établie dans les commentaires,
- théorie déductive trop longue, donc s'échelonnant sur une trop grande durée,
- énoncés longs et difficiles,
- l'unicité du modèle introduit une identification avec la réalité, identification qui n'aurait pas lieu s'il y avait plusieurs modèles pour une situation ou plusieurs situations pour un même modèle ; la compréhension serait alors plus aisée,
- part à donner aux constatations et aux démonstrations.

Caractères de la mathématisation

- un modèle est une construction de l'esprit qui ne rend compte que d'une partie de la réalité
- une démonstration ne dit rien sur la réalité

III — Programmes

Actuellement

— l'ordre pour traiter le programme n'est pas imposé ; mais c'est une liberté toute relative : on ne peut, par exemple, aborder la géométrie sans avoir introduit les réels.

— il n'est pas obligatoire de suivre les commentaires, commentaires qui constituent une présentation du programme ; d'autres modes de présentation pourront faire l'objet d'annexes ... mais quand ? ici encore la liberté est relative.

— il n'y a pas accord sur ce qu'est l'essentiel :

espace vectoriel ou droite affine ?

Les espaces vectoriels interviennent en Sciences Economiques et sont utiles également aux élèves entrant en CET.

Caractères d'un programme futur

— se mettre d'accord sur ce qui doit être connu en fin de troisième et le répartir de la sixième à la troisième,

— constitution d'un noyau obligatoire et de thèmes choisis par le professeur, sur une liste donnée, suivant le niveau de sa classe.

Inconvénient : de nombreux thèmes pourraient tomber dans l'oubli et seul le noyau subsisterait.

IV — Conditions de travail des élèves

Il n'est pas souhaitable qu'il y ait des programmes différenciés pour les sections de types I et II.

On souhaite la suppression de la distinction entre les classes des types I et II (suppression qui est déjà réalisée dans certains établissements).

Dans le cas de l'existence de groupes de niveaux, l'heure supplémentaire accordée aux plus faibles n'est pas une solution très satisfaisante.

Il semble qu'une meilleure solution soit celle de la création d'heures de bureau "self-service" (solution expérimentée avec l'aide d'étudiants à Grenoble).

V — Questions particulières à la première année d'application du programme de quatrième

Une collègue, sur l'ensemble des présents, pense finir le programme.

Passage des élèves de quatrième en troisième

— pour les élèves restant dans leur établissement : entente entre les professeurs sur ce qui a été vu,

— pour les élèves changeant d'établissement : munir les élèves de la liste des questions étudiées.

Allègements

— en raison du retard pris cette année, les allègements prévus en troisième sont insuffisants.

La suppression des isométries a comme intérêt d'éviter le retour aux cas d'égalité.

— il ne faudrait pas, pour raccourcir le programme de quatrième, en verser une partie en cinquième où le programme est de longueur raisonnable.

Sur le programme de quatrième

Animateur : H. BAREIL

(Parmi les participants, un tiers environ enseigne en quatrième.)

Première partie : Exposé par LASSAVE et BAREIL

Lassave et Bareil se sont proposé, non pas de juger du bien-fondé ou non du programme actuel, mais de rechercher comment il pouvait être exploité du mieux possible.

Pour eux, il ne s'agit pas tellement de le traiter en vue de connaissances à faire acquérir (ce sera souvent un effet second, sans plus, encore que non négligeable) mais surtout en vue d'approfondir les démarches d'activités et de pensée qu'il peut mettre en jeu. Et cela pour TOUS les enfants, de type II aussi bien que de type I.

Activités permises par le programme de quatrième

1. Calcul (numérique, algébrique, vectoriel)

— Z et D sont à étudier à fond. Mais d'une part, dans la plupart des classes la construction de D se fait en pure perte, d'autre part il s'agit essentiellement de savoir manipuler à fond les nombres correspondants et de voir l'insuffisance de D.

Aussi Z et D peuvent-ils être vus, dans cet esprit, non en des "leçons" qui leur soient propres, mais à l'occasion de la révision des relations (avec le cas échéant utilisation de figures géométriques usuelles donnant lieu à des fonctions vers N ou D), et à

propos des nombreuses études expérimentales sur la droite physique.

Tout ceci peut se doubler d'exercices de calcul mental précisant ordre de grandeur et approximation.

- Les formulations littérales sont généralement sans intérêt (par exemple à propos des encadrements).
- Le calcul algébrique à propos d'exemples "concrets" est un excellent exercice déductif pourvu que l'on oblige à expliciter ce qui se fait et parfois à confronter avec le "concret" les diverses étapes du calcul.
- Les calculs explicatifs sur les quotients offrent une illustration remarquable de l'aptitude à utiliser une définition, éventuellement des équivalences, et à conjuguer des hypothèses. Il serait sage de se passer des règles le plus longtemps possible, de laisser l'élève y venir seul, puis de l'habituer à une utilisation intensive, sans vérification de \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .
(Ainsi accepter $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2,5}{5} + \frac{2}{5} \dots$)
- Le vectoriel sera l'occasion d'une reprise (avec comparaison) des démarches (établissement du problème, exploration des voies possibles, ...) du calcul algébrique.
- L'un des objectifs fondamentaux de la classe de quatrième pourrait être le calcul sous toutes ses formes.

2. Activités de recherche

a) Motivations

On en trouvera à partir de situations "concrètes". (Ainsi des barres à partager, des aires de carrés, ... conduiront en "géométrie physique" à des équations du type $3x = 1$, $x^2 = \dots$).

Si plusieurs langages sont possibles, ce que l'on sait sur l'un n'oblige-t-il pas à induire un fait analogue sur l'autre ? : les élèves savent ajouter des nombres à virgule. Ceci ne les contraint-il pas à rechercher une addition des quotients? (et à en contrôler le résultat ! ...)

L'élève qui connaît une bijection de E vers F et des opérations dans E ne doit-il pas être entraîné à en induire des opérations dans F ? (On en trouvera de nombreux exemples en géométrie ...)

En géométrie de la droite, de support E , dès lors qu'il y a plusieurs bijections de E dans \mathbb{R} , le problème du tri des bijections

intéressante peut se motiver lorsque apparaîtra l'intérêt de tel

invariant (\overline{AB} , ou AB , ou $\frac{\overline{AB}}{CD}$, ...)

Les recherches particulières peuvent découler naturellement d'études plus générales : ainsi l'étude de l'application qui à tout point M du plan affine associe ΣMK avec $K \in \{A, B, C\}$ entraîne celle de la relation réciproque et de l'antécédent du vecteur nul ... d'où le centre de gravité ...

b) *Méthodes en jeu*

— *L'observation.* Ainsi, pour la droite, les diverses graduations de compteurs, les "droites" des époques historiques, géologiques, ...

— *L'effort de communication.* Comment exprimer un problème ? Pour soi, pour les autres ... ?

— *La recherche d'informations immédiates.* On peut requérir des situations analogues et en dégager une méthode de raisonnement. Ainsi $x ? / 3\vec{x} = \vec{u}$, ou $3\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$, ... nous fait songer à $3x = 1$, ou ..., x étant un réel ... Quelles propriétés sont en jeu ? Quelles analogies ?

— *La conception et l'exécution d'une expérimentation.*

. Graduons diverses d'une droite et comparaisons, tracés pour Thalès, ...

. Recherche de cas particuliers plus faciles : ainsi, pour la somme de deux quotients, cas où ils ont le même dénominateur.

— *L'aptitude à l'auto-questionnement par analogie.*

Exemple : On connaît les "équations de l'addition ou de la multiplication". Par référence, l'élève ne peut-il se questionner pour une "équation du milieu" : A et M connus, existe-t-il B tel que M soit le milieu de (A, B) ? Toute la géométrie de la droite, seule ou plongée, surgit alors, et la symétrie en sortira définie sans effort.

c) *Ecueils*

— Demander des "démonstrations" de choses "évidentes" aux yeux de l'élève ... Ainsi "Toute droite a au moins deux points", ...

— Ou, à l'inverse, proposer des liens "évidents", alors que ce n'est pas vrai. Ainsi déduire des tris de familles de bijections (qui ignorent le caractère "régulier" des graduations) relatives à la droite mathématique à partir de manipulations du double-décimètre.

— Faire "table rase" des connaissances antérieures :

Ainsi pour D lorsqu'on prétend le construire et n'introduire l'écriture à virgule qu'en conclusion.

Et toute la géométrie est ainsi en porte-à-faux eu égard à la géométrie expérimentale connue des élèves ... En quatrième, le compas, connais pas ! .

— Ignorer les niveaux de rigueur, de langage :

Ainsi pour l'emploi du mot "droite", pour la prétention à faire de la géométrie un système déductif complet au lieu de se contenter d'ilôts de déductions ...

3. Modélisation

On la trouve en géométrie à propos de la droite et du plan.

Seulement, le modèle du plan affine se déduit d'une réalité au moyen d'une expérimentation. Il faudrait plusieurs réalités. D'autre part le modèle affine manque d'intérêt pour les élèves qui ont l'habitude du métrique.

Alors que les illustrations du modèle sont très variées (par exemple pour la droite mathématique "non plongée" on peut avoir des ensembles-supports à partir de matrices, de figures géométriques variées, ...) les difficultés propres à l'âge des élèves — et les applications pratiques ultérieures — incitent à des diagrammes "techniques" bourrés de conventions supplémentaires, d'ordre métrique notamment. Ainsi ces diagrammes sont-ils trop particuliers. Que ne disait-on pas autrefois à un élève qui faisait ainsi des figures plus particulières que ne les donnaient les énoncés ? Et bien, nous mettons constamment les élèves de quatrième dans ce travers ...

4. Activités de traduction

La géométrie de quatrième apparaît souvent comme une affaire de définitions, de vocabulaire. Mais elle peut apparaître aussi comme une langue vivante à multiples facettes. Un objectif de la classe de quatrième pourrait être de savoir passer d'une expression à une autre (langage affine, vectoriel, \mathbb{R} ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ...). Ainsi pour traduire un alignement de points, le fait d'être le milieu, etc ...

De même pour les isomorphismes (de $(\mathbb{Z}, +)$ vers (a^n, \times) , de (\mathcal{T}, \circ) vers $(\mathcal{V}, +)$, ...), en montrant comment une opération dans un ensemble induit une opération dans l'autre. (La composition des translations induit l'addition des vecteurs, et celle-ci peut induire une addition de points ...)

5. Activités de classement et d'organisation

On les trouve à propos des relations, des valeurs approchées ...

Les bipoints et vecteurs sont l'occasion d'un retour sur les relations d'équivalence et les partitions.

Les études sur la droite conduisent à des relations d'ordre.

Et l'on peut, en quatrième aussi, trouver des exemples d'initiation à la programmation (calculs de sommes, de factorielles, de moyennes, ... résolution de " $ax = b$ ", ...) avec "boucles" ou sauts conditionnés.

6. Activités d'extension

— Par exemple pour l'extension du sens de a^n (avec le problème de 0^0), avec les diverses extensions de $(a+b)^2$, ...

— La symétrisation de N pour l'addition donnait Z .

A partir de D , on recherche une nouvelle extension. Il est formateur d'insister sur les principes mis en jeu, les problèmes soulevés (compatibilité, avec l'extension, des lois déjà définies, de l'ordre, ...).

Par contre Q , d'ailleurs hors-programme, paraît sans intérêt.

Les calculs sur les "quotients" sont beaucoup plus avantageux que ceux sur les "fractions" ... et les englobent.

7. Montée dans l'échelle des types

On retrouve en quatrième des exemples d'obtention d'opérations sur des classes d'équivalence à partir d'opérations sur leurs représentants. (Ainsi pour les "vecteurs géométriques").

Des opérations sur R , on voit comment passer à des opérations sur $R \times R$.

Surtout, ce qui est nouveau, d'opérations sur des nombres on passe à des opérations sur des fonctions.

Enfin, il est inutile ici d'insister sur l'intérêt, perçu par tous, de bien dégager en quatrième la structure de groupe.

8. Exercices de logique

Sans qu'il soit indispensable de faire expressément des "leçons" là-dessus, les exercices de logique, de raisonnement logique, sont évidemment présents partout ... Il est du plus haut intérêt de s'attacher aux règles de logique mises en oeuvre plus qu'aux conclusions des études !

9. Activités de "critique"

— Contrôle, approximatif, (calcul mental, dessin) d'un résultat.

— Distinction entre le problème de l'existence d'un être mathématique et celui de sa détermination. (Tant que je suis dans D , je n'ai

pas de nombre x tel que $3x = 1$. Pourtant, en base trois, je sais déterminer x).

- Distinction entre le problème de la détermination (mathématique) d'un être mathématique et celui de sa représentation.

Ainsi deux points distincts A et B étant donnés, la droite-support (AB) existe et est unique et, pour une bijection sur R , le milieu de (A,B) existe et est unique. Mais sans conventions supplémentaires je ne sais ni tracer la droite-support, ni placer le milieu ...

10. Conclusions.

Il faudrait essayer de déceler les activités fondamentales de l'esprit et s'attacher d'abord à leur exercice et à leur épanouissement pour TOUS les élèves.

Mais plus les élèves sont faibles, plus les difficultés propres au programme de quatrième apparaissent réhhibitoires ...

Deuxième partie : Questions et discussion

- Avec le nouveau programme de géométrie, on gagnerait en honnêteté intellectuelle s'il pouvait être compris, si sa démarche l'était. Or en général il n'en est rien — ou si peu —.

Il faudrait donc s'attacher à ne pas saturer les élèves, quitte à admettre autant de déductions que nécessaire ?

- La définition de la droite mathématique peut être introduite progressivement : par exemple on peut dire simplement d'abord qu'elle est un ensemble muni d'une bijection sur R . (avec une infinité de bijections possibles). Si, ultérieurement, se pose le problème de tel invariant on verra les diverses bijections pouvant remplacer la première ...

- Si l'on veut traiter ce programme de quatrième en préservant l'initiative des élèves et leur contribution, ou même simplement en leur laissant le temps de l'assimilation, il est impossible de le traiter en entier.

- Et cela ne semble pas davantage possible pour les années à venir, en dépit des progrès certains dus au rodage ...

- Le programme est dur pour les élèves faibles ou simplement moyens ...

Il semble en outre à l'expérience qu'il se prête peu à une bonne initiation au raisonnement déductif (démonstrations non motivées, car résultats évidents, en géométrie par exemple, ou trop difficiles car demandant, par exemple, une connaissance approfondie du calcul algébrique ...).

- Quels sont donc les objectifs d'une éducation mathématique en classe de quatrième ?
- Tout ceci débouche sur des options fondamentales (cf. Charte de Caen et travaux de la Commission A.P.M. 1er cycle ...).

Correspondance mathématique

CASTEBON, *Institut coopératif de l'école moderne.*

Pédagogie FREINET

Rapporteur : G. MOUY

Pour situer la correspondance et sa place dans le travail de la classe Castebon précise que la LIBRE RECHERCHE pratiquée par ses élèves motive la correspondance mathématique qu'il pratique actuellement au cycle d'observation. Pendant certaines heures de cours, mais aussi très souvent chez eux, les élèves font des recherches sur un sujet de leur choix. Ces recherches, présentées à la classe ou à un groupe de travail, sont mises au point collectivement avant d'être reportées au propre et envoyées aux correspondants. Ces derniers en discutent, essaient de comprendre, vérifient le travail, et souvent le prolongent. Les réponses et critiques accompagnent un nouvel envoi.

Une interview des élèves de Castebon — enregistrée par des professeurs stagiaires — et accompagnée de diapositives montrant des enfants travaillant en groupes, communiquant leurs recherches à la classe, permet de mieux comprendre cette forme de travail.

A partir de ce montage s'établit un dialogue particulièrement intéressant et de nombreuses questions furent posées à Castebon.

Questions relatives aux conditions matérielles :

— Nombre d'élèves ? Milieu social ? Niveau des élèves ?

Questions relatives aux formes de travail :

— Le programme est-il traité ? Place faite à la mémorisation ? aux manuels ?

— Comment s'assurer que les notions sont acquises ? Introduction du vocabulaire mathématique ?

Questions relatives à la correspondance et à la libre recherche.

— Comment vient l'idée de correspondance ? Comment démarrer la libre recherche ?

— Ces techniques sont-elles pratiquées en classe de Quatrième ?

Castebon précisa que ses élèves — environ une trentaine par classe — étaient dans l'ensemble issus de familles modestes, le milieu où est implanté son établissement étant semi-rural, semi-ouvrier. Comme

partout ses élèves sont de niveaux très divers en ce qui concerne les connaissances.

Le programme est traité mais certaines phases de tâtonnement sont très longues. Elles sont fondamentales : ce n'est pas du temps perdu ! Le vocabulaire mathématique est introduit lorsque le besoin s'en fait sentir et au plus tard lors de la formalisation des notions fondamentales qui intervient après la phase de tâtonnement. Ce vocabulaire et ces notions sont alors notés sur le classeur individuel de chaque élève. Les acquisitions se font progressivement par le travail personnel (recherches à partir de situations de la vie courante ; recherches à partir des travaux communiqués à la classe par les autres élèves). On peut arriver à limiter la mémorisation qui se fait surtout par la pratique. Il y a un contrôle permanent des connaissances à partir du travail individuel de chaque élève. Actuellement le contrôle se fait par l'intermédiaire de la correspondance. Chaque élève rédige un "livret auto-correctif" librement, à partir d'un plan établi collectivement, et l'envoie à son correspondant. Ainsi une correspondance individuelle double la correspondance collective entre les classes jumelées. Le passage à l'abstraction en quatrième ne semble pas un obstacle car déjà au cycle d'observation, et plus particulièrement en cinquième, les élèves s'évadent assez vite du concret. Il semble qu'il faudrait continuer au cycle d'orientation à ménager une phase de tâtonnement préalable aussi longue que possible ; mais les actuels programmes particulièrement copieux s'y prêtent moins bien.

Enfin Castetbon présenta et commenta un grand nombre de travaux d'élèves, expliquant leur genèse, leurs prolongements dans la classe, et également dans la classe des correspondants.

En conclusion la correspondance mathématique motive puissamment la libre recherche, permet à chacun de travailler à son rythme, et surtout respecte le tâtonnement de chaque élève, ce tâtonnement expérimental qui selon C. Freinet dans son "Essai de psychologie sensible" est une loi naturelle. La libre recherche et la correspondance mathématique permettent en outre une meilleure connaissance de chaque élève, car si nous essayons de faire découvrir les mathématiques nous sommes aussi et surtout des éducateurs.

A l'occasion du centenaire de la Société Mathématique de France, FRANCE CULTURE diffusera le 28 septembre à 18 h 15 une émission intitulée "100 ans d'activités mathématiques" avec la participation de J. P. KAHANE, P. LELONG et F. LE LIONNAIS.

Utilisation de la notion de relation à la résolution de quelques problèmes pratiques

Animateur : Maurice BOUTEILLE

Bouteille a distribué un polycopié (1) et nous a exposé deux exemples d'utilisation de relation binaire dans un ensemble fini pour la résolution de deux problèmes pratiques.

Le premier problème fut de construire toutes les chaînes de montage possibles pour la construction d'un objet technologique nécessitant 10 postes de travail connaissant la relation de nécessaire postérieure dans l'ensemble des opérations technologiques liées à ces postes.

Le deuxième problème fut de découvrir les 53 possibilités (dans l'exemple donné) que l'on a pour faire passer sept liquides successivement dans une même canalisation sachant qu'à cause de leur nature tous les liquides ne peuvent pas se succéder.

L'exposé a vivement intéressé l'auditoire qui a ensuite été invité à trouver d'autres exemples de l'utilisation de relations dans la résolution de problèmes pratiques ou plus simplement à nous donner des exemples d'analyse mathématique de problèmes technologiques.

Un premier participant nous a posé le problème suivant :

Sur un damier à n lignes, n colonnes, on étudie la marche d'un cavalier qui doit partir de la case p et revenir à la case p , après avoir parcouru les $n^2 - 1$ autres cases sans répétition. (Rappelons que le cavalier se déplace de 2 cases dans une direction et d'une case dans la direction perpendiculaire). Nous n'avons pas de solution pour les damiers 3×3 , 4×4 , 5×5 , mais il y en a une pour les damiers 6×6 , 8×8 , ...

Un deuxième participant nous a montré comment il posait le problème du mouvement hélicoïdal en décrivant la relation vis-écrou, chacun pouvant être muni d'un mouvement de rotation R ou de translation T .

Nous pouvons dresser le diagramme suivant :

Vis		Ecrou	
R	T	R	T
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0

(1) Voir en annexe

Un troisième participant nous a parlé des relations entre roues d'un même modèle qui constituent une boîte de vitesses et dans laquelle on peut définir une relation d'ordre.

Enfin de nombreux exemples ont été donnés en considérant des jeux éducatifs, des exemples électriques comme le va et vient trois postes, ou des exemples mécaniques comme le distributeur de boissons.

Certains participants utilisent dans leurs classes un système de cartes perforées pour habituer les élèves à transformer des propriétés en langage binaire et à déterminer des intersections, des réunions ou des complémentaires.

Enfin les participants ont signalé la difficulté qu'il y a de collaborer entre physiciens et mathématiciens qui, bien souvent, ont des processus de pensée bien différents.

Ils ont aussi signalé l'imprécision du langage. Que signifient exactement : tableau logique, tableau technologique ...?

Annexe

“ Les mathématiques modernes ne débouchent sur aucune application pratique ”. Voilà une phrase que l'on entend dans n'importe quelle discussion sur ce sujet.

Le matériel mathématique utilisé sera la notion de relation binaire dans un ensemble fini.

Trois types de schémas sont souvent donnés pour une telle relation : le schéma fléché (ou sagittal), le schéma cartésien, le schéma 0-1 (ou matriciel).

Donnons un exemple.

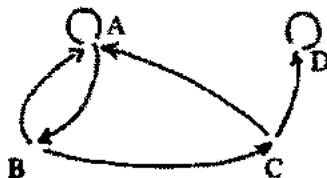
Soit E l'ensemble $\{A, B, C, D\}$

Une relation \mathcal{R} est définie par son graphe G , partie de $E \times E$.

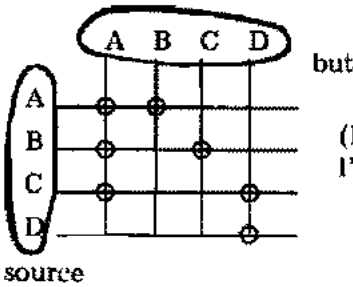
Ici G est $\{(A,A), (A,B), (B,C), (B,A), (C,D), (C,A), (D,D)\}$

Le schéma fléché de \mathcal{R} est le suivant :

On signale que $(B,C) \in G$, à l'aide d'une flèche allant de B à C .



Le schéma cartésien de \mathfrak{R} est :



$(B,C) \in G$ est signalé par un rond entourant l'intersection de la ligne B et de la colonne C.

Le schéma 0-1 ou matrice de \mathfrak{R} est :

\mathfrak{R}

	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
C	1	0	0	1
D	0	0	0	1

source

but

Ce schéma ne représente rien d'autre que la fonction caractéristique de G .

1 à l'intersection de la ligne B et de la colonne C signifie que $(B,C) \in G$

0 à l'intersection de la ligne C et de la colonne B signifie que $(C,B) \notin G$.

I Construction d'une chaîne de montage

Dans l'industrie, tout objet manufacturé nécessite un certain nombre d'opérations technologiques. Certaines de ces opérations doivent nécessairement être postérieures à d'autres ; et entre certaines opérations un choix peut être réalisé.

Le problème est le suivant : connaissant la relation de nécessaire postériorité dans l'ensemble des opérations technologiques, construire toutes les chaînes de montage possibles.

Dans l'exemple ci-dessous, on aura 10 postes de montage que l'on notera A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et on supposera connue la relation de nécessaire postériorité (notée $>$) par les 22 couples de son graphe :

$B > A ; C > A ; D > H ; I > J ; F > E ; D > F ; E > B ; E > C ; H > E ; J > D ; D > G ; G > E ; J > A ; F > B ; I > A ; H > B ; I > C ; G > C ; E > A ; I > H ; D > E ; H > A .$

On construit alors la matrice de la relation $>$

but

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	4
E	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
F	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2
G	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2
H	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
I	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	4
J	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
	6	3	3	1	4	1	1	2	0	1	22

source

Puis, on fait la somme de tous les nombres se trouvant dans chaque ligne.

Quelle doit être la somme des nombres trouvés ?

Le nombre ainsi trouvé représente le nombre d'opérations nécessairement antérieures à l'opération correspondant à la ligne étudiée.

En particulier 0, somme des nombres de la ligne A, signifie que A n'a pas d'image pour la relation $>$; c'est donc un point de départ possible pour la chaîne étudiée. Remarquons que dans l'exemple choisi, c'est le seul.

Effectuer la somme des nombres se trouvant dans chaque colonne.

Interpréter le nombre ainsi trouvé, et en particulier 0, somme des nombres de la colonne I.

I est donc le point final de la chaîne.

Recommencer l'étude précédente sur le sous-ensemble $\{B, C, D, E, F, G, H, J\}$.

Combien y a-t-il de couples dans le graphe de la nouvelle relation de nécessaire postériorité ?

		but									
		B	C	D	E	F	G	H	J		
source	B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	D	0	0	0	1	1	1	1	0	4	
	E	1	1	0	0	0	0	0	0	2	
	F	1	0	0	1	0	0	0	0	2	
	G	0	1	0	1	0	0	0	0	2	
	H	1	0	0	1	0	0	0	0	2	
	J	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
			3	2	1	4	1	1	1	0	13

On conclut que B ou C sont des points de départ possibles de cette chaîne restreinte et J le point final.

On a déjà deux possibilités pour le début des chaînes possibles

A → B → C ...
A → C → B ...

Noter que toute chaîne se termine ainsi

... → J → I

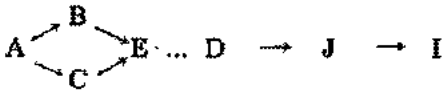
On pourra résumer ces possibilités par le schéma suivant :

A → B → C ...
A → C → B → J → I

On continue en s'intéressant aux cinq postes de montage restants :

		but					
		D	E	F	G	H	
source	D	0	1	1	1	1	4
	E	0	0	0	0	0	0
	F	0	1	0	0	0	1
	G	0	1	0	0	0	1
	H	0	1	0	0	0	1
			0	4	1	1	1

On peut alors compléter la chaîne de montage

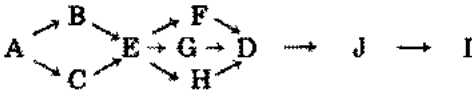


Étudions les trois derniers postes de montage, F, G, H.

Conclusion : Il n'y a aucune nécessaire postériorité entre F, G, H.

	F	G	H	
F	0	0	0	0
G	0	0	0	0
H	0	0	0	0
	0	0	0	0

D'où le schéma final



Cette étude montre 7 niveaux dans la chaîne de montage.

Le niveau initial ou niveau 1 constitué par A

le niveau 2 constitué par B et C

le niveau 3 constitué par E

le niveau 4 constitué par F, G et H

le niveau 5 constitué par D

le niveau 6 constitué par J

le niveau 7 constitué par I.

A l'aide de ce tableau, on peut construire 12 chaînes de montage.

Décrire ces douze chaînes de montage.

Problèmes annexes

- Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir une et une seule chaîne de montage convenable.
- Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir toutes les chaînes de montage convenables.

On peut alors compléter cet exercice par un calcul numérique qui consiste à rechercher la chaîne la plus "économique".

Si A est rapporté à la valeur 100,

alors si B précède C, B a la valeur 89 et C la valeur 97

et si C précède B, C a la valeur 88 et B la valeur 94

E a la valeur 62.

Si H est avant G, H a la valeur 78 et G la valeur 80
G est avant H, H a la valeur 73 et G la valeur 83
F est avant G, F a la valeur 75 et G la valeur 81
G est avant F, F a la valeur 78 et G la valeur 83
F est avant H, H a la valeur 75 et F la valeur 77
H est avant F, H a la valeur 74 et F la valeur 79 .

Remarque : Le problème est très simplifié; dans la pratique la place de F dans la chaîne totale joue un rôle.

D a la valeur 48, J la valeur 81 et I la valeur 18 .

Il suffit de trouver à chaque niveau la combinaison des postes de montage la plus "économique".

Au niveau 2, 2 chaînes possibles

B suivi de C d'un coût de 186
C suivi de B d'un coût de 182 .

Au niveau 4, 6 chaînes possibles

H suivi de G suivi de F d'un coût de $78 + 83 + 79 = 240$.

En effet H est avant G et avant F, pour que ces deux conditions soient réalisées simultanément, le coût de H est le plus grand des 2 coûts possibles (78 et 74).

De même G est avant F, mais après H ; d'où son coût est le plus grand des nombres 83 et 80.

Et pour F, on effectue le même raisonnement.

On étudie de même les chaînes

H suivi de F suivi de G d'un coût de 238
F suivi de H suivi de G d'un coût de 234
F suivi de G suivi de H d'un coût de 231
G suivi de F suivi de H d'un coût de 235
G suivi de H suivi de F d'un coût de 236 .

La chaîne la plus économique est : A C B E F G H D J I

2ème exemple

Soient 7 liquides L_1, L_2, \dots, L_7 qui doivent passer dans une canalisation les uns après les autres ; mais, à cause de la nature de ces liquides, certains de ces produits ne peuvent se succéder dans la canalisation.

On définit ainsi une relation dans l'ensemble E des liquides

" $L_i \mathcal{R} L_j$ " signifie que " L_i ne doit pas précéder L_j " .

Le problème qu'on résoud dans les pages suivantes est de construire toutes les suites de liquides satisfaisant aux relations suivantes :

$L_1 \mathcal{R} L_2, L_1 \mathcal{R} L_4, L_1 \mathcal{R} L_6, L_2 \mathcal{R} L_1, L_2 \mathcal{R} L_3, L_2 \mathcal{R} L_7, L_2 \mathcal{R} L_4,$
 $L_3 \mathcal{R} L_1, L_3 \mathcal{R} L_4, L_3 \mathcal{R} L_7, L_3 \mathcal{R} L_5, L_4 \mathcal{R} L_1, L_4 \mathcal{R} L_2, L_4 \mathcal{R} L_5,$
 $L_5 \mathcal{R} L_2, L_5 \mathcal{R} L_6, L_5 \mathcal{R} L_7, L_6 \mathcal{R} L_1, L_6 \mathcal{R} L_3, L_6 \mathcal{R} L_5,$
 $L_7 \mathcal{R} L_2, L_7 \mathcal{R} L_4, L_7 \mathcal{R} L_5, L_7 \mathcal{R} L_6.$

On étudie
d'abord
le schéma
cartésien
de cette
relation.

but

source

	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅	L ₆	L ₇
L ₁		X		X		X	
L ₂	X		X	X			X
L ₃	X			X	X		X
L ₄	X	X			X		
L ₅		X				X	X
L ₆	X		X		X		
L ₇		X		X	X	X	

Soit G le graphe de cette relation.

Soit \bar{G} le complémentaire de G dans $E \times E$ privé des couples de la forme $(L_1, L_1), (L_2, L_2), \dots, (L_7, L_7)$.

Dressons le schéma cartésien de la relation \mathcal{R}' dans E de graphe \bar{G} .

but

source

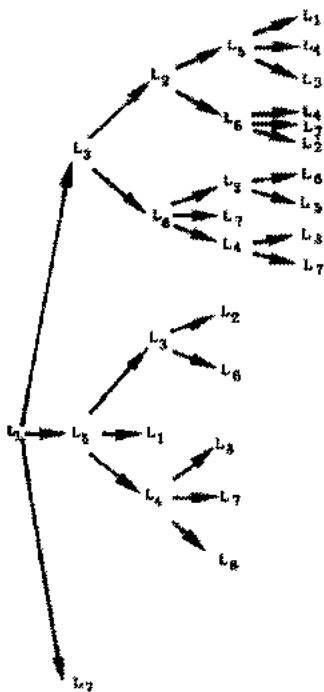
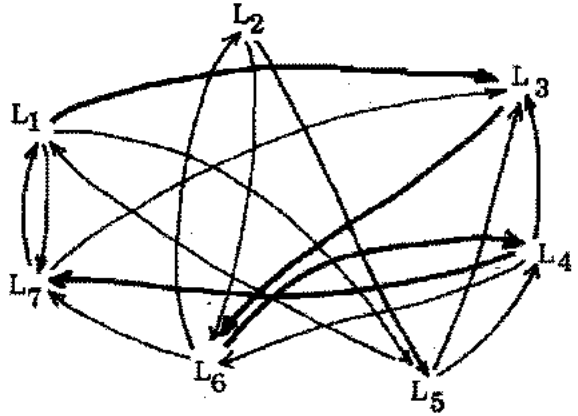
\mathcal{R}'	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅	L ₆	L ₇
L ₁			X		X		X
L ₂					X	X	
L ₃		X				X	
L ₄			X			X	X
L ₅	X		X	X			
L ₆		X		X			X
L ₇	X		X				

Etudions la signification de " $L_i \mathcal{R} L_j$ ".

On prend la négation de " $L_i \mathcal{R} L_j$ " c'est-à-dire la négation de " L_i ne doit pas précéder L_j " c'est-à-dire " L_i peut précéder L_j ".

Introduisons une nouvelle notion, celle de chemin dans un graphe. On remarque que (L_1, L_3) , (L_3, L_6) , (L_6, L_4) , (L_4, L_7) sont des couples éléments de \bar{G} .

Sur le schéma fléché de \bar{G} , ce fait se traduit par un chemin fléché d'origine L_1 , d'extrémité L_7 et passant successivement par les points L_3, L_6, L_4 .



Existe-t-il d'autres chemins fléchés allant de L_1 à L_7 sans passer deux fois par le même point ? L'arbre qui est cherché ci-dessous fournira la réponse.

Il y a quinze chemins allant de L_1 à L_7 .

On appelle longueur d'un chemin le nombre de couples constituant ce chemin.

Exemple : Le chemin $(L_1, L_3), (L_3, L_6), (L_6, L_4), (L_4, L_7)$ a pour longueur 4.

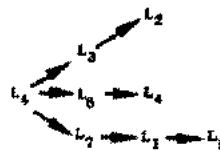
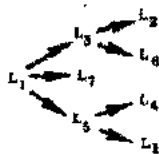
Un problème intéressant est de trouver un chemin de longueur minimale allant d'un point à un autre point.

Exemple : Le chemin de longueur minimale allant de L_1 à L_7 est le chemin (L_1, L_7) de longueur un.

A l'aide de tableaux analogues aux tableaux ci-dessous, on pourra compléter la table suivante :

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1	2	2	1	2	1	2	1
L_2							
L_3							
L_4	2	2	1	2	3	1	1
L_5							
L_6							
L_7							

← Longueur du chemin de longueur minimale d'origine L_1 d'extrémité L_2 .

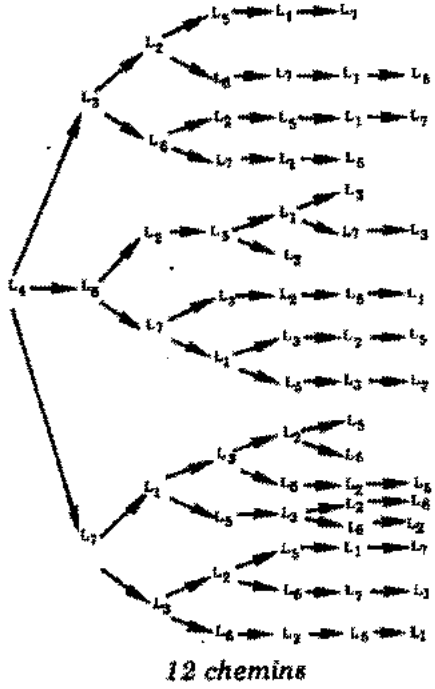
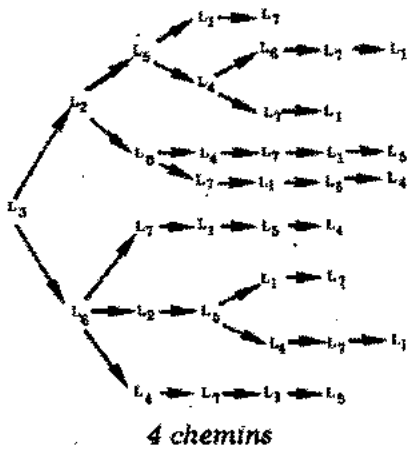
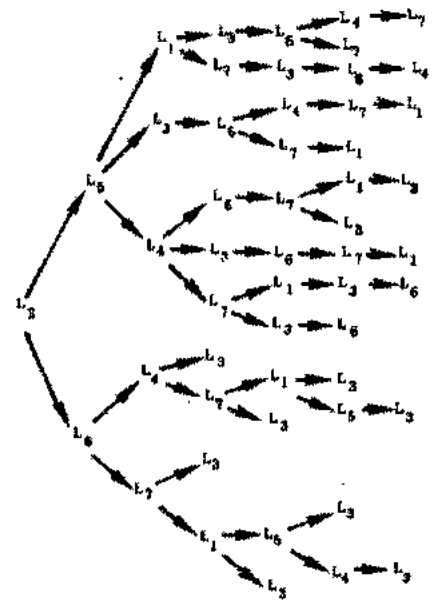
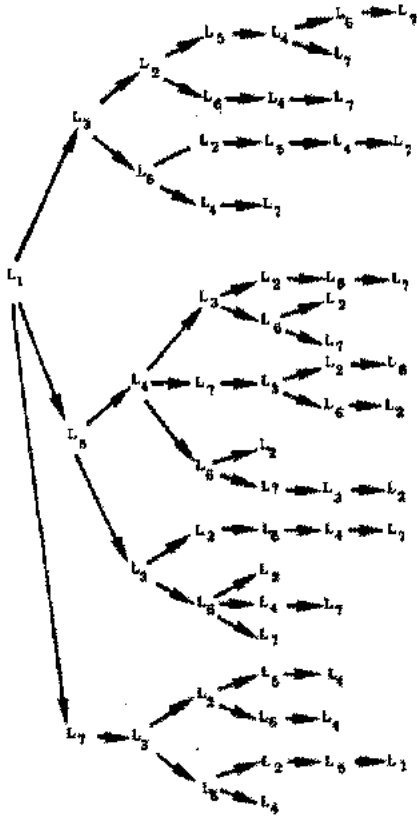


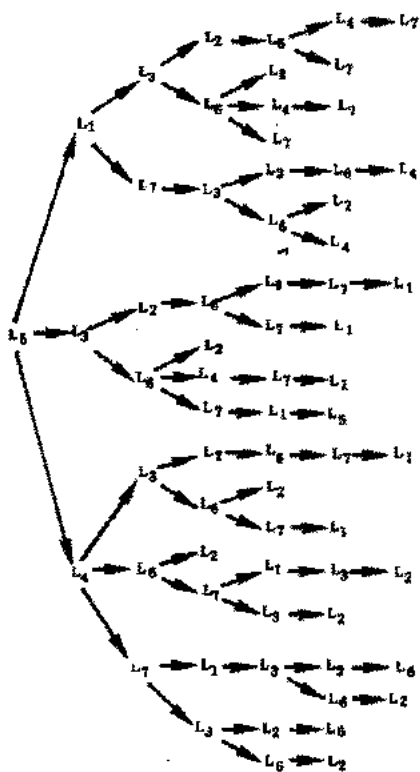
On appelle chemin élémentaire de \overline{G} tout chemin passant une fois et une seule par chaque point de l'ensemble E.

Exemple : $(L_1, L_5, L_3, L_2, L_6, L_4, L_7)$ est un chemin élémentaire.

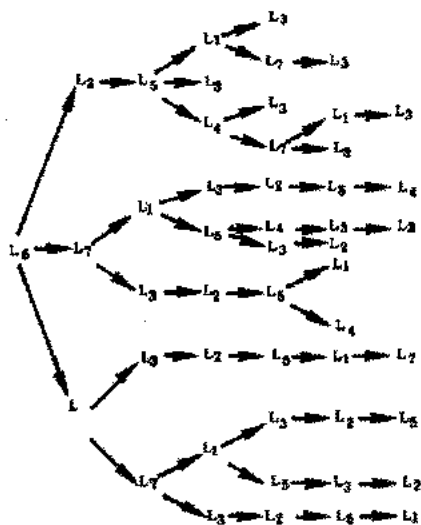
Remarquons l'intérêt d'un chemin élémentaire dans \overline{G} ; tout chemin élémentaire donne une solution du problème posé page 782.

Recherche systématique de tous les chemins élémentaires de \bar{G} .

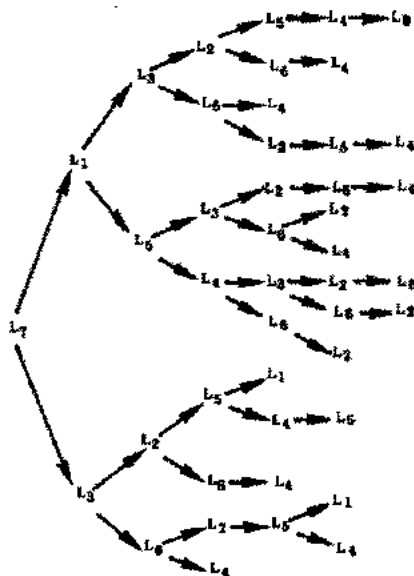




7 chemins



7 chemins



5 chemins

Conclusion : Le problème posé admet 53 solutions.

La technologie

Animateur : G.H. CLOPEAU

Rapporteur : GABOREAU

Clopeau rappelle que la technologie permet d'appliquer les mathématiques nouvelles, et que d'autre part, elle fournit des situations mathématiques. Il cite des exemples de liaison avec les mathématiques :

1. La mesure et les approximations, la motivation des calculs.
2. Les méthodes d'analyse à propos des situations en technologie :
 - analyse descriptive (langage des ensembles) ;
 - analyse fonctionnelle (graphes) ;
 - hiérarchisation (logique d'agencement) ;
 - stratégie : montage, démontage (relations d'ordre) ;
 - algèbre de Boole.
3. Présentation de la géométrie en quatrième, à partir de la translation, et en troisième à partir de la rotation, ce qui permet d'introduire dès le départ les outils mathématiques définitifs (espaces vectoriels).
4. Bonne compréhension du processus de mathématisation, évitant de confondre le modèle, entièrement connu, et la réalité, qui nous échappe.

Puis la Commission confirme longuement les termes de la motion élaborée en 1971 lors des journées de Toulouse (cf. Bulletin n° 280, page 609).

Une discussion a lieu sur l'esprit dans lequel la Commission Lagarrigue envisage l'enseignement de la technologie. Il semble que sa composition (grand nombre de scientifiques de haut niveau) lui fasse moins valoriser l'"objet", et par contre s'intéresser beaucoup plus à la pureté de la démarche scientifique. Une consultation de personnes directement intéressées par l'enseignement de la Technologie est néanmoins amorcée.

Une inquiétude se manifeste au sujet des divergences entre la technologie dans l'enseignement général (technologie de l'objet) et l'enseignement technique (technologie d'un métier). On regrette également la diminution de l'importance du dessin : artistique, qui cherche à reconstituer la réalité, et industriel, au contraire conventionnel et pratique.

En conclusion, la Commission rappelle que la technologie, par essence pluridisciplinaire, impose une communication entre physiciens, mathématiciens, professeurs du technique, etc. Elle émet le voeu de voir se créer dans chaque I.R.E.M. une équipe de concertation entre les disciplines concernées.

Langue naturelle et langage mathématique; éléments de comparaison

Animateurs : J. PLAZY et J. ROUAULT

I — Introduction

1) Aspect linguistique

Le présent travail prend la suite de celui publié dans le Bulletin de l'A.P.M. n° 280 et intitulé "Problèmes posés par les liens possibles entre les enseignements de la grammaire et les mathématiques dans le premier cycle du second degré".

Nous avons alors proposé une structure destinée à rendre compte du fonctionnement de la phrase : cette structure, dite de dépendance, est en fait une arborescence dont les sommets sont étiquetés par les mots de la phrase et dont les arcs sont étiquetés par les relations syntaxiques liant ces mots.

2) Aspect mathématique

Il est remarquable de constater que certains ouvrages d'enseignement utilisent un concept très proche du précédent, pour rendre compte de la structure de certaines expressions du langage mathématique : expressions arithmétiques ou algébriques, par exemple.

3) Conséquence

L'idée qui nous a guidés pour élaborer ce travail réside dans cette convergence : le même concept formel peut rendre compte de la structure d'une phrase écrite en langue naturelle aussi bien que de la façon dont est construite une expression mathématique.

Nous sommes donc partis de cette structure de dépendance et nous avons cherché à l'utiliser pour cerner les points de convergence, ainsi que les points de divergence, entre langue naturelle et langage mathématique. Cependant, nous n'avons nullement recherché l'exhaustivité : l'outil de comparaison ne permet certainement pas d'y arriver.

4) Note

Signalons en passant que les structures de dépendance sont utilisées dans l'analyse automatique des langues naturelles ainsi que dans celle des "expressions arithmétiques" des langages de programmation.

II — Rappels

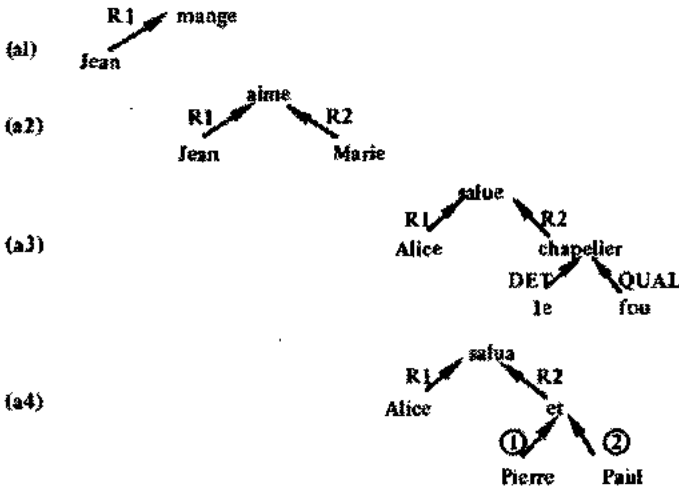
1) Structure de dépendance en langue naturelle

Nous ne donnons pas ici une définition formelle des structures

utilisées. Nous nous contentons de rappeler les éléments qui sont indispensables à la compréhension de ce texte.

- Une structure de dépendance est une arborescence dont les noeuds et les arcs sont étiquetés.
- Les noeuds sont étiquetés par les unités lexicales présentes dans la phrase dont on veut rendre compte.
- Les arcs sont étiquetés par des relations :
 - . R1 à R5
 - . CIRC (p) où p est une préposition
 - . DET, QUAL, etc...
 - . ①, ②, ... ②

Exemples :



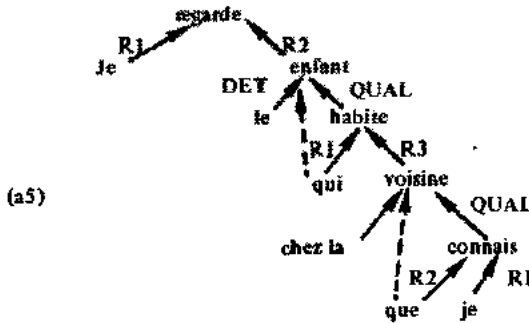
Remarque :

Les exemples (a3) et (a4) sont différents. Ceci est dû à l'étiquette du noeud 1. Dans le cas (a4), en effet, cette étiquette est "et". Cet élément ne peut normalement coordonner que des syntagmes de même fonctionnement. A partir d'eux, il engendre un syntagme de même fonctionnement que les coordonnées.

Exemple :

Adj + "et" + Adj → Adj
 N + "et" + N → N

etc...



Remarques :

1) Ces structures obéissent à la règle de projection : on disposera les flèches de telle sorte que l'ordre linéaire de la phrase puisse être restitué par projection sur un axe horizontal.

2) Deux arcs ne peuvent se croiser.

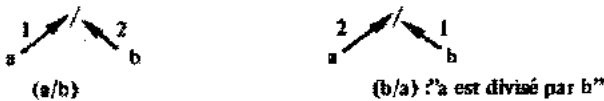
3) Les flèches en pointillé indiquent une relation entre unités lexicales. Dans l'exemple (a5), elles localisent l'antécédent du pronom.

2) Structure de dépendance en mathématiques

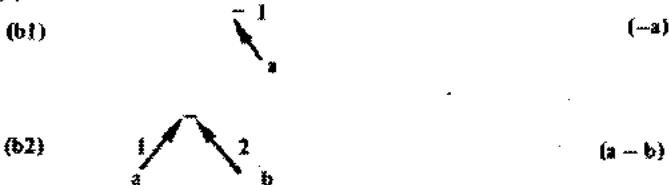
Pour les besoins de ce travail, nous sommes amenés à modifier les structures utilisées habituellement. Dans les utilisations habituelles des structures de dépendance, on n'étiquette pas les arcs de l'arborescence, et l'on a par exemple :

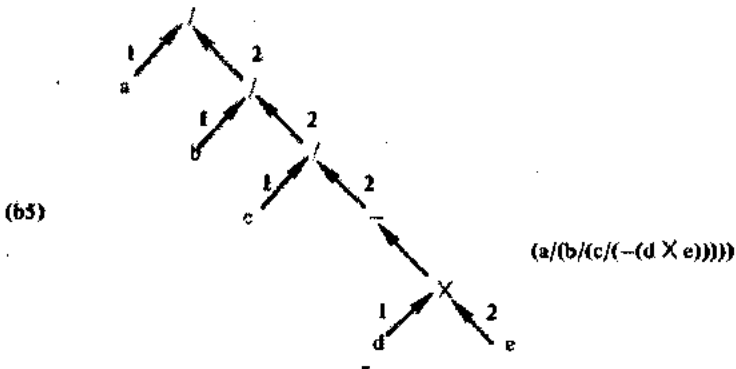
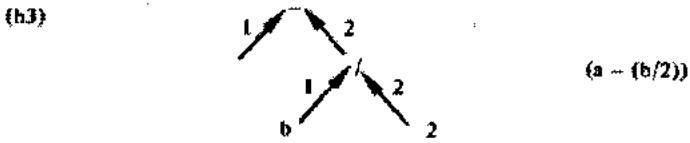


Nous adoptons une notation qui, étiquetant les arcs, introduit dans le langage mathématique une souplesse analogue à celle des langues naturelles. Nous considérons donc comme distinctes les deux structures :



Exemples :





3) Notes

a — Dans ce qui précède, il y a manifestement une parenté de structure entre exemples de même numéro (cf. par exemple a1 et b1). C'est à partir de là que nous procédons à la comparaison.

b — Une difficulté apparaît cependant ici : elle est liée à la distinction opérateur/opérande dans le langage mathématique. Cette distinction se traduit par le fait que seuls les opérandes peuvent apparaître aux feuilles. Il est difficile d'imaginer une telle distinction en langue naturelle, tout au moins au niveau des unités lexicales. Cependant, le fonctionnement des unités lexicales dans une phrase permet de constater que certains mots ne peuvent se trouver aux feuilles de l'arborescence : verbes à un mode personnel, "et", ...

Remarque sur langue et métalangue :

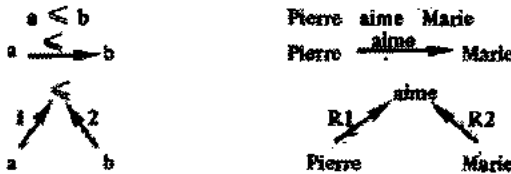
L'introduction d'unités lexicales de la langue dans un discours écrit dans la métalangue modifie évidemment ce qui vient d'être dit.

Exemples :

“La relation “ \leq ” est transitive”

“Le grammairien supprime “et” et “car” dans sa phrase”

c — Pour éviter d'être mal compris, nous voudrions insister sur le fait que les R_i , $CIRC(p)$, etc ... sont effectivement des relations, au sens mathématique du terme. Le seul problème réside dans leur interprétation. Pour nous faire comprendre, établissons le parallèle suivant :



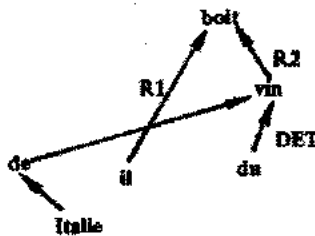
On met ainsi en évidence le caractère syntaxique des relations introduites. Toute autre interprétation est dangereuse, et notamment l'assimilation automatique d'un verbe à la caractérisation d'une relation.

III — Comparaison ne faisant intervenir que la syntaxe du langage mathématique

1) Existence en langue naturelle de phrases qui ne sont pas représentables par une structure de dépendance

Exemples :

- “L'avion et la voiture sont des moyens de transports aérien et terrestre.
- “Pierre et Jean achètent respectivement un cheval et une alouette”
- “D'Italie, il boit du vin”



Admettre cette représentation revient à s'autoriser le croisement des flèches. Ce qui viole la convention posée au II. 1 (remarque 2).

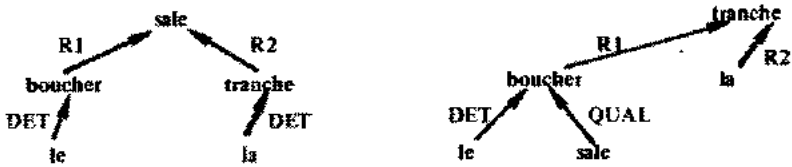
2) Ambiguïté

Le langage mathématique est non-ambigu : à chaque expression, on ne peut associer qu'une seule structure.

La langue naturelle est souvent ambiguë, *au niveau syntaxique*. A une phrase donnée, on peut fréquemment associer plusieurs structures.

Exemple :

“Le boucher sale la tranche”



Note : Ne pas confondre ceci avec l'ambiguïté dite sémantique, qui repose sur le fait qu'un mot a plusieurs sens.

Autres exemples :

“La berge plus élargie découvrait les soubassements des murs des jardins qui avaient un escalier de quelques marches descendant à la rivière” (BALZAC — Madame Bovary)

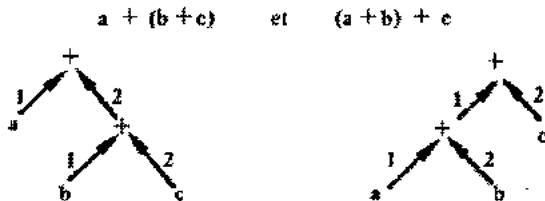
“J'aime la soupe de ma soeur qui est froide”

“Le cheval du paysan qui est noir”

3) *Problèmes de valence :* nombre de flèches aboutissant à un noeud donné

La comparaison met ici nettement en évidence la souplesse des langues naturelles ... ou le caractère rigide de la syntaxe du langage mathématique.

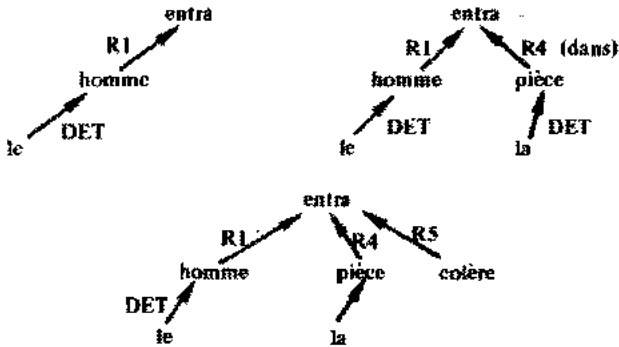
Rappelons que nous ne prenons pas en compte ici les propriétés mathématiques des opérations. Ainsi, nous considérons comme distinctes les deux expressions :



Dans ces conditions, la valence d'un opérateur mathématique est généralement fixée à la seule valeur 2. Exception : le signe “—” a 1 ou 2 comme valence.

En langue naturelle, la valence d'un verbe est très variable. De plus, on peut lui rattacher un nombre quelconque de circonstanciels.

Exemple :



etc, jusqu'à un cas limite comme :

“La foudre entra, comme par hasard, avec un hideux éclair, par la fenêtre ouverte, dans l'appartement, à l'instant même”.

(VILLIERS DE L'ISLE ADAM)

Remarque : Du point de vue qui nous occupe, il convient de se méfier des simplifications d'écriture qui sont génératrices d'ambiguïtés.

Exemple :



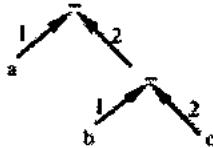
peut s'interpréter soit comme :

$$(a - b) - c$$



soit comme :

$$a - (b - c)$$

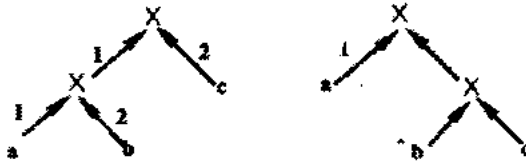


IV — Comparaison faisant intervenir les propriétés mathématiques des opérateurs

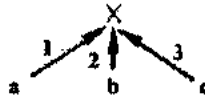
1) Associativité

Fréquente en mathématiques, elle paraît n'exister dans la syntaxe des langues naturelles que par l'existence de la structure de monoïde, qui ne nous intéresse pas ici.

En mathématiques, cette propriété permet une plus grande souplesse du langage. En effet, les deux structures suivantes :



étant équivalentes (même interprétation), peuvent être résumées en :



2) Commutativité

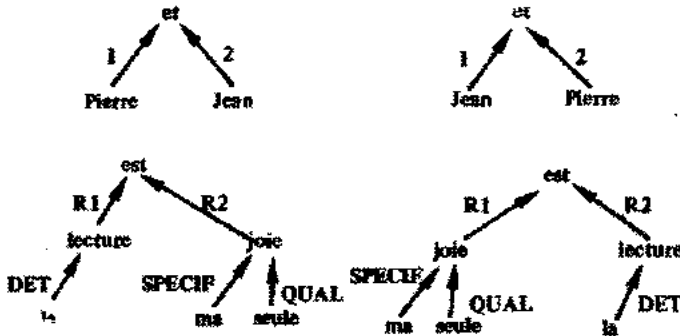
— En mathématiques :



sont équivalentes (même interprétation), si l'opération est commutative. On peut alors ne pas numéroter les flèches.

— En langue naturelle, la commutativité est rare, et elle ne joue jamais parfaitement.

Exemples :

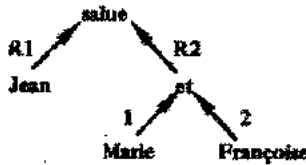


3) Distributivité

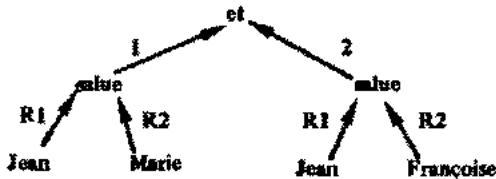
— En mathématiques, elle permet de conclure à l'équivalence des deux structures :



— En langue naturelle, elle joue rarement, et quand elle joue, elle ne conduit pas à une équivalence. Ainsi, la structure :



recouvre, *entre autres*, la suivante :



V — Problème : Chomsky ou Tesnière ?

Nous avons le choix, au départ, entre la théorie de Chomsky ("Grammaire générative") et celle de Tesnière ("Dépendances").

La première suppose l'existence de catégories syntaxiques (Syntagme nominal, Syntagme verbal, ...); la seconde se fonde sur les relations entre groupes de mots.

Nous avons préféré cette deuxième démarche : elle met davantage en évidence le fonctionnement dynamique de la phrase en même temps qu'elle donne lieu à une structure plus "intuitive". De plus cette structure nous paraît rendre mieux compte de la réalité linguistique profonde.

Du point de vue pédagogique, notre choix relève plutôt du pari (raisonné ...) que de la science pédagogique. Seules des recherches approfondies en psycholinguistique peuvent apporter une solution à ce problème.

Techniques pédagogiques dans le premier cycle

Animateur : CHABRIER

"Contribuer au bonheur du petit d'homme"

Walusinski

Esprit de ce groupe de travail et objectifs

— Ne pas séparer artificiellement pédagogie et contenu mathématique ; bien au contraire, étudier les relations réciproques entre les deux domaines.

— Insister particulièrement sur des techniques vivantes, concrètes, expérimentales, avec des preuves à l'appui, non pas pour les présenter comme "modèles" mais pour *ouvrir les problèmes*, après avoir déblayé le terrain.

— Tenter de convaincre ceux qui restent étrangers ou allergiques aux techniques pédagogiques, soit qu'ils ne croient qu'au contenu, soit qu'ils nient l'existence de la pédagogie, soit plus simplement qu'ils n'en ont jamais eu la moindre connaissance.

— Tenter de pondérer la théorie selon laquelle la pédagogie serait strictement "affaire de personnalité".

— Tenter de déceler à travers les modes, les engouements, les habitudes, ce qui est valable, ce qui est perfectible, ce que l'expérience a révélé comme convenable ; à travers l'évolution constante de la pédagogie, appréhender non pas des méthodes rigides mais des techniques vivantes et souples.

— "Le reste" (en parlant de tout ce qui n'est pas le contenu scientifique) "n'a pas à venir après". Après signifie souvent : jamais ...

— Dégager des exposés de l'animateur, des questions des participants, des débats, le maximum de conclusions concrètes à porter à la connaissance de tous les adhérents de l'A.P.M., du Comité National et du Bureau National de l'A.P.M., des Commissions pédagogiques nationales de l'A.P.M.

— Dégager enfin de ces conclusions concrètes un ensemble de données d'ordre pédagogique s'inscrivant dans les lignes directives de la Charte de Caen, et complétant les travaux de Dijon au plan des finalités, de l'organisation scolaire, et des Commissions pédagogiques nationales, régionales et départementales de l'A.P.M.

Première partie : Travaux libres de mathématique

Dans la période transitoire que nous vivons avant une adoption, plus ou moins complète, des propositions de l'A.P.M. sur l'organisation scolaire, la recherche, l'expérimentation, il nous faut prendre conscience de cette forme d'activité des élèves.

Les travaux libres s'inscrivent :

- dans le "nouveau style éducatif" dont il est question page 386, dans "Une nouvelle étape ..." issu des Journées de Dijon.
- dans l'objectif du développement de la créativité chez les élèves (comme chez les maîtres).
- dans "la rénovation profonde de la gestion de la classe".
- dans "la contagion novatrice sans laquelle ne sera pas débloqué le système actuel" (page 387).
- dans le secteur "innovation" (heures de soutien, d'options, d'activités dirigées, de clubs).
- dans le système *Noyau-Thèmes* qui a été défini à Dijon.
- dans l'objectif des échanges interdisciplinaires.
- dans le développement réel de la recherche pédagogique, non seulement au plan établissement, mais par des échanges entre équipes à tous les niveaux.
- dans l'objectif de la mise en route d'une équipe du premier cycle (voir annexe IV, pages 392 et 393).

Le but poursuivi dans ce groupé de travail est de prouver que les travaux libres, bien que ne pouvant pas, dans le système actuel, s'appliquer pleinement, sont parfaitement possibles. C'est la base des collègues qui doit prendre conscience de cette possibilité très réelle, dont il faut espérer qu'elle sera appliquée en plein un jour.

Essai de définition des travaux libres

Activités libres en ce sens qu'il ne s'agit pas de devoirs avec énoncés, à rendre à date fixe, avec questions imposées, ni de fiches dirigées ou à formule souple, ni de travaux dirigés.

Malgré tout, il y a un thème, un centre d'intérêt, qui n'est pas toujours celui qui est actuellement en cours. Le maître est animateur, impulseur ; il ne fait que suggérer.

Formules possibles de travaux libres

1. Exercices libres

Exemples en sixième :

- Trouver des exemples de relations.
- Trouver des exemples de couples de naturels, au moment de la construction de Z (avec $a > b$, $a < b$, $a = b$).

Exemples en cinquième :

- Trouver des exemples de liens verbaux de relations, déjà plus élaborés qu'en sixième.
- Exemples de divisions euclidiennes.

- Exercices libres de calculs sur les puissances dans N .
- Exercices libres de calculs sur Z .

Exemples en quatrième :

- Exercices libres complémentaires de calculs sur D .
- Exercices libres sur le groupe des puissances de 10.
- Exemples variés libres de suites décimales illimitées.
- Exercices libres d'addition dans R , de multiplications dans R .
- Travail libre (court) sur des exemples de bijections de D sur R (droite euclidienne).

2. *Petits "dictionnaires" de mots mathématiques faits par l'élève.*

3. *Résumés, formulaires faits par l'élève*

L'expérience m'a prouvé que cette technique, pratiquée dès la sixième, amène les élèves à des connaissances très solides.

Exemple : en quatrième, on arrive ainsi aisément à faire comprendre ce qu'est un groupe (tout autrement qu'en le citant formellement, dans un "océan fichiste").

4. *Liaisons spontanées faites par les élèves avec la Géographie et l'Instruction civique ; liaisons impulsées par les deux collègues*

Si, dès la sixième, on donne à l'élève l'habitude de réfléchir librement au quantitatif, à l'espace et au temps, quand il est en géographie comme quand il est en mathématique ; si ces liaisons sont judicieusement impulsées et voulues d'un commun accord par les deux collègues ; on s'aperçoit que ces liaisons spontanées existent.

Exemples en sixième : Précisions sur les notions souvent imprécises données en géographie de latitude et de longitude. Applications spontanées multiples des notions d'ensemble, sous-ensemble. Multiples applications des relations et du diagramme cartésien d'une relation. Calculs simples sur populations, densités de populations. Echelle d'une carte.

Exemples en cinquième : Développement des liaisons faites en sixième. Calculs de densités (application des propriétés des quotients et non plus "barrière des zéros" !). Pourcentages (correctement compris). Relations en géographie et relations en mathématique. Habitude des ordres de grandeur.

Exemples en quatrième : Eviter les monstruosité bien connues comme $1 \text{ cm} = 200 \text{ t}$. Calculs approfondis de pourcentages (en instruction civique). Exercices numériques sur les monnaies européennes. Aider les élèves à vaincre les difficultés de spatialisation. Intégrer, de concert (par exemple en un cours commun), le raisonnement ensembliste ou rela-

tionnel à la compréhension de la géographie. Exemple : schéma des parties d'un pays. Développement des liaisons faites en sixième et en cinquième, correction des erreurs, réduction maximum des carences.

5. *Liaisons spontanées et liaisons impulsées entre mathématique et histoire.*

- . Lectures historiques sur l'histoire de la numération, en sixième et en cinquième (voir anciens livres de Queysanne et Revuz) : les travaux libres sur ces lectures seront autrement productifs qu'une lecture monotone et dont les élèves ne retireraient presque rien.
- . Examens de portraits de mathématiciens (voir Brédif).
- . Explications *élémentaires* données aux élèves qui le demandent. Exemples : Descartes — Newton — Calcul infinitésimal (en quatrième) — Chasles (en quatrième) — Thalès (en quatrième) — Euclide (surtout en sixième et en cinquième).
- . Réduction des difficultés de situation dans le temps.
- . Exercices relationnels sur le temps en sixième et en cinquième.

6. *Liaisons spontanées et liaisons impulsées entre mathématique et français.*

Le but majeur est d'éviter l'irréparable et de ne pas bloquer les élèves pour une difficulté de langage.

Exemples en sixième : Il existe déjà des fiches simples sur les mots : le, un, emploi de ET et OU, à propos de l'intersection et de la réunion de deux ensembles, les, des. Travaux libres de formulation, en français, de propriétés étudiées en mathématique. Exemple : Propriété fondamentale de la différence dans \mathbb{N} . Le collègue de français peut corriger les phrases, puis les comparer, et enfin indiquer les tournures les moins lourdes. Etude de mots : réflexivité — transitivité — commutativité — associativité.

Exemples en cinquième : Exemples de liens verbaux plus élaborés, en français, de relations. Etude en commun du comparatif et du superlatif en grammaire. Etude des mots ou expressions : et, ou, le, les, des, un, tout, si, quel que soit, pourtant (voir le Brédif de cinquième et les exercices).

Exemples en quatrième : En collaboration avec le professeur de français et de latin, étude des mots : associativité — commutativité — distributivité — extrêmement et infiniment (pour les suites décimales illimitées à ne pas confondre avec les décimaux ayant "beaucoup de chiffres") — incidence — abscisse — intersection.

7. *Liaisons avec le dessin, le travail manuel.*

Contrairement à certaines opinions qui se prévalent de l'existence de la "géométrie propre" veulent absolument éliminer le dessin géométrique, les manipulations, nous pensons, bien au contraire, qu'il faut absolument développer, par une pédagogie active, ces activités dès la sixième. L'enfant doit prendre très tôt conscience des moments où il faut des manipulations et des moments où il faut de la mathématique. Justement, les travaux libres, par leur spontanéité, leur impact plus profond, sont de nature à lui donner de saines habitudes.

8. *Exercices étendus.*

L'expérience démontre très concrètement que le thème judicieusement développé sur un exercice étendu (dans le temps — et dans sa structure) intéresse les élèves et donne — sur toute une classe — des résultats vraiment intéressants par la quantité, l'acharnement (notamment au calcul), à partir du moment où l'élève, la classe, n'ont plus les carcans de la date de remise — du temps limité.

Exemples en sixième : Premiers calculs libres sur les bases de numération.

Exemples en cinquième : Calculs sur les puissances dans \mathbb{N} .

Exemples en quatrième : Calculs à la main pour approcher $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.
Addition dans \mathbb{R} .

Exercices sur les bijections de \mathbb{D} sur \mathbb{R} (droite euclidienne).

9. *Travaux libres sur les relations*

Les travaux libres bien impulsés sur les relations sont de nature, l'expérience le prouve, à éviter de nombreux écueils, déjà "classiques".

- 1 La "patatite" et la "nouillite" car l'enfant ne retient que le "jeu" du dessin agréable. Au contraire, les travaux libres sur tout un tas d'exemples qui, petit à petit, dégageront nettement l'idée de produit cartésien et de graphe, permettront une compréhension saine.
- 2 La simple répétition, par les travaux libres, de symboles comme $f(x)$ et d'expressions comme : l'image par f du nombre x , sera bien meilleure qu'une connaissance verbaliste et formelle de la chose.
- 3 L'enfant doit inventer des relations lui-même. Il faut absolument l'y habituer. "Les belles relations toutes cuites" des fiches, des manuels, ou du professeur, ne suffisent pas. Les relations sont un domaine immense, un véritable univers pour le développement de l'esprit de créativité des élèves. Beaucoup de professeurs de sixième, cinquième, quatrième, troisième, devraient se rendre, dans leur C.E.S., dans les

classes de leurs collègues de sixième et cinquième de transition, et verraient comment les élèves arrivent à *trouver* des relations.

Ainsi, les travaux libres sur les relations seront une excellente occasion pour apprendre aux élèves à *chercher*, et pour ne plus entendre "ils ne mordent pas", "ils ne font rien".

10. *Figures géométriques libres.*

a) *L'objectif*

Puisqu'il faut absolument faire de la géométrie propre au niveau de la quatrième, le problème fondamental est d'y préparer les élèves en sixième et en cinquième (et encore plus depuis l'école primaire). Penser qu'"il ne faut pas faire de "géométrie" en sixième et en cinquième" est excessivement grave si, — comme il est fort à craindre — on comprend très mal, dans le premier cycle, le vrai problème de la géométrie.

b) *Les faits*

. C'est d'abord un *fait* hélas ! vérifié trop souvent, que la partie du programme actuel de sixième portant le titre "Etude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesure" est : soit éliminée par faute de temps, — soit bâclée, — soit faite dans l'état d'esprit ancien, — soit le plus souvent, inachevée par faute de temps. Situation analogue et souvent pire en classe de cinquième.

. C'est ensuite un autre *fait* que bon nombre de collègues se refusent à faire une partie dont ils disent : 1) qu'elle n'est pas mathématique, 2) qu'elle contredit le programme de quatrième (exemple : définition du parallélogramme ...), 3) qu'elle a été faite au CM₁ et au CM₂.

. C'est ensuite un troisième *fait* dont l'expérience d'une première année d'enseignement en quatrième démontre la gravité : les élèves ont d'immenses difficultés en géométrie en quatrième, dans les classes faites encore traditionnellement, en dépit des nouveaux programmes.

Faire disparaître, en sixième et en cinquième, toute manipulation d'ordre géométrique, toute pratique des figures géométriques, apparaît excessivement dangereux, au moins pour six raisons :

1ère raison : Ce serait contraire à l'intérêt des élèves allant plus tard dans les C.E.T. ou les L.T.

2ème raison : Ce serait *tarir* toute possibilité de faire précéder la géométrie propre de travaux pratiques de compréhension en quatrième. Exemple 1 : manipulations sur les graduations de la droite physique, précédant la droite euclidienne. Exemple 2 : pratique réelle, beaucoup plus considérable, plus profonde, que ce qu'on croit habituellement, des innombrables "traquenards" et blocages, au plan élevé, nés des incom-

préhensions, du manque de pratique, sur points — segments — demi-droites — droites. Exemple 3 : exploration du plan physique.

3ème raison : Ce serait tarir tout esprit de recherche d'ordre géométrique, handicapant ou bloquant toute possibilité de faire des problèmes de géométrie propre en quatrième et troisième.

4ème raison : Ce serait oublier les étapes naturelles de la formation de la formation de la pensée mathématique chez l'enfant (voir Dienes).

5ème raison : Ce serait, très malheureusement, maintenir le défaut bien connu de l'enseignement traditionnel en géométrie dans le premier cycle, à savoir son inefficacité notoire et la préparation de lendemains bien sombres aux malheureux ainsi peu nantis, passant dans le second cycle.

6ème raison : Ce serait maintenir l'enseignement de la Technologie dans une infériorité notoire (à part de très rares endroits). Vouloir exclusivement confier les manipulations d'ordre géométrique aux maîtres de technologie serait excessivement dangereux, car on couperait ces manipulations de l'enseignement de la mathématique. Il faut au contraire construire une liaison scientifique réciproque entre les deux.

c) Les figures géométriques

Les manuels, les fiches, sont traditionnellement beaucoup trop pauvres en figures géométriques. De même qu'on apprend à nager à la mer ou à la piscine, on apprend la géométrie en faisant et en étudiant de très nombreuses figures. On a vu heureusement récemment des réactions contre cette carence.

Exemples : 1) Collection Mauguin cinquième (travaux dirigés : fiches 27 à 32)

2) Brédir de troisième avec 118 pages comportant une ou des figures géométriques.

On fera donc faire et étudier, en classe, le maximum de figures géométriques (en espérant qu'un jour le ministère accordera en sixième, cinquième, quatrième et troisième, une heure de plus en mathématique).

d) Les figures géométriques libres

L'utilisation exclusive de la figure géométrique imposée, voire rigide "dictée", la figure de problème, la figure du bel exposé ex cathedra, la figure rare, voilà les ennemis ! ! !

Les figures géométriques libres, construites autrement que par le professeur, les figures "inventées" par les élèves, les figures répétées, refaites "encore mieux", voilà ce qu'il faut.

Exemples :

en sixième :

1) figures faites en liaison avec le professeur de géographie : sphère terrestre — ligne des pôles — équateur — méridiens — parallèles — latitude — longitude.

2) représentants assez nombreux de la classe d'équivalence de segments.

3) figures libres permettant de détruire, dans toute la classe, les séquelles de confusion entre segments, droites, demi-droites, et les ignorances.

en cinquième :

1) A quoi servira une étude concrète du cube, ou une étude ensembliste abstraite (paires de droites, paires de plans ...) si l'enfant ne construit pas lui-même et n'étudie pas réellement force cubes !!

2) Multiplier les exemples comme celui, excellent, de Queysanne et Revuz, de cinquième (page 197).

3) Figures libres sur demi-plans.

4) Figures libres nombreuses sur repérages, quadrillages, avec l'emploi de papier millimétré. Exemple : chemins sur un quadrillage.

5) Figures libres, après utilisation de matériel, ou fabrication par les élèves, pour les objets simples de l'espace.

6) Ensembles convexes (voir Caparros cinquième (Bordas) pages 136, 137, 138, 139 — Galion cinquième fiches 62, 63, 64).

Les figures géométriques libres une fois faites devront être l'occasion, en classe (ou en prolongement du travail libre) d'un approfondissement de la notion de relation (Exemple : relations entre les faces d'un solide — Galion cinquième, fiche 59).

en quatrième :

1) De préférence à des introductions peut-être remarquables pour les professeurs (je dirai que ce sont des "cures" de rajeunissement et de "nettoyage"), au sujet des constatations et de la mathématisation, et à un passage brutal et non naturel, pour l'élève, à la droite euclidienne (précédé par une étude dirigée de la bijection entre l'ensemble des points d'une droite physique et \mathbb{R}), il vaut beaucoup mieux :

— De très nombreuses manipulations et études sur les graduations de la droite physique, suivies de figures libres et études libres de l'élève.

— L'étude du changement de sens.

— L'étude du changement d'origine, dans les mêmes conditions.

— La compréhension, à partir de nombreux exemples trouvés librement par les élèves, des deux familles de bijections.

— Le passage, encore libre, et non imposé, au modèle mathématique.

2) Connaissant bien, depuis longtemps, les difficultés des élèves du premier cycle pour comprendre et appliquer la relation de Chasles, j'ai

été amené à constater que la démonstration provenant de la définition moderne de la mesure algébrique d'un bipoint passait fort bien. Mais j'estime que cet avantage serait bien perdu, si l'on n'apprenait pas vraiment aux élèves une application réelle. Voici ce que j'emploie :

le travail libre consistant à faire choisir *librement* la lettre intermédiaire par l'élève, un nombre assez grand de fois, avec figures libres associées.

On ne comprend vraiment une chose que si on l'écrit soi-même plusieurs fois et librement.

3) Est-il réellement souhaitable qu'en quatrième des leçons entières comme : étude des bijections entre l'ensemble des points d'une droite physique et \mathbb{R} , ordre sur la droite, premiers axiomes du plan mathématique, parallélisme, projections, se déroulent sans figure, ou avec une seule figure ?

Comment le professeur peut-il s'attendre à un succès même relatif en donnant des exercices ou des épreuves de contrôle, après de pareilles leçons ?

Les figures libres sont *l'unique moyen d'assurer* le succès des élèves, après, bien entendu, des leçons émaillées de travaux pratiques avec figures plus ou moins dirigées. Voir Queysanne — Revuz, quatrième, pages 234-235.

4) Enfin, si, bien entendu, du point de vue de la géométrie propre, les choses sont maintenant très bien établies, il n'en reste pas moins que l'axiome et le théorème de Thalès ne passeront jamais, au plan élèves, convenablement, pour une masse importante — avec un nombre restreint de figures. Justement, il faut absolument profiter de la magnifique simplicité apportée par l'exposé nouveau pour multiplier les travaux dirigés, les exercices, *et les travaux libres avec figures libres et études libres.*

5) De même pour la construction de barycentres de deux points, la symétrie par rapport à un point, le parallélogramme.

En résumé, on va vers un échec, vers une catastrophe appelée à prendre des proportions de plus en plus considérables (dans les classes de type I comme dans les classes de type II) si l'on se méprend sur les qualités remarquables de la structure du nouvel exposé, et si l'on oublie les exigences pédagogiques pour les enfants de cet âge qui, — ainsi que Diènés le dit — doivent passer nécessairement par les six étapes du développement de la pensée mathématique. Il est à craindre que géométrie propre, pour certains, signifie : "absence de figures" ou du moins "réduction du nombre des figures". Au stade de la quatrième, il n'y a rien de plus faux. Une cause de l'échec de la géométrie traditionnelle était d'ailleurs aussi le nombre ridiculement faible des figures réellement *pensées* par l'élève. Bien entendu, dans les figures libres, seront propo-

sées les figures ensemblistes (voir Galion quatrième, fiches 34, 35, 36, 37, 48, 49, 50, 51). Il y a là une méthode sérieuse et séduisante à exploiter en travaux libres.

Je me permettrai, pour terminer ce paragraphe volontairement important sur les figures géométriques libres, de citer M. Roumieu, directeur de l'IREM de Montpellier, dans son ouvrage de géométrie pour les professeurs du premier cycle : "Je me suis efforcé de présenter un exposé déductif fondé sur des axiomes très "naturels". Ce qui signifie que ces axiomes doivent être l'énoncé précis de propriétés déjà familières aux élèves, soit parce que ces propriétés sont très intuitives, soit *parce que de nombreux exercices de dessin les ont mises en lumière*".

11. *Travaux libres sur l'histoire des mathématiques*

Les élèves font les recherches eux-mêmes. Il suffit de proscrire la compilation. Exemples : à propos du diagramme cartésien, faire rechercher des renseignements sur Descartes. Le but est d'amener les enfants à constater que la science s'est construite progressivement. Il est bon, alors, d'établir une liaison avec le programme d'histoire. Autre exemple : histoire du nombre π .

12. *Dialogues libres avec le professeur*

Si, malheureusement, ces dialogues libres sont difficiles ou bien trop rares actuellement, et si, comme il faut l'espérer, Jeanne Bolon finira par avoir raison et amènera le ministère (avec nous tous) à repenser complètement le cadre de l'emploi du temps, et à réserver de larges moments au dialogue réel professeur-élève, il n'en reste pas moins vrai qu'on peut et qu'on doit préparer ce nouveau style éducatif.

- . On ne peut bloquer un élève qui désire le dialogue.
- . Il faut lui répondre, lui donner satisfaction, immédiatement.
- . Un travail libre écrit est l'excellente occasion de l'épanouissement d'une intervention — même si elle se révèle peu productive et à fortiori, si elle décèle des aptitudes.

13. *Travaux libres stimulés par la promesse d'expositions de travaux ou d'utilisation.*

- . Exposition pour les parents.
- . Utilisation pour les professeurs recyclés à l'IREM.
- . Affichage dans la classe avec utilisation (formulaires — résumés).

14. *Participation des élèves à des séances d'animation pour instituteurs.*

J'ai constaté que les instituteurs prenaient un très vif intérêt à voir,

sur le vif, travailler des élèves de sixième ou de cinquième. Il en résulte d'intéressantes confrontations sur le plan psycho-pédagogique. Il est d'autre part certain que l'instituteur voit ainsi, très concrètement, ce que sont : les travaux dirigés, les travaux de groupes, les travaux libres, le travail sur fiches.

Quant aux élèves, cette forme de travail libre les stimule sérieusement.

Après cet exposé sur 14 formules de travaux libres effectivement expérimentés depuis trois ans au C.E.S. de Rémoulins, les questions suivantes sont posées par quelques-unes des 37 personnes ayant choisi ce groupe de travail :

1ère question. Peut-on souhaiter la prise en charge d'un élève ayant des difficultés, par un élève brillant en classe, et au dehors ? Bien sûr. La formule des travaux libres le permet aisément. L'expérience prouve que l'élève faible s'améliore mais il faut impulser les travaux libres sur une grande durée.

2ème question. Les élèves se regroupent-ils par affinité, ou travaillent-ils individuellement ? Le travail est fait en dehors de la classe, l'horaire étant insuffisant, d'où difficultés de regroupements. Cependant, des enfants habitant le même village ou la ville peuvent se grouper. Dans une permanence, les élèves peuvent se grouper, dans une classe, pour leurs travaux libres. Si certains élèves veulent faire, quelquefois, un travail libre individuel, ils le font, bien entendu.

3ème question. Pourquoi a-t-on omis de parler d'une liaison possible avec les sciences d'observation ? Réponse : c'est un oubli, bien involontaire. Il est donc possible de trouver 15 formules de travaux libres.

Anecdote pour la détente : Ayant assisté à un cours sur l'oignon, en sixième, j'ai constaté que ce cours me faisait penser à la différence entre l'objet réel et la représentation faite au tableau et prise par les élèves. Sur le champ, je leur ai dit de faire le rapprochement entre les sciences et la mathématique, avec un ensemble et sa représentation par un diagramme de Venn ou de Carroll. J'ai constaté que, grâce à l'oignon (!), les enfants avaient à jamais franchi les difficultés qui, précédemment, dans le premier trimestre de sixième, arrêtaient quelques-uns. L'objet réel et son image dans un diagramme étaient désormais bien distingués.

4ème question. Travaux libres possibles d'Informatique. Des études à ce sujet ont été ou vont être faites dans certains IREM. Il faut qu'elles soient publiées. Il faudra s'adapter aux enfants de sixième, cinquième, quatrième ou troisième.

5ème question. Travaux libres possibles de probabilités. S'adresser à M. Hennequin, professeur à Clermont-Ferrand, qui a fait un exposé sur une expérience faite aux U.S.A. avec des enfants de 5 à 6ans. J'ai été heureux d'enrichir ainsi ma propre expérience. Je pense faire, en troisième, l'an prochain, des travaux libres sur la programmation linéaire (bien élémentaire, bien sûr) et sur machines (fournies par l'IREM).

6ème question. Travaux libres en liaison avec le travail manuel.

Réponse : on rencontre des difficultés car le professeur de T.M.E. ne connaît pas la mathématique. Cependant, il peut intervenir dans la fabrication de cartonnages, de matériels simples (bases), de fiches perforées, de cartes perforées ...

Intérêt des travaux libres pour les élèves.

Une constatation expérimentale, fréquemment renouvelée, est que, dès le moment où l'enfant fait des travaux libres (dès son entrée en sixième), on est stupéfait des résultats. A travers des réflexions d'élèves, on peut dire qu'il existe une émulation générale, une espèce d'engouement. Certains élèves se sont trouvés débloqués en quatrième car on ne met jamais de mauvaises notes (on supprime ainsi la peur de la mauvaise note). Les travaux libres pouvant être accompagnés de travaux de groupes en classe ou hors de la classe, facilitent les discussions, les contacts entre élèves. Ils développent la personnalité. La compréhension est meilleure. L'élève a conscience qu'il faut se rappeler des leçons précédentes et non plus simplement apprendre par coeur, pour un jour donné — sans aucune suite. L'élève apprécie la liberté des exercices. Il apporte plus de soin à la présentation des travaux. On constate à la longue une sûreté de vocabulaire. Le goût de la liberté de la recherche se développe.

Rubrique des "récompenses" :

- EE₊ Bonne expression écrite
- Cr₊ Bonne compréhension
- MS₊ Méthode, soin
- I₊ Esprit d'invention
- T₊ Quantité de travail

Indéniablement, la masse de renseignements recueillis de cette façon permet une connaissance non formelle de l'élève, beaucoup moins superficielle. Elle permet aussi des progrès certains, dans une atmosphère dynamique.

Note habituelle (en lettres ou chiffrée).

Intérêt des travaux libres pour le professeur

- . Ils permettent de déceler les erreurs personnelles, d'où récupération d'élèves (par exemple notions non assimilées les années précédentes — à cause d'absences).
- . Ils permettent de déceler les insuffisances notoires de travail (chez ceux qui n'en rendent pas ou qui en rendent trop peu).
- . Ils permettent de déceler, de promouvoir le goût pour la mathématique.
- . L'affichage permet au professeur de faire faire des lectures de formules ou propriétés, de débloquer rapidement un élève.
- . Ils permettent de réaliser la continuité nécessaire de chapitre à chapitre et d'éviter ces barrières stupides qui ont fait tant de gâchis, de catastrophes, dans l'enseignement traditionnel. Les "mauvais en math." sont ainsi en nombre extrêmement réduit.
- . On constate l'augmentation considérable de l'impact du calcul sur les élèves puisque, par le calcul libre, on leur en donne naturellement le goût et la pratique saine.

Réflexions, critiques constructives, limites des valeurs des travaux libres de mathématique.

- . En dehors de la correction individuelle des travaux libres qui est indispensable et qui s'ajoute naturellement à la correction des devoirs et épreuves de contrôle, il faut une correction collective. Or le temps manque.
- . Si le professeur a une classe de cinquième, ou de quatrième, ou de troisième, qui n'a jamais fait de travaux libres, il lui sera difficile de lui donner l'habitude des travaux libres. C'est dès la sixième qu'il faut commencer.
- . En sixième et en cinquième, les travaux libres sont aisément supportés par les élèves. En quatrième, il semble qu'il y ait des périodes importantes où ils refusent d'en faire en dehors de la classe — car ils sont surchargés de travail.
- . NON Les seules issues possibles sont l'augmentation de l'horaire avec travaux libres intégrés — ou la réforme de l'organisation scolaire comme Jeanne Bolon le préconise.
- . Si une classe de sixième a commencé les travaux libres avec un professeur, et si elle change de professeur, elle risque de ne plus en faire ...

Deuxième partie : Rubrique de diverses techniques pédagogiques

Le temps imparti au groupe de travail (9 h à midi, vendredi matin) ne permettait pas une étude approfondie.

1) *Travaux pratiques de compréhension*

Exemple 1 en quatrième : observations, manipulations, graduations de la droite physique. Il est indispensable de s'étendre suffisamment sur ces travaux avant de passer à la droite euclidienne. Puis, on revient à la droite physique avec "le changement de pas" et d'abondantes manipulations, avant de passer à la droite affine.

Exemple 2 en quatrième : addition de deux réels.

Plan de travail pratique de compréhension de l'addition dans \mathbb{R}

1. Ecrire les valeurs approchées par défaut à 10^0 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} près du réel $a = 1,87777 \dots$
2. Ecrire les valeurs approchées par excès de même rang de a .
3. Ecrire les valeurs approchées par défaut de même rang de $b = 3,2960 \dots$
4. Ecrire les valeurs approchées par excès de même rang de b .
5. Ecrire les sommes des valeurs approchées de a et de b , par défaut, de même rang.
6. Ecrire les sommes des valeurs approchées de a et de b , par excès, de même rang.
7. Existe-t-il $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$4 \leq r < 6 \quad (1)$$

$$5 \leq r < 5,2 \quad (2)$$

$$5,16 \leq r < 5,18 \quad (3)$$

$$5,173 \leq r < 5,175 \quad (4)$$

$$5,1737 \leq r < 5,1739 \quad (5)$$

8.

	Partie entière de r	1ère décimale	2ème décimale	3ème décimale	4ème décimale	5ème décimale	6ème décimale
(1)	4 ou 5	?	?	?	?	?	?
(2)	5	0 ou 1	?	?	?	?	?
(3)	5	1	6 ou 7	?	?	?	?
(4)	5	1	7	3 ou 4	?	?	?
(5)	5	1	7	3	7 ou 8	?	?

C'est le "jeu de massacre" des points d'interrogation.

2) *Travaux dirigés*

S'asseoir, donner des exercices et les corriger à la fin de l'heure, ce n'est pas du travail dirigé. Expliquer les exercices à 2 ou 3 qui

"suivent", ce n'est pas du travail dirigé. Imposer la recherche dans un cadre très rigide, ce n'est pas du travail dirigé. Faire faire une fiche sans intervenir en aucune façon et emporter les travaux des élèves pour les corriger, ce n'est pas du travail dirigé. Le vrai travail dirigé ne peut se faire qu'avec un nombre réduit d'élèves. Avec une classe entière, non dédoublable, de 24 élèves, on ne peut faire qu'un travail dirigé de valeur très relative. Il faut arriver au maximum de réponses individuelles.

3) *Technique des multi-tableaux*

Une classe de mathématique devrait être "tapissée" de tableaux. On peut envoyer, avec deux grands tableaux déjà, 7 ou 8 élèves en même temps. Ceux qui restent à leur place travaillent sur leur classeur. Puis la classe profite de tout ce qui a été fait au tableau (erreurs comprises). Ceux qui sont venus au tableau, se corrigent ensuite après réflexion. La classe peut être amenée à juger les avantages et les inconvénients de chaque méthode de travail (résultats trop rapides, raisonnements trop longs ...), de même que les aberrations. Collectivement, les points compris apparaissent mieux, les points incompris (dont le professeur risquait de ne pas s'apercevoir) sortent au grand jour. Cette technique réussit brillamment pour les exercices courts et l'on peut envoyer plusieurs "fournées" d'élèves, l'on peut faire de "bonnes brchettes" d'exercices.

4) *Interrogation volante*

Toute la classe doit y passer. Cette technique ne peut s'appliquer au-delà de 24 élèves.

Exemples :

en sixième : élaboration de la définition d'une fonction avec, en même temps, un excellent exercice de français.

en cinquième : calcul mental, sur puissances dans \mathbb{N}
sur additions simples dans \mathbb{Z} .

en quatrième : compréhension en profondeur de la notion de groupe.

5) *Travail sur fiches*

Il ne faut pas s'enfermer dans cette méthode : même des fiches bien expérimentées ont provoqué des ennuis en quatrième. Il faut savoir faire de temps en temps, sa propre fiche. Il faut se méfier du nombre trop peu important d'exercices sur certaines fiches. Toutefois, le professeur, qui, sans cesse se documente, sur chaque sujet, avec plusieurs sortes de fiches et en retire le maximum, doit pouvoir tirer de cette technique pédagogique, un enrichissement considérable de son enseignement.

Il semble aussi que le travail trop ponctuel de certaines fiches empêche les élèves de prendre progressivement l'habitude de faire des problèmes assez étendus.

De toutes façons, la "fichite" c'est-à-dire la classe faite uniquement par fiches est condamnable. Le travail sur fiches figure, pour une part, dans l'ensemble pédagogique, mais il est loin d'être la seule technique pédagogique valable.

Enfin, il faut remarquer que le nombre et la longueur des fiches est incompatible avec le temps qui nous est imparti dans l'année scolaire.

6) *Bandes auto-contrôles*

La collection Vissio-Polle-Clopeau les a introduites. Elles permettent un avantage pour les absents, au moment du rattrapage. Les parents peuvent, dans une certaine mesure, aider leurs enfants. Mais la question primordiale reste : comment contrôler que chacun a fait la bande auto-contrôle ? On peut insérer des questions de ces bandes dans une épreuve de contrôle. Il y a aussi les cache-réponses.

7) *Journal scolaire*

(Un exemplaire de celui de Rémoulins a été distribué).

8) *Interrogations d'élèves à élèves*

Un groupe prépare des questions et les pose aux autres. On découvre ainsi certains élèves sous un jour nouveau.

9) *Travaux pratiques de répétition en extension*

Varié les questions sur un même sujet.

Exemple : plans de calculs sur les rationnels.

10) *Corrigés polycopiés*

Le corrigé collectif, fait au tableau, et plus ou moins bien noté, est très largement insuffisant. Il vaut mieux un corrigé polycopié. Evidemment, cela suppose une augmentation considérable du stock de papier et du matériel de polycopie ! Il faut, en prolongement, une explication complète des questions non comprises.

On voit enfin apparaître des livres d'exercices avec corrigés. Personnellement, je salue cette innovation heureuse dans le premier cycle.

A signaler les fiches de calcul numérique en sixième et en cinquième de Glaymann et Jandot et le corrigé polycopié souhaitable de ces fiches.

11) *Télévision*

a) Inconvénients : horaire, brièveté des émissions.

- b) Comment rechercher une utilisation vraiment concrète ?
- c) Ces émissions ne peuvent être efficaces que si elles ont un prolongement (et peut-être même une préparation).
- d) Les IREM commencent à demander à des professeurs de "se jeter à l'eau" pour présenter à leurs collègues, avec critique constructive, une leçon faite dans leur classe et télévisée.
- e) Un collègue de Montguyon signale que, dans son C.E.S., des élèves de cinquième font des "cours" télévisés pour ceux de sixième.

12) Cartes perforées

(Ne pas oublier qu'on les utilise et qu'on les utilisera encore plus dans le primaire — voir celles de l'O.C.D.L.)

13) Blocs logiques

14) Epreuves de contrôle avec documents

Je recevrai volontiers les critiques, suggestions, résultats d'expériences de collègues qui auraient déjà exploité ces diverses techniques et qui continueraient en 72-73. Il est certain que l'A.P.M. doit sérieusement s'occuper, très concrètement, des techniques pédagogiques et ne se contenter :

- . ni d'une a-pédagogie.
- . ni d'un hermétisme pédagogique.
- . ni de la peur de l'innovation.
- . ni de la pratique exclusive du contenu.
- . ni des perpétuelles déclarations des pessimistes

Troisième partie : Circulation de travaux libres faits au C.E.S. de Rémoulins

Sixième : ensembles, \subset , \cap , \cup , arbres, relations, "activités pré-géométriques", bases (calculs en base deux).

Cinquième : calculs sur Z .

Quatrième : lois de composition interne. Pratique de la notion d'éléments symétriques. Groupe $(Z, +)$. Groupe des puissances de 10. Ensemble D . Comparaison de tous les ensembles connus munis d'une loi de composition interne.

Calculs d'approche de la racine carrée de 2, de la racine carrée de 3 (calculs faits à la main, faute de machines). Résultats :

1,41421356237
1,73205080756.

Le laboratoire de calcul de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud (M. Poly) auquel j'ai demandé de me donner les 10

premières décimales m'a envoyé, pour les racines carrées de 2 à 99, le développement complet de la méthode, fait sur ordinateur.

Par exemple, pour la racine de 2, les élèves avaient fait :

$1,4^2 < 2 < 1,5^2$	à partir de la table des carrés
$1,41^2 < 2 < 1,42^2$	avec les multiplications à l'appui
$1,414^2 < 2 < 1,415^2$	après tâtonnements sur le 4
$1,4142^2 < 2 < 1,4143^2$	après tâtonnements sur le 2
$1,41421^2 < 2 < 1,41422^2$	après tâtonnements sur le 1
$1,414213^2 < 2 < 1,414214^2$	

et ainsi de suite jusqu'à

$$1,4142135623^2 < 2 < 1,4142135624^2$$

Je leur avais distribué du papier de programmation déjà utilisé par un programmeur de banque, époux d'une collègue. Les 56 élèves de mes deux classes de quatrième s'en sont donné à coeur joie.

Le 18 janvier 1972, l'IREM de Montpellier est venu téléviser, au C.E.S. de Rémoulins, la classe correspondant à l'examen des travaux des élèves sur cette question de la racine de 2.

Je n'ai pu, malheureusement, présenter le cours télévisé à Caen.

Grâce au travail du Centre de Calcul de l'E.N.S. (reçu le 12 Juin), je vais pouvoir, avec les élèves, prolonger ce travail.

Le 18 Janvier, lors du cours télévisé, une manipulatrice (secrétaire d'intendance) fit fonctionner la machine de bureau du C.E.S. pour vérifier les multiplications des élèves. Ils constatèrent qu'elle se bloquait au-delà de 141421^2 .

Travail en commun Géographie — Mathématique sur les monnaies européennes (nombres décimaux).

Travail en commun Technologie — Mathématique : 1) pied à coulisse, 2) incertitude relative.

Travaux en commun Géologie — Mathématique : 1) calcul approché de la durée de l'ère secondaire, 2) travail logique sur la craie (avec pratique de la négation).

Travail en commun Latin — Mathématique : à propos d'une phrase latine spontanément choisie par les élèves pour reconnaître un phénomène analogue à la distributivité d'une loi de composition interne par rapport à une autre.

De nombreuses questions ont été posées par les membres du groupe, qui se sont vivement intéressés à ces travaux et qui ont eu un exemple "d'enfants heureux dans la classe de mathématique".

Quatrième partie : Conclusions concrètes et demandes au plan APMEP, ministère et IREM

L'animateur et les participants, ainsi que Mesdames Delépine et Amour, secrétaires du groupe, ont conçu ce travail comme devant déboucher sur les conclusions concrètes et demandes suivantes :

1 Ministère

- A. Demander au ministère les raisons précises du refus d'augmentation de 1 heure dans l'horaire de mathématique en quatrième. Quel serait le coût ?
- B. Replacer l'horaire augmenté, comme en sixième, en cinquième, et en troisième, d'une heure, dans l'ensemble d'un renouvellement pédagogique.
- C. Approbation des demandes de l'A.P.M. d'allègement des programmes de quatrième.
- D. Demande de textes ministériels sur les liaisons entre mathématique et autres disciplines dans le premier cycle.
- E. Dédoublage de toutes les classes du 1er cycle, en travaux dirigés, même celles de 24 élèves.

2 I.R.E.M.

- A. Amener les I.R.E.M. à inclure, dans les séances de formation, des études concrètes sur les liaisons inter-disciplinaires, pour les professeurs du 1er cycle.
- B. Profiter de la seconde étape d'expansion des I.R.E.M. vers la recherche pédagogique pour y provoquer, y développer d'un commun accord avec eux, une recherche solide et expérimentée sur les techniques pédagogiques. Elle devra se traduire par des rapports très accessibles aux professeurs et mettre un terme à l'inexistence quasi-absolue, pour le 1er cycle, d'une information pédagogique réelle. Ce qui ne signifie nullement que, par ailleurs, les recherches sur le contenu, pour le 1er cycle, ne continuent pas et ne s'améliorent pas.
Des psychologues devraient, sans tarder, être attachés aux I.R.E.M., et être intéressés aux techniques pédagogiques.
- C. Les classes expérimentales de sixième, notamment, devraient être plus nombreuses, et continuer d'être contrôlées par les I.R.E.M.
- D. Les I.R.E.M. devraient accepter, même s'il semble que le profit soit mince, tout document portant sur une recherche, même sauvage.
- E. Prolongement d'ordre pédagogique de la deuxième année d'I.R.E.M. 1er cycle.

3 A.P.M.

- . Développement des commissions nationales à la recherche et à l'animation pédagogique, souhaité par les participants au groupe de travail.
- . La rubrique du Bulletin ne doit pas être consacrée seulement au contenu, mais aussi aux techniques pédagogiques.
- . Il devrait y avoir, à l'A.P.M., un noyau actif de PEGC s'occupant sérieusement des techniques pédagogiques, spécialement pour les classes de type II.
- . Les professeurs du second cycle auraient le plus grand intérêt à connaître les techniques pédagogiques dans le 1er cycle et à les étendre et à les adapter au second cycle — notamment dans l'enseignement technique.
- . Ce que je propose très concrètement résoudrait le problème posé par M. Sebah (page 233 — Bulletin 283) et qui a, très probablement, retenu l'attention de beaucoup de collègues.
- * Création d'une commission nationale A.P.M.E.P. : liens réciproques entre mathématique et autres disciplines dans le 1er cycle, en rapport avec celle à créer pour le second cycle.

I — *Que faire dans l'immédiat ?*

- . Tendre, dans les établissements, à ce que l'heure de concertation, pour les professeurs de quatrième et de troisième, porte sur le contenu mais aussi sur les techniques pédagogiques.
- . Un des objectifs majeurs du département de mathématique, même s'il n'existera encore que parce que les professeurs le créeront en fait, est de promouvoir les travaux libres dans toutes les sixièmes (I, II, III sans aucune distinction), les initiés animant toute l'équipe.
- . Les membres de l'A.P.M. doivent tendre à mettre un terme à l'isolement des professeurs, notamment dans les petits établissements, à développer les travaux de groupe des professeurs.
- . Gros effort à faire auprès des collègues des autres disciplines pour arriver à assurer des liaisons mathématiques — autres disciplines.
- . Bien faire comprendre aux collègues professeurs de mathématique (certifiés ou PEGC) que la rénovation pédagogique est encore beaucoup trop superficielle.

II — *Dans l'objectif d'une réforme de fond de l'organisation scolaire*

- . Intégrer le système généralisé des travaux libres dans cette réforme.
- . Heures de concertation des professeurs, incluses dans l'emploi du

temps, avec un programme de techniques pédagogiques et pas seulement de contenu.

- . Etude demandée, par des membres du groupe de travail, de l'adaptation de l'horaire de mathématique aux possibilités d'assimilation.
- . Inscrire les thèmes pluridisciplinaires dans l'ensemble des thèmes prévus dans le système *noyau-thèmes*.

III — *Dans l'objectif d'une réforme de fond de la formation initiale des maîtres*

- . Ne pas oublier la pratique réelle des techniques pédagogiques dans les diverses étapes de la formation initiale des maîtres, quels qu'ils soient.

Finalités de l'enseignement de la géométrie

Animateur : J. CARRIER

Cinq points ont été particulièrement étudiés :

1 *Qu'entend-on par géométrie ?*

- . L'école doit préparer l'enfant à vivre dans l'espace.
- . Il existe plusieurs espaces et plusieurs manières de les considérer. L'enfant rencontre deux sortes d'espaces : celui dans lequel il se déplace, et la feuille de papier sur laquelle il dessine.
- . La géométrie est l'étude scientifique et mathématique des espaces.
- . Il est nécessaire de distinguer quand on parle de géométrie deux points de vue :
 - a) celui de l'objet
 - b) celui de la méthode (synthétique ou analytique).

2 *Peut-on parler d'une nouvelle géométrie ?*

En fait il n'existe pas une seule géométrie. Ainsi par exemple les notions de médianes et de hauteurs d'un triangle appartiennent à des systèmes déductifs différents.

Faire de la "nouvelle géométrie", c'est comprendre à quel domaine déductif appartient une propriété pour savoir la démontrer (linéaire, affine, métrique, topologique...). On n'a pas le droit de démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes en utilisant "les cas d'égalité des triangles".

3 *L'enseignement de la géométrie*

- . Certains nient le fait que la géométrie utilise systématiquement une méthode de raisonnement déductif et regrettent que l'on abandonne le raisonnement inductif.
- . Il semble nécessaire de connaître les finalités dans le deuxième cycle pour définir celles du premier cycle.
- . Ce n'est pas l'accumulation des connaissances qui est importante, or elle a été spécialement développée en géométrie (géométrie du triangle, collections de théorèmes).
- . Il apparaît que l'on étudie plus les outils que l'espace.

4 *La géométrie et les "figures géométriques"*

- . La figure est-elle un objet du discours ou une des formes du discours ?
- . On a considéré jusqu'à présent les approximations uniquement en arithmétique, or elles sont très importantes en géométrie (topologie) ; d'autant que le premier contact de l'individu avec l'espace est surtout un contact topologique.
- . On reproche à ces figures d'être "rigides" et l'on regrette que la topologie, géométrie du "souple", ne soit pas introduite.
- . La figure géométrique dans notre enseignement actuel est une illustration particulière, elle n'est plus l'objet sur lequel on travaille.

5 *Les utilisateurs*

Ils sont de deux sortes :

- a) nos élèves dans leur profession
 - b) nos collègues.
- . Il est intéressant de voir les diverses pratiques professionnelles, car on y trouve toujours un substrat mathématique.
 - . D'autre part, il faut aussi aller voir ce dont les utilisateurs ont besoin, car ils ne se rendent pas toujours compte de ce que les mathématiques peuvent leur apporter.

L'erreur fondamentale de la France est dans sa psychologie. Elle a toujours cru qu'une chose dite était une chose faite, comme si la parole était l'action, comme si la rhétorique avait raison des penchants, des habitudes, du caractère, de l'être réel, comme si le verbiage remplaçait la volonté, la conscience, l'éducation. (Henri-Frédéric AMIEL - 23 mai 1873).

L'enseignement élémentaire, propédeutique du premier cycle

Animateur : LEBOULLEUX

Contrairement à mes prévisions, cette séance fut entièrement consacrée à une discussion générale sur ce sujet, et ne permit pas un travail par groupes sur l'étude de thèmes abordables au niveau élémentaire.

Les réflexions qui ont permis d'engager une discussion résultent de l'animation d'une expérience pédagogique conduite pendant cinq ans dans plusieurs groupes scolaires de la région parisienne. Elles ne peuvent être dissociées des idées générales reprises dans la Charte de Caen.

Pourquoi peut-on remettre à l'étude les finalités de l'enseignement élémentaire ?

- Scolarité modifiée (prolongation jusqu'à seize ans)
- Evolution de la société (besoins nouveaux dans un monde de plus en plus industrialisé)
- Environnement nouveau : milieux social, culturel, audio-visuel.
- Réflexions des maîtres sur le but de leur enseignement : apprentissage de techniques, de modes de raisonnement, intérêt et plaisir de l'enfant.

Pourquoi peut-on considérer l'enseignement élémentaire comme un lieu privilégié de propédeutique du premier cycle, c'est-à-dire "préparation, ouverture vers" ?

- Pas de contrainte d'orientation : c'est une liberté appréciable, et qui permet de remettre en cause la notion de programme.
- Au niveau élémentaire, les exemples vécus fournis par les enfants sont très riches et portent sur toutes les disciplines (avantage d'un seul maître). Nous retrouvons ici le vrai problème de la mathématisation de situations, qui est d'abstraire la notion de modèles à partir de problèmes d'origines diverses. N'est-ce pas préparer tant au niveau élèves que maîtres, à ce décloisonnement des matières qui implique presque une relation d'ordre ?
- Le milieu est neuf et "non déformé" : l'approche des méthodes de recherche semble plus facile.

Mais il est essentiel de bien comprendre les limites de ce choix : en dehors d'acquisitions naturelles de modèles à ce niveau (notion de nombre — numération — techniques opératoires), nous ne prétendons pas mathématiser la situation, c'est-à-dire abstraire jusqu'à la définition et au choix des axiomes. Nous voulons amener les élèves, à partir d'exemples de situations en apparence très diverses, à dégager un ou plusieurs caractères communs. Pour cela, il y a une progression dans

cette approche de la notion de modèle, par passage du "concret" au matériel structuré, puis dessins et schémas. Le stade symbolisation est rarement atteint. Nous ne prétendons nullement qu'une notion abordée au niveau élémentaire soit acquise. Mais d'une part, lors de l'étude de ce thème au premier cycle, l'élève aura à sa disposition des exemples variés qui justifieront l'utilité de la définition d'un modèle. D'autre part, un même sujet peut avantageusement être traité à des niveaux différents.

Cette dernière idée implique une conception nouvelle de la notion de programme, et un changement d'attitude du maître qui a parfois tendance à juger, à travers les connaissances de ses élèves, ses collègues. L'enseignement élémentaire ne se substitue nullement au premier cycle ; trop de jugements inexacts sont portés sur cette réforme, en se référant uniquement à des mots "ensembles, relations, opérateurs, groupes, etc ...". En revanche, il ne faut pas créer chez l'enfant un climat d'insatisfaction : celui-ci ressent le besoin, dans la résolution de problèmes, de chercher des schémas communs, et d'en laisser des traces. Il est facile d'imaginer des exemples très différents qui conduisent tous à l'introduction de la soustraction : l'élève comprend lorsqu'il schématise ces situations et découvre une représentation commune. Ceci nécessite une attitude pédagogique souple : les enfants travaillent soit par équipes, soit individuellement, et ceci à leur rythme.

En conclusion, nous approchons la notion de modèle au niveau des représentation. La symbolisation, sauf numérique, n'est pas introduite car non nécessaire ni ressentie. Toutefois, dans le choix de ces symboles, nous avons laissé une liberté aux enfants, suivant leurs besoins de communication (interprétation facile, précise).

Ils prennent l'habitude de symboliser ou noter non seulement les objets (ou éléments) mais surtout les actions :

Exemples : addition $4 + 3$ $+ (4,3)$ $(4,3) +$ $+ 4, 3$

Cette conception rejoint une idée importante exprimée dans la Charte de Caen, qu'il me semble essentiel de répandre à tous les niveaux de notre enseignement : dans chaque classe, nous proposerions un programme minimal indispensable, mais réduit, accompagné de l'étude de thèmes librement choisis (niveau des élèves - environnement). Mais il est indispensable pour cela qu'il y ait continuité dans les méthodes de travail et le contenu entre les différents cycles d'étude : ce n'est pas le cas actuellement, et je doit dire que cela nous a préoccupés dans notre section expérimentale. Je n'en citerai qu'un exemple : à l'école primaire, la notion d'opérateur est introduite, avec toute sa richesse (lois internes et externes) ; dans le premier cycle, cette idée disparaît ...

Une discussion animée s'établit sur le problème de la polyvalence des instituteurs, devant l'importance de la tâche des maîtres dans la perspective d'une telle réforme (formulation donnée parmi les membres de l'enseignement élémentaire présents à cette Commission).

Conclusion

Beaucoup de travail pour articuler les enseignements élémentaires et secondaires, tant dans les finalités que les méthodes de travail. Pour définir une polyvalence pour l'enseignement élémentaire, les I.R.E.M. et l'A.P.M.E.P. pourraient avoir un rôle moteur important : circulation de l'information concernant l'étude des thèmes, des situations, des expériences pédagogiques en cours. La brochure "La Mathématique à l'Ecole Élémentaire" est une première étape ...

La logique dans l'enseignement

Animateur : A. GOURET

Rapporteur : M. TENCE

Le groupe compte 38 personnes ; plus du tiers enseigne dans le premier cycle des lycées et collèges.

Un premier *recensement des questions à aborder* est effectué :

- . Est-il "rentable" pour l'enseignement des mathématiques de faire un cours de logique formelle ?
- . La logique, telle qu'elle est enseignée dans nos lycées et collèges, amène-t-elle à mieux raisonner ?
- . Importance en logique du langage et de l'âge des enfants.
- . Logique et formalisme.
- . Logique et intuition.

A ces questions, pour la plupart des participants, il n'y a pas de réponse *a priori* : *il faut expérimenter*.

Aussi Mademoiselle ADDA de l'U.E.R. de Paris VII nous fait-elle part de nombreux tests auxquels elle a soumis des étudiants littéraires d'origines diverses, des élèves de lycée, des techniciens de la Formation Permanente.

1er exemple :

Ecrire une phrase ayant même signification que :

"il est faux que tous les guichets soient ouverts tous les jours".

2ème exemple :

On donne le théorème : "Si le nombre n est un nombre de Machin, alors il existe un entier m tel que $n = m^2 + 1$."

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

- a) Si le nombre n est tel qu'il n'existe pas d'entier m tel que $n = m^2 + 1$, alors n n'est pas un nombre de Machin.
- b) Si n est tel que pour tout entier m on ait $n \neq m^2 + 1$, alors n n'est pas un nombre de Machin.
- c) Si n est tel qu'il existe un entier m tel que $n \neq m^2 + 1$, alors n n'est pas un nombre de Machin.

Pourcentage d'élèves ayant trouvé que a et b sont équivalents au théorème et que c ne s'en déduit pas :

chez des élèves de T.A. (sans formation particulière en logique)
21 %

chez des élèves de 2ème C (ayant donc eu un cours de logique)
21 %

Cela tendrait à prouver l'inefficacité de l'enseignement de la logique formelle suivi par ces élèves.

(Il est bien sûr difficile de faire la part du programme et celle de son enseignement.)

Dans le même ordre de préoccupations, on fait état d'expériences faites en Pologne et qui avaient été rapportées au Congrès de Cracovie de 1971. Elles montrent la grande difficulté du développement de l'aptitude au raisonnement par l'apprentissage de la logique formelle : le transfert n'est pas automatique.

Expérience tentée dans le premier cycle

L'utilisation d'un ordinateur dans certaines classes de sixième conduit des expérimentateurs présents dans le groupe à penser qu'il y a là une bonne initiation à la logique : les élèves arrivés en quatrième abordent de façon plus réfléchie les problèmes à résoudre (notamment dans les résolutions d'équations).

Expérience au niveau des classes de transition

On intéresse les élèves en leur posant des problèmes du genre "policier". La plupart des élèves n'arrivent pas à répondre correctement à ces tests mais, par contre, les résultats sont meilleurs quand il s'agit d'utiliser du matériel type "blocs logiques".

Il semble qu'il y a là deux problèmes différents : a) raisonner logiquement, b) s'exprimer en un certain type de langue française. Certains élèves peuvent raisonner logiquement mais ne comprennent pas toutes les subtilités de la langue française.

Des participants versent à ce dossier des exemples de difficultés :

- les phrases "Vous n'êtes pas sans savoir ..." et "Vous n'êtes pas sans ignorer ..." qui sont considérées comme synonymes.
- le mot "si" employé dans des contextes où peuvent se confondre condition nécessaire et condition suffisante : "Si tu manges ta soupe, tu auras du dessert".

Plus de quinze personnes étant intervenues, certains échanges ont dû être abrégés. Aussi le groupe a-t-il souhaité que certains rédigent pour le Bulletin une étude sur leurs expériences, notamment : informatique et logique, utilisation de machines (distributeur de tickets de la R-E-R) et logique.

Enfin de nombreux participants ont proposé à notre Collègue Josette Adda de faire passer un de ses tests à leurs élèves.

Nous souhaitons que de nombreux collègues, membres ou non du groupe, puissent participer à ce travail dès la parution du Bulletin.

Test L & P (J. Adda)

Exercice "L" :

Trouvez les valeurs de vérité de a, b, et c sachant que, simultanément :

$a \Rightarrow b = v$	$\frac{v}{v}$	$\frac{v}{v}$
$a \Rightarrow c = f$	$\frac{v}{f}$	$\frac{v}{v}$

Exercice "P" (policier)

On sait de source sûre que si A est coupable, alors B l'est aussi.

Un témoin affirme que si A est coupable, alors C l'est aussi.

Or on apprend de source sûre que le témoin a menti.

Est-ce que

A est coupable ? oui non

B est coupable ? oui non

C est coupable ? oui non

Procédure :

- . Distribuer l'exercice L à la moitié de la classe.
- . Distribuer l'exercice P à l'autre moitié.
- . Ramasser les résultats.
- . Distribuer l'exercice P à ceux qui ont traité L.
- . Distribuer l'exercice L à ceux qui ont traité P.
- . Ramasser les résultats.
- . Noter les résultats sur une feuille analogue au modèle.
- . Envoyer à Mademoiselle ADDA — U.E.R. de Mathématiques
(Tour 45-55 - 5ème étage)
2 Place Jussieu Paris 5ème

La synthèse des résultats paraîtra dans le Bulletin.

NOM ET ADRESSE DU PROFESSEUR :

VILLE :ETABLISSEMENT :

CLASSE :

EXERCICE "L" (formel) :

Trouvez les valeurs de vérité de a, b, et c sachant que, simultanément :

$$a \Rightarrow b = v$$

$$a \Rightarrow c = f$$

EXERCICE "P" (policier) :

On sait de source sûre que si A est coupable, alors B l'est aussi. Un témoin affirme que si A est coupable, alors C l'est aussi, Or on apprend de source sûre que le témoin a menti.

Est-ce que :

A est coupable oui non

B est coupable oui non

C est coupable oui non

RESULTATS :

Elèves ayant traité L avant P

Elèves ayant traité P avant L

	L ₁ exact	L ₁ faux
P ₂ exact		
P ₂ faux		

	L ₂ exact	L ₂ faux
P ₁ exact		
P ₁ faux		

Enseignement des mathématiques à des étudiants littéraires

Animateur : C. PEROL

Le groupe a fonctionné normalement ; 24 personnes étaient inscrites, 25 étaient présentes. Le tour de table permet à chacun de se présenter et d'indiquer les difficultés qu'il a rencontrées.

Catégories représentées :

- 10 personnes ayant une expérience de la première A et B des lycées (maths facultatives)
- 2 personnes ayant des sections littéraires mais sans cours facultatif
- 6 personnes enseignant dans les premiers cycles de Faculté aux étudiants littéraires
- 1 étudiant en histoire
- 1 professeur de géographie
- 1 professeur de mathématiques de classes scientifiques,
etc ...

Il serait fastidieux pour les non-participants de reprendre, même en les résumant, les interventions de chacun. Notons seulement que la plupart des présents ont souligné les *blocages* dont leurs élèves ou leurs étudiants sont victimes. Leur souci est de trouver des *motivations* susceptibles de les amener au raisonnement mathématique.

Plusieurs ont des idées dont ils peuvent faire bénéficier leurs collègues.

1. De Mademoiselle LOPATA : le cours du CNTE en 1971-72 pour les classes de première A et première B.

Il contient une foule d'idées pour "habiller" les notions les plus diverses (tout le programme de la classe) en s'appuyant sur les activités humaines les plus variées. Il est impossible de le résumer ou d'en extraire des exemples ; tout est à voir.

2. De Monsieur LE CALVEZ : une fiche rédigée par des élèves-maîtresses de l'E.N.F. de Quimper pour la classe de CM₂, inspirée par la grammaire structurale du français de J. Dubois. Il consiste à faire classer les mots d'un texte dans des diagrammes de Venn ou de Carroll en faisant intervenir leur comportement grammatical, par exemple variant ou invariant ou genre. Ces fiches peuvent donner des idées pour motiver des élèves littéraires.

3. De Mademoiselle ADDA : les documents distribués aux étudiants à Paris VII pour l'U.V. N001-101.

4. Un document de l'*I.R.E.M. de Rennes*, rédigé par R. GRAS (60 pages) contenant des applications à des situations diverses.

Sa bibliographie vous sera peut-être utile :

— “Algèbre moderne et activités humaines” de KEMENY, SNELL et THOMPSON — Librairie Dunod

— “Les mathématiques modernes dans la pratique des affaires” de KEMENY, SNELL et THOMPSON — Librairie Dunod.

— “Eléments de mathématiques modernes” de RICHARDSON — Collection Sigma — Librairie Dunod

— “Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle” de KAUFMANN Tomes 1 et 2 — Librairie Dunod

— “Recyclons-nous en mathématiques : de l'exemple au problème” de R. GRAS et J. P. GABORIEAU — Editions F. Nathan

5. Dans LACAN “Ecrits” — Séminaire sur la lettre volée — (de la page 47 à la page 57), vous pouvez trouver une situation vous permettant d'illustrer les notions de diagramme sagittal d'une relation, de composée de deux relations et de relation d'équivalence. (Le travail de traduction est important, car le parler de LACAN n'est pas le nôtre).

Limite et continuité

Animateur : M. DEHAME

Rapporteurs : M^{mes} COJAN et BINET

Le groupe de travail a commencé par se poser le problème : “Faut-il présenter la limite avant ou après la continuité ?”.

Les avis sont partagés : pour certains, la continuité vient après la notion de limite comme cela a toujours été fait dans l'enseignement traditionnel. Pour d'autres, la notion de continuité est plus naturelle, d'une motivation plus aisée que celle de limite, et doit être enseignée la première ; plusieurs des professeurs en présence ont expérimenté cette dernière présentation dans leur classe, et ne se sont pas heurtés à des difficultés pédagogiques plus sérieuses que dans la présentation traditionnelle : la définition de la limite finie en un point de \mathbb{R} découle immédiatement de celle de la continuité, et se transpose aisément (par des changements de sens dans les inégalités) au cas des limites infinies ; mais, pour donner plus d'unité à cet exposé, il faudrait introduire les voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, c'est-à-dire (pourquoi ne pas prononcer le mot ?) la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

De toute façon, les difficultés de ce chapitre ne semblent pas dues aux notions elles-mêmes, que les élèves finissent toujours par assimiler

quel que soit le mode de présentation adopté, mais au manque de techniques des élèves dans les raisonnements d'analyse : la définition de la continuité est comprise, mais les élèves sont incapables de démontrer que

$$x \mapsto \frac{1}{2-x}$$

est continue pour $x = 1$. Le travail serait grandement facilité si les élèves possédaient avant d'aborder l'analyse :

- l'usage des notions élémentaires de logique (quantificateurs, implication, négation),
- une bonne connaissance de \mathbb{R} , en particulier les notions de valeur absolue, de distance, et l'équivalence entre $|x - x_0| < \alpha$ et $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$,
- une panoplie d'exemples de fonctions continues ou non (fonctions affines par intervalles),
- une bonne technique des majorations et des raisonnements par conditions suffisantes. On peut les y préparer en seconde (et déjà en troisième) en leur proposant des exercices des types suivants :
 - “trouver un intervalle de centre donné inclus dans un intervalle donné”
 - “trouver l'image ou l'image réciproque d'un intervalle donné par une application donnée”
 - “trouver un intervalle I de centre x_0 tel que $f(I)$ soit inclus dans un intervalle donné”, etc ...

Les résolutions classiques d'inéquations ne sont pas suffisantes pour préparer les élèves aux exercices sur la continuité : pour résoudre les inéquations classiques, ils disposent d'un certain nombre de recettes qui leur permettent de passer d'une inégalité à une inégalité équivalente ; alors qu'en analyse, on se donne le plus souvent une inégalité du type $|y - y_0| < \varepsilon$ et on cherche une inégalité du type $|x - x_0| < \alpha$ qui l'implique, mais qui ne lui est pas équivalente. C'est un problème plus difficile (qui demande plus d'initiative), mais qui aurait intérêt à être abordé avant l'introduction des notions de limite et de continuité, et en tout cas pas en même temps, car on ne peut pas exiger des élèves qu'ils surmontent simultanément deux types de difficultés.

Monsieur Revuz s'est joint au groupe de travail et a fait l'exposé de son expérience dans les établissements du second degré de l'Académie de Paris. Pour ce compte-rendu, on pourra se reporter à son article, dans le Bulletin n° 283, page 287.

Activités mathématiques et raisonnement **Compte-rendu de la séance du vendredi matin**

Animateurs : C. BLOCH, A. SCHERPEREEL et R. DUVAL

Quatre questions ont été au centre des échanges :

- la référence au "réel" dans l'enseignement des mathématiques ;
- la présentation possible des mathématiques comme un jeu ;
- le rôle de l'analogie dans les différentes activités mathématiques ;
- l'influence éventuelle du raisonnement mathématique sur le comportement logique.

1^o La référence au réel est souvent faite dans la réflexion pédagogique sur l'enseignement des mathématiques. Il s'agirait de mathématiser une situation physique ou autre pour exploiter ensuite le modèle mathématique ainsi dégagé. Les activités mathématiques auraient pour but de favoriser le passage du réel au modèle mathématique. Une telle conception soulève plusieurs problèmes. Le "réel" que l'adulte choisit de présenter à l'enfant n'est-il pas déjà une abstraction pour lui ?

Car on n'étudie pas en fait le réel mais on y effectue des prélèvements selon des critères qui restent ignorés des enfants. Même après de nombreuses manipulations effectuées à l'aide d'un matériel (par exemples de blocs logiques ou d'un diagramme ou d'un dessin à la règle ...), l'enfant peut rester déconcerté par l'étude abstraite de notions que les exercices auraient dû lui permettre d'appréhender.

Il y a d'autre part une ambiguïté qui demeure sur ce qu'est le réel : est-il extrinsèque aux mathématiques, lesquelles seraient un outil pour l'étudier, ou peut-il être constitué par des notions mathématiques déjà bien connues et assimilées (par exemple les nombres entiers dans le premier cycle). Pour certains il s'agit de chercher dans le réel plusieurs exemples d'une structure mathématique (par exemple celle d'espace vectoriel) afin d'en motiver l'étude ; il ne s'agirait que d'une illustration ne servant en rien la compréhension et l'assimilation de la structure.

2^o Il y a une tendance à concevoir et développer les activités mathématiques comme un jeu. Cette tendance a une double origine. Pour les uns, les mathématiques sont un jeu puisqu'il s'agit d'appliquer certaines règles pour déduire le plus de résultats possibles d'un certain point de départ. Pour les autres, le jeu, important dans la vie de l'enfant, semble au moins jusqu'à un certain âge la voie la plus adaptée à tout apprentissage et à toute découverte. Une telle conception suscite cependant des réserves : le jeu, qui n'est jamais tout-à-fait un amusement pour l'enfant, n'apparaît pas la motivation la plus importante. Étant dans une situation de dépendance, l'enfant recherche l'expérience

de sa propre puissance. Lorsqu'il découvre l'économie de pensée que les moyens mathématiques lui permettent de réaliser, l'enfant est beaucoup plus motivé que par l'aspect ludique.

Les deux dernières questions bien que plusieurs fois soulevées et considérées comme importantes n'ont pas été traitées.

30 On a parfois beaucoup de difficultés à reconnaître la présence d'un modèle connu dans une situation nouvelle. Cela représente un obstacle pour le raisonnement lorsqu'il s'agit d'utiliser un outil mathématique.

Le problème posé est celui du déclenchement du phénomène d'analogie : qui semble se faire si on a un sens suffisant de l'abstraction ou si on est particulièrement familiarisé à une certaine notion.

40 L'initiation au raisonnement mathématique développe-t-elle l'aptitude à raisonner ou à réfléchir dans la vie courante ?

Quels points communs existe-t-il entre le type de raisonnement pratiqué en mathématique et la conception que l'on se fait du raisonnement en dehors des mathématiques ?

Il semble qu'aucune technique particulière ne développe le sens du raisonnement mais plutôt une démarche pédagogique globale. Il faut d'abord proposer à l'enfant une tâche qui l'obligera à organiser lui-même son travail et les données qu'on lui fournit. Une fois la tâche réalisée par lui, sans intervention extérieure, il faut l'obliger à prendre conscience de ce qu'il a fait en lui demandant de le communiquer à un autre enfant et donc lui faire extraire l'information intéressante.

Ces questions ont été débattues dans un groupe où un tour de table préalable avait permis de constater que le problème des activités mathématiques et du raisonnement était à envisager pour les uns globalement, et pour les autres, en fonction de l'âge de l'enfant et du niveau de ses connaissances mathématiques.

**LA MATHÉMATIQUE
À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE
PAR CEUX QUI L'ENSEIGNENT**

Un livre qui doit figurer en bonne place
dans votre bibliothèque ...

Enseignement de masse, enseignement d'élite ?

Animateur : M. de COINTET

Il est bien difficile de rendre compte de trois heures d'un débat passionnant entre les quarante collègues qui participèrent à ce groupe de travail. On ne rendra compte ici que des idées échangées : peut-être paraîtront-elles révolutionnaires à certains, banales à d'autres, et à beaucoup, mal formulées et posant plus de questions qu'elles n'en résolvent. Le plus important, à mon sens, est :

- qu'elles soient nées, chez ceux qui les ont émises, de leur expérience, de la réalité de leurs classes, de leur métier d'enseignant et de leur vie de citoyen;
- qu'elles se soient exprimées au cours d'une réflexion commune d'enseignants "de la Maternelle à l'Université" qui n'ont d'autre titre que celui-ci.

Preuve que les finalités de l'Enseignement sont bien au centre des préoccupations de beaucoup d'entre nous.

Ce débat a oscillé entre deux pôles d'attraction :

- a) Ce que chacun peut souhaiter, "ce qui devrait être", avec sa part d'idéalisme voire d'utopisme (conscient !) conduisant à la question radicale : "Un enseignement de masse est-il compatible avec le progrès d'une société industrielle avancée de type capitaliste ?".
- b) Ce que l'on peut faire pratiquement pour que notre enseignement ne soit pas, en fait, réservé à une "élite".

Il a été reconnu que l'action pédagogique ne peut tout résoudre : le problème posé est d'ordre politique.

A défaut de définir "l'Enseignement de masse", pouvait-on s'entendre sur ses objectifs ? Deux objectifs principaux furent proposés :

- a) permettre à la grande majorité des élèves d'achever leurs études dans le temps prévu (alors qu'un élève sur quatre achève ses années primaires sans avoir redoublé au moins une fois : exemple parmi d'autres ; rapport O.C.D.E. juin 70).
- b) compenser au moins en partie ce qu'on appelle "les handicaps socio-culturels".

Ces objectifs furent contestés : le premier parce que, énoncé ainsi, il ne tient pas compte du rythme différent de progression des élèves, le second parce que trop vague : handicap par rapport à quoi ? Par rapport à la forme actuellement transmise par l'enseignement au vu de laquelle d'autres seraient inadaptées ?

Cela dit, ils conduisirent à s'interroger sur :

1. *Les raisons des handicaps socio-culturels des élèves à l'apprentissage mathématique :*

- conditions matérielles de vie difficiles (logement, aide ménagère aux parents, ...)
- problèmes personnels
- un milieu familial qui n'est souvent d'aucune aide (l'Ecole lui est trop étrangère)
- une pédagogie peu adaptée (problèmes partant peu de la réalité, mais posés en termes de jeux intellectuels)
- le contenu des programmes (ceux de quatrième favorisant ceux qui dominent leur "langue", et ont le plus de facilité à l'abstraction).

2. *Les finalités d'un enseignement mathématique*

- apprendre à raisonner (les mathématiques n'en ont pas l'exclusivité)
- apprendre à lire, à observer, à organiser ses informations
- apprendre à critiquer une argumentation, à ne pas accepter les idées toutes faites.

Tout cela nécessite beaucoup de temps et des programmes non encyclopédiques pour que l'enseignement mathématique ne soit pas apprentissage d'une conformité à des modèles de solutions de problèmes-types dont les énoncés ont une interprétation-type (cf. problèmes d'examens).

- rendre heureux (eh oui, pourquoi pas ?)
- donner des moyens de s'insérer dans la société, de s'y situer (capacité d'analyse) et d'y agir.

L'Enseignement actuel des mathématiques donne-t-il vraiment un outil d'analyse et d'action à nos élèves ? N'est-il pas surtout instrument de sélection pour la constitution d'une élite capable de penser et d'agir pour tous ? Et que dire du mythe de la Science ("L'ordinateur a dit que ...") ?

3. *Les obstacles que nous dressons à un enseignement mathématique destiné à tous :*

- le contenu encyclopédique des programmes
- une pédagogie de jugement, classement, sélection, parfois (ou souvent ?) précoce et définitive. (Un corps d'enseignants hiérarchisé dans des conditions analogues : les deux font partie d'une même perspective). Sont liés à cela les problèmes de notation et d'examens.

- mauvaise attitude pédagogique : la nouveauté du contenu conduit, faute de formation permanente réelle et liée à une recherche pédagogique, à une attitude plus dogmatique, négation du but recherché.

4. Ce que l'on peut faire

- multiplier les recherches pédagogiques (groupes de niveau, rythmes différenciés par des heures de soutien, second cycle en quatre ans, ...) : les faire connaître, les confronter
- promouvoir une expérimentation scientifique communicable (rôle des I.R.E.M., entre autres) : on en reste trop souvent au stade des opinions personnelles
- travailler avec les collègues d'autres disciplines (équipes d'enseignants d'une même classe) : l'Enseignement forme un tout
- agir par l'A.P.M.E.P. sur le contenu des programmes, pour la formation des maîtres (voir la Charte de Caen)

Il est en outre souligné

- . l'importance primordiale de l'Ecole Maternelle pour réduire les différences socio-culturelles
- . l'importance de l'attitude pédagogique du maître (problèmes des relations maîtres-élèves, de la motivation de l'apprentissage ...) :
Notre action peut être, là, déterminante.

S'en tenir là, transformer les questions posées en affirmations, remplacer les blancs et les points de suspension par des "il n'y a qu'à", ou se réfugier dans les mots "en attendant que ça change" anéantirait ce premier travail qui n'était qu'un des moments des Journées de Caen. Tout ce qui a été dit reste à préciser, approfondir, critiquer, confronter de nouveau avec la réalité (peut-être avec d'autres personnes que des enseignants, non ?) et pour ce qui est faisable, à mettre en oeuvre.

Bonne Année ! ! ...

N.B. — Ceux des participants à ce groupe de travail qui désireraient le compte-rendu plus complet rédigé par Madame (et Mademoiselle) Lefèvre, peuvent se le procurer en adressant une enveloppe timbrée à M. de Cointet, 62, rue Dieweg, 67 SELESTAT.

Notre collègue E. Ehrhart nous signale une erreur : le dessinateur a oublié de faire figurer la TUNISIE sur la carte, page 613 de notre dernier Bulletin ...

La vie d'un club d'informatique

Animateurs : M. CHOUCHAN (Brionne) et J.-C. HERZ (Paris)

Michèle Chouchan a animé en 1970-71, au C.E.S. de Brionne (Eure), un club de mathématiques créé à la demande de ses élèves de sixième. Elle a décidé avec Jean-Claude Herz, à l'occasion des Journées de Toulouse, d'en faire un club d'informatique en 1971-72. Elle s'est initiée aux ordinateurs en juillet 71 par un stage à l'IBM, au cours duquel elle a créé avec Jean-Claude Herz le langage BRIONNAC.

BRIONNAC est le langage d'une machine fictive ayant une mémoire de 10.000 positions alphanumériques adressables individuellement et par zones. Chaque instruction contient un code opération et zéro à quatre opérandes et peut être précédée par une étiquette. Chaque opérande est, selon le cas, une étiquette, une adresse ou zone, ou une donnée explicite. Une adresse ou zone peut être définie au moyen du contenu d'une ou deux autres zones (adressage indirect).

Les opérations sont la lecture d'une carte, l'impression, le saut de ligne ou de page, la répétition en mémoire, les opérations arithmétiques dans N et dans Z , les opérations booléennes, les comparaisons dans N , dans Z et dans l'ordre alphabétique, le saut incondtionnel et l'arrêt.

Jean-Claude Herz a mis au point en septembre un compilateur permettant d'utiliser BRIONNAC sur tout ordinateur acceptant le langage PL/1.

A la rentrée, une dizaine d'élèves de chacune des deux classes de cinquième ont été volontaires pour le club d'informatique, qui a fonctionné d'abord séparément pour chaque classe (40 minutes par semaine). A partir de janvier, les quelque vingt élèves ont eu une séance commune par semaine. En mars, ils ont passé un jeudi à l'IBM à Paris. Un certain nombre de séances n'ayant pu avoir lieu pour différentes raisons, les élèves en auront eu en tout une quinzaine seulement dans l'année, dont cinq ou six en présence de Jean-Claude Herz.

Les activités ont commencé par une initiation au codage et à la perforation des cartes (avec du matériel Perfostyl). Les éléments du langage ont été introduits partiellement et progressivement : d'abord les opérations d'entrée et sortie, en précisant la représentation des zones et des données explicites (application : conjugaison d'un verbe régulier de longueur fixée) ; puis comparaison alphabétique et saut (application : verbe commençant par une voyelle ou une consonne ; enchaînement des entrées par retour à l'instruction initiale) ; puis adressage indirect (application : conjugaison d'un verbe de longueur quelconque) ; puis addition et soustraction dans N (en relation avec l'utilisation de l'adres-

sage indirect) ; puis addition et soustraction dans Z (application : calcul de $a + b - c$) ; puis répétition (application : fabrication de dessins) ; puis comparaison dans N (application : retournement d'un mot).

L'éloignement de l'ordinateur utilisé (à Paris) a fait que les résultats d'un programme composé à une séance du club étaient reçus au mieux à la séance suivante. Ce n'est qu'au cours de leur visite à Paris que les élèves ont pu écrire et perforer leurs programmes et en voir immédiatement l'exécution. Cette visite a comporté en outre des démonstrations sur terminal et sur écran cathodique et une discussion entre les élèves et une dizaine de professeurs en stage d'informatique à l'E.N.S. de Saint-Cloud.

L'enthousiasme des élèves pour le Club a été assez constant ; le voyage à Paris l'a, bien entendu, renforcé. Le manque de temps a conduit à ne pas se servir du matériel Perfostyl, sauf au début de l'année où cela a paru nécessaire pour concrétiser les premiers concepts. Les élèves n'ont pratiquement pas travaillé en dehors des séances. Une exception à signaler : une élève a écrit un programme de 800 instructions pour reproduire un dessin distribué à l'IBM.

Un certain nombre d'idées *a priori* étaient à la base de cette expérience :

- Nécessité de l'apprentissage préalable d'un langage machine pour bien comprendre le fonctionnement d'un ordinateur et la signification d'un langage évolué.
- Choix par les élèves eux-mêmes des notations et des opérations à inclure dans le langage en vue de traiter différents problèmes. Naturellement, on a dû, pour ne pas perdre de temps, leur imposer un certain cadre qui est celui du langage créé en juillet 71. Ils en ont modifié plusieurs éléments : représentation des zones, codification des opérations, séparation des opérandes. Le remaniement correspondant du compilateur n'a pas présenté de difficultés.
- Liaison avec l'enseignement de mathématique : correspondance entre les notations ; identité entre programme et fonction. En fait, la liaison a été plutôt d'un autre ordre : l'informatique est tout autant (sinon plus) que la mathématique une école de rigueur.

A posteriori, on a constaté que le club avait permis aux élèves de rectifier leurs idées sur les ordinateurs, dont la presse écrite ou orale donne une représentation très fautive. Cependant le mode de travail (programmation par correspondance) et les exercices choisis n'ont pas permis de montrer la réelle puissance des ordinateurs ; tout au plus les élèves ont-ils pu réaliser qu'un programme une fois écrit pouvait servir un grand nombre de fois avec des données chaque fois différentes. Il est certain d'autre part que les élèves sont désormais sensibilisés aux infor-

mations extérieures sur l'informatique (ils en parlent au Club), ce qui leur ouvre une fenêtre sur la vie technique. Enfin, les activités du club ont attiré l'attention de certains professeurs et d'autres élèves, surtout après le compte rendu fait à leurs camarades par les élèves de leur voyage à Paris.

Relations entre mathématiques et physique

Animateur : F. COLMEZ

Représentant de l'Union des physiciens : TOUREN

Colmez donne d'abord un aperçu des projets de programmes de physique mis au point par la Commission Lagarrigue pour la classe de seconde : Electronique et Electrocinétique, Mécanique avec, comme notion de base, la quantité de mouvement et non plus la force.

Il convient de se féliciter que l'accord entre l'enseignement des Mathématiques et celui de la Physique soit ainsi mieux assuré qu'avec les anciens programmes.

Organisation générale de la classe de seconde : un tronc commun de 21 heures hebdomadaires (dont 4 heures de mathématiques et 4 heures de sciences physiques) et de nombreuses options. Expérimentation l'an prochain aux lycées de Montgeron et Saint-Quentin.

L'accord entre les associations de spécialistes, réalisé pour la seconde, n'a pu se faire pour les premières et les terminales.

Mais le problème essentiel demeure le premier cycle. Colmez expose les idées de la Commission Lagarrigue pour l'introduction de physique et chimie avec la technologie à partir de modules (appareil photographique, astronomie, gas carbonique, mécanique). Il faut surtout éviter que certaines classes (sixième III par exemple) ne soient des voies de garage.

Certains collègues mathématiciens déplorent que les problèmes de physique des concours et du baccalauréat ne soient en fait que des problèmes de mathématiques. Peut-être faudrait-il introduire, en plus de l'épreuve écrite, une épreuve de travaux pratiques. Mais cela posera des problèmes de locaux et de matériel.

A propos des émissions de la Radio-Télévision Scolaire, Les Mathématiques au service de ... la Physique, une discussion s'engage au sujet du vocabulaire (vecteurs et vecteurs des physiciens) et des notations (i pour les mathématiciens devient j pour les physiciens, \bar{z} notation complexe en physique). Il faudrait que A.P.M.E.P. et U.D.P. agissent pour que les commentaires qui accompagneront les programmés de Sciences Physiques imposent les mêmes notations qu'en Mathématiques.

Pour faciliter la tâche des physiciens, Colmez suggère d'introduire en seconde les propriétés des fonctions trigonométriques à partir des tables numériques. Mais aura-t-on le temps ?

En conclusion, il faudrait envisager :

- 10) Un "recyclage" commun des mathématiciens (qui ont oublié la physique) et des physiciens (qui ont des difficultés avec les mathématiques "modernes").
- 20) Une harmonisation des notations par une commission mixte Mathématiques-Physique.
- 30) L'introduction, dans les livres de mathématiques, d'exercices empruntés à la physique.