6

DOCUMENT

les données d'un problème : LE PROGRAMME DE LA CLASSE DE QUATRIEME

NON, l'A.P.M.E.P. n'est pas responsable du programme actuel de quatrième !

Un nouveau programme de quatrième est en application depuis septembre 1971. Trop de collègues croient, de bonne foi, que ce programme émane de l'A.P.M.E.P. En fait, il n'en est rien ! Si l'A.P.M.E.P. préconise, depuis plus de quinze ans, une réforme fondamentale de l'enseignement mathématique, par contre elle n'a jamais souhaité un programme aussi rigide et aussi long en classe de quatrième.

Pour mieux comprendre la situation réelle et éclairer le débat, nous présentons ici les différents textes publiés dans notre Bulletin depuis 1969.

Orientations des programmes secondaires
(Commission A.P.M.E.P. du 11 novembre 1969, Bulletin 271, page 679, Novembre-Décembre 1969).

A l'initiative du Bureau de l'A.P.M. une réunion a rassemblé, le 11 novembre, à Paris, soixante collègues animés par le désir de confronter divers points de vue concernant l'orientation que prennent actuellement les programmes de Mathématiques.

Cette initiative était due au fait qu'en octobre 69 :

1° le programme de Première, applicable en septembre 1970, n'était pas encore publié ;

2° les programmes de Quatrième et Troisième proposés par la Commission Lichnérowicz et publiés dans le Bulletin n° 263-264 avaient été remis en question par certains expérimentateurs lors des stages de l'Institut pédagogique national de mai et septembre 1969. Cette contestation avait provoqué l'élaboration en tout hâte d'un projet expérimental pour la classe de Quatrième. Mais ce projet, dit "projet Revuz", applicable à partir de septembre 1969 dans les classes expéri — mentales de l'I.P.N. et généralisable en septembre 1971, ne donne guère plus de satisfaction aux contestataires que le projet Lichnérowicz. Il permit d'emblée d'élargir l'objet des débats.

La matinée fut en effet consacrée à des échanges concernant la finalité de l'enseignement des mathématiques dans le premier et le second cycles, finalité indissociable des programmes, méthodes et moyens utilisables dans la situation actuelle.

Cette discussion devait amener les participants à se séparer en trois groupes de travail. Le "projet Revuz", étant considéré par certains comme le seul qui, tout en conciliant diverses exigences, puisse être raisonnablement appliqué en 1971 et ce jusqu'en 1975, a donné lieu à la constitution d'un groupe chargé de discuter du programme de Troisième engagé dans la même voie et de celui de Première. Un second groupe s'est occupé des horaires et de l'intégration de divers moyens et méthodes d'enseignement. Enfin un troisième groupe a essayé de préciser les objectifs du projet de programme de Quatrième et Troisième présenté par les expérimentateurs en marge des projets Lichnérowicz et Revuz.

A l'issue des travaux de groupe, une discussion finale devait à nouveau permettre de confronter les points de vue, particulièrement en ce qui concerne le projet de programme de Troisième élaboré par le premier groupe dans le même esprit que le projet Revuz de Quatrième.

Cette journée, conçue pour brasser des idées, provoquer des questions et soulever le voile qui dissimule des problèmes réels, semble avoir atteint son but : entreprendre une campagne de sensibilisation à la question suivante :

Les programmes, méthodes et moyens peuvent-ils être conçus indépendamment des deux facteurs essentiels : 1° les finalités de l'enseignement aux divers niveaux, 2° l'expérience réelle et vécue de ceux qui ont les enfants sous leur propre responsabilité ?

J. Colomb et M. Dumont.

Dans le Bulletin 272 de Janvier-Février 1970, Vissio, alors Secrétaire Général, écrivait page 19 :

Devant la situation confuse créée par l'existence simultanée de trois programmes ou projets : programme "classique" actuellement enseigné, programme enseigné en classe de Quatrième "expérimentale", projet de la commission Lichnérowicz, la sous-commission de l'A.P.M. invita tous les collègues intéressés à une journée d'étude (11 novembre 1969). Quelle est la situation actuelle ? Deux certitudes : la commission Lichnérowicz va, dans le semestre à venir, reprendre entièrement la question ; le bureau de l'A.P.M. demande que cette commission "s'élargisse" en faisant appel à des collègues actuellement "expérimentateurs" en Quatrième.

Comme toujours, tous les collègues ayant des suggestions précises à faire sont invités à prendre contact avec Dumont, Vice-Président chargé des questions concernant le premier cycle du Second degré.

Pour rappeler le rôle délicat des membres de l'A.P.M.E.P. au sein de la Commission Ministérielle, nous trouvons dans le Bulletin 274, page 264, le texte suivant (Assemblée Générale du 10 mai 1970) :

— Le problème du mandat donné par le Comité aux membres de l'A.P.M. participant à la Commission Lichnérowicz est soulevé. Walusinski rappelle que, du point de vue du ministère, chaque membre de la commission y est à titre personnel. Cette commission comprend aussi des membres extérieurs à notre association. L'A.P.M. ne peut donc pas "mandater" ses adhérents.

Puis, quelques jours plus tard, le Bureau (du 20 juin 1970) se préoccupe du problème (Bulletin 264, page 269) :

Programmes de Quatrième

Colomb transmet une lettre de Duvert concernant l'expérimentation en Quatrième et les programmes de cette classe suite au stage d'Orléans des expérimentateurs et à la dernière réunion de la commission ministérielle dite "Lichnérowicz". Le Bureau décide de faire publier, dans le prochain Bulletin, les différents projets expérimentés et proposés ; Colomb et Belouze sont chargés de rassembler les documents.

Belouze publie alors dans le Bulletin 275-276 (octobre 1970, pages 439 et 430) le texte suivant :

Le 6 octobre 1970 le programme de Quatrième applicable à la rentrée 1971 n'est toujours pas paru. Il est peu probable qu'il le soit avant décembre. Les collègues s'inquiètent non seulement de la date de parution mais aussi du contenu de ce programme. Le Bureau de l'A.P.M. a donc jugé nécessaire de diffuser les informations en sa possession, celles qu'ont pu lui transmettre les expérimentateurs de l'an dernier ou celles fournies par les collègues membres de la Commission Lichnérowicz.

Durant l'année scolaire 1969-1970, les expérimentateurs de Quatrième ont travaillé dans différentes directions, notamment en ce qui concerne la géométrie :

1° une méthode fondée sur les quadrillages conduisant aux espaces vectoriels (par exemple Lyon) ;

2° une axiomatique analogue à celle de Artin (par exemple Toulon, Poitiers, Bordeaux-Montaigne) ;

3° une présentation voisine de celles des premiers projets de programme de la commission Lichnérowicz (par exemple Bordeaux-Talence).

Par contre la commission Lichnérowicz a travaillé essentiellement dans une seule direction, modifiant peu à peu un projet de départ. D'autres projets qui lui avaient été proposés n'ont pas été pris en considération. Ainsi un projet de géométrie de Dehame et un projet de Clopeau qui essayait de faire le lien avec le nouveau programme de technologie.

Inquiets du contenu des projets de la Commission, les expérimentateurs, réunis en stage à Orléans au mois de juin 1970, ont demandé que le nouveau programme n'impose pas une axiomatique, notamment en géométrie, mais propose des objectifs simples en indiquant diverses voies possibles pour les atteindre.

De son côté un groupe d'expérimentateurs de l'Institut Pédagogique National proposait un programme ou plutôt une liste de thèmes d'étude classés en 3 niveaux selon leurs objectifs, ne distinguant pas classe de Quatrième et de Troisième.

Bien que l'un et l'autre de ces derniers projets reflètent ce que seront les programmes de mathématiques dans un futur plus ou moins lointain, bien que l'un et l'autre soient suffisamment précis pour être mis en chantier dès maintenant, aucun ne fut retenu par la commission Lichnérowicz. Elle modifia de nouveau son projet, notamment en supprimant l'arithmétique dans Z, que semblaient pourtant préparer les programmes de Sixième et Cinquième.

De nouvelles modifications ont été apportées pendant les vacances scolaires, la géométrie a reçu une nouvelle rédaction, mais l'esprit n'en est pas changé : une axiomatique est imposée.

Pour être définitif, le programme doit être adopté par le conseil supérieur de l'enseignement. Les collègues devront donc encore attendre ! ...

Nous pensons que tous ces documents permettront aux collègues de se faire une idée précise de la responsabilité de chacun dans l'élaboration de ce programme. Pour sa part, le Bureau de l'A.P.M. a jugé indispensable de bien les situer.

Voici par ailleurs les projets proposés par différents expérimentateurs et publiés dans le même Bulletin :

Annexe 1

Projet de programme de géométrie pour la Quatrième, proposé par E. Dehame (Poitiers)

Géométrie affine plane.

1° Approche intuitive

Dessins géométriques exécutés uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un appareil servant à tracer des parallèles.

Introduction du langage de la géométrie affine :

— droites sécantes, droites parallèles, directions, bipoints, bipoints équipollents, vecteurs (c'est-à-dire classes de bipoints équipollents).

Certaines propriétés rencontrées au cours de cette phase d'approche constitueront un système d'axiomes pour le développement ultérieur de la théorie, qui sera purement déductif.

2° Le groupe des vecteurs du plan

La théorie développée dans ce paragraphe est basée sur le système d'axiomes suivant, ou sur tout autre système équivalent :

I — Le plan est un ensemble de points. Les droites sont des parties du plan.

II — Toute paire de points est incluse dans une droite et une seule.

III — Pour tout point M et pour toute droite D, il existe une droite D' et une seule telle que $M \in D'$ et que $D' // D$.

IV — Si les points A, B, C n'appartiennent pas à une même droite, pour que les bipoints (A,B) et (C,D) soient équipollents, il faut et il suffit que D appartienne à la parallèle à AB passant par C et à la parallèle à AC passant par D.

V — Si les bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents, les bipoints (A,C) et (B,D) sont équipollents.

VI — L'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints du plan.

VII — Si les points A_1, A_2 sont distincts, et si les bipoints (A_1, A_2), (A_2, A_3),…,(A_{n-1}, A_n) sont équipollents, les points A_1, A_n sont distincts.

a) Translation définie par un vecteur. Image d'une droite par une translation.

b) Composition des translations et addition des vecteurs.

Propriétés de groupe commutatif.

Groupe des vecteurs colinéaires à un vecteur donné.

c) Composée d'une translation avec elle-même. Produit d'un vecteur par un naturel, par un entier relatif.

Propriétés de l'application $(n,\vec{V}) \mapsto n\vec{V}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Graduation d'une droite par les éléments de Z.

d) Projection sur une droite D, parallèlement à une direction Δ (telle que $D \notin \Delta$). Images de deux bipoints équipollents par une projection. Δ_1 et Δ_2 étant deux directions distinctes, existence et unicité de la décomposition de tout vecteur en une somme de vecteurs ayant respectivement pour directions Δ_1 et Δ_2.

Projection de la somme de deux vecteurs.

e) Résolution de l'équation $n\vec{X} = \vec{V}$ (n donné appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\vec{V}$ vecteur donné) : construction d'un représentant de $\vec{X}$ au moyen d'une projection, démonstration de l'existence et de l'unicité de $\vec{X}$ (notation $\vec{X} = \frac{1}{n}\vec{V}$). Cas particulier où $n = 2$. Milieu d'un bipoint, symétrie centrale.

3° L'espace vectoriel des vecteurs du plan

La théorie développée dans ce paragraphe est basée sur les axiomes énoncés au 2° et sur les suivants :

VIII — $\mathcal{V}$ désignant l'ensemble des vecteurs du plan, il existe une application de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, choisie une fois pour toutes, et notée $(\lambda,\vec{V}) \mapsto \lambda\vec{V}$, telle que, pour tout couple de réels (λ,μ) et pour tout couple de vecteurs $(\vec{U}, \vec{V})$,

$$\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{V} = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V}$$
$$\lambda(\mu\vec{V}) = (\lambda\mu)\vec{V}$$
$$1\vec{V} = \vec{V}.$$

IX — Pour tout réel λ, $\lambda\vec{V}$ est colinéaire à $\vec{V}$. Inversement, si $\vec{V} \neq \vec{0}$, et si $\vec{U}$ est colinéaire à $\vec{V}$, il existe un réel λ et un seul tel que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$.

Remarque : l'introduction des axiomes VIII et IX peut être rendue plus naturelle si on a, au préalable, défini $\frac{p}{n}\vec{V}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{R}^*$) et si on a établi les propriétés énoncées dans l'axiome VIII pour des valeurs simples (rationnelles) de λ et μ.

a) Abscisse d'un point sur une droite munie d'une origine et d'un vecteur de base. Mesure algébrique d'un vecteur.

b) Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base du plan. Coordonnées d'un point par rapport à un repère du plan.

c) Projection du produit d'un vecteur par un réel.

d) Homothétie.

e) Symétrie par rapport à une droite D et à une direction Δ (telle que $D \notin \Delta$).

Annexe 2

Essai de programme «coordonné» avec la technologie, par Clopeau.

I. — Définition de la droite affine.

Manipulations et observations, la maquette étant : une droite technique D' qui glisse sur une autre droite technique D.

Un glissement est *déterminé* par la donnée d'un couple de points de D. Alors le glissement fait correspondre à tout point de D un autre point de D.

Glissement nul.

Glissement composé de deux glissements ; commutativité, associativité.

Glissement opposé d'un autre glissement.

Glissement multiple d'un autre glissement, l'opérateur étant un entier ou une fraction *simple* suffisant à montrer que la précision parfaite ne peut être que *conçue* en prenant les opérateurs dans R.

Les λ étant pris dans Z, vérification des relations

$$\lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{V}$$

etc...

Exercices d'encadrement du λ introduit au point 4 de la définition ci-contre.

Modèle.

Une droite affine est un ensemble D, comprenant au moins deux éléments, tel qu'il existe des applications de D dans D satisfaisant aux axiomes suivants :

1° Tout couple A, A' de D définit une translation unique. La classe des bipoints qui définissent la même translation s'appelle vecteur de la translation (on note $\overrightarrow{AA'}$ et on lit "translation A,A' " ou "vecteur A, A' ". On peut aussi représenter le vecteur par une seule lettre : $\vec{V}$). Le bipoint (B, B) définit le vecteur nul noté $\vec{0}$.

2° L'ensemble des translations de D est un groupe commutatif.

3° Sur l'ensemble des translations de D, il existe une opération externe, l'ensemble des opérateurs étant R, qui jouit des propriétés suivantes :

$$1.\vec{V} = \vec{V}$$
$$0\vec{V} = \vec{0}$$

etc...

4° Etant donné deux translations de D, de vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{V}_2 = \lambda \vec{V}_1$.

II. — Exploitation de la définition de la droite affine.

Dans D, le point O et le vecteur $\vec{U}$ étant donnés, D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{U}$, x décrivant R. Le couple $(O, \vec{U})$ s'appelle un *repère* de D et x est l'*abcisse* de M dans ce repère.

— Demi-droite, segment, intervalle.

— Relation de Chasles, application : en technologie, le vernier.

— (Barycentre) milieu.

III. — Définition du plan affine.

Les étapes de l'élaboration de cette définition, ainsi que leur correspondance avec des observations de nature technologique, s'enchaînent comme celles de la définition de la droite. Sauf au 4° (voir ci-dessous à droite).

La maquette d'une translation est cette fois le glissement d'un plan technique sur un autre, une droite donnée du premier étant astreinte à glisser sur une droite donnée du second (glissière). La détermination d'un glissement équivaut à la donnée de deux points (déterminant la glissière et l'amplitude du glissement).

Exercices d'encadrement des λ utilisés au 4°.

4° Etant donné une translation $\vec{V}$ de P, toutes les translations $\vec{V}' = \lambda\vec{V}$ (λ décrivant R) constituent un sous-groupe ; $\vec{V}'$ et $\vec{V}$ sont dits linéairement dépendants.

Etant donné $A \in P$, l'ensemble des $M \in P$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{V}$ constitue une droite affine au sens du I (deux points de P déterminent donc une droite de P).

Etant donné une translation $\vec{V}_1$ de P, il existe au moins une translation $\vec{V}_2$ de P qui n'appartient pas au sous-groupe défini par $\vec{V}_1$ ($\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont linéairement indépendants).

Etant donné deux translations $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, n'appartenant pas au même sous-groupe, toute translation $\vec{V}$ de P peut s'écrire

$$\vec{V} = \lambda_1\vec{V}_1 + \lambda_2\vec{V}_2$$

λ_1 et λ_2 appartenant à R.

IV. — Exploitation de la définition du plan affine.

— Quels que soient A, B, C *non alignés* d'un plan (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc indépendants), pour tout point M de P, il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

— Dans P, une droite affine est définie, soit par la donnée de deux points distincts, soit par la donnée d'un point et d'un vecteur (vecteur directeur).

— représentation graphique des applications $x \mapsto y = ax + b$.

— Demi-plan : c'est un ensemble convexe.

— (Barycentre) milieu d'un bipoint, point commun aux médianes d'un triangle.

— Deux droites de P ayant un point commun sont sécantes ou confondues. Droites parallèles. "Théorème" d'Euclide.

— Projection parallèle d'une droite sur une autre droite (dans P). Théorème de Thalès sous la forme : "la relation $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ se conserve par projection parallèle". Réciproque.

— Symétrie centrale : l'image d'une droite est une droite parallèle.

Parallélogramme : quadruplet (A, B, C, D) tel que les bipoints (A, C) et (B, D) aient même milieu — propriétés caractéristiques.

Applications en technologie :

Possibilité de "repérer" tout point du plan à l'aide de 2 nombres ;
problèmes de cotation.

Tracé de parallèles à la règle et à l'"équerre".

Parallélogramme déformable — guidages en translation non rectiligne (balance Roberval) ; appareil à dessiner.

Annexe 3

Orléans, le 3 juin 1970.

Les expérimentateurs en Quatrième
à
Monsieur le Président
de la Commission Ministérielle pour
l'Enseignement des Mathématiques

Monsieur le Président,

Nous avons examiné ensemble, lors du stage d'Orléans, les conclusions qui se dégagent de l'expérience que nous menons depuis trois ans.

1° Nous avons constaté que :

a) aucun expérimentateur n'est parvenu à traiter entièrement les questions qui étaient proposées dans le programme expérimental de Quatrième, quelle que soit la progression qu'il ait suivie ;

b) les élèves ont éprouvé des difficultés dans l'utilisation des raisonnements déductifs exigés par la géométrie dès son début ;

c) nous avons ressenti le besoin de présenter quelques structures finies (groupes en particulier) avant d'aborder les mêmes structures sur des ensembles infinis (géométrie et nombres) ;

d) les élèves montrent de la lassitude lorsqu'ils ont travaillé sur le même thème pendant trop longtemps.

2° Ces constatations nous ont conduits à émettre les voeux suivants :

a) nous demandons que les programmes de Quatrième et de Troisième ne comportent pas de théorie déductive complète de la géométrie, ni de construction systématique de structure numérique ;

b) nous demandons qu'on laisse à chaque professeur la liberté de s'en tenir à certains "îlots déductifs" de son choix, sans référence à une axiomatique imposée par le programme ;

c) nous demandons que le programme de chaque année scolaire comporte deux parties :

— des objectifs nettement délimités et modestes,

— en annexes des textes indiquant avec suffisamment de détails *plusieurs* voies possibles pour atteindre ces objectifs, les professeurs restant bien entendu libres d'en choisir d'autres ;

d) nous demandons que le programme de Quatrième (objectifs et annexes) soit publié dès que possible ; et que les annexes du programme de Troisième ne soient publiées que dans un an, à l'issue de l'expérience de 1970-1971 en Troisième ;

e) nous demandons que les voies suggérées dans les annexes permettent une alternance des thèmes au cours de l'année ;

f) nous demandons que les programmes tiennent compte, dans la mesure du possible, des besoins :

— du professeur de technologie,

— des élèves qui terminent leurs études en fin de Troisième,

— du physicien dans les classes postérieures à la Troisième ;

g) nous souhaitons que les sujets d'examen contiennent toutes les indications nécessaires pour être compris par l'élève quelles que soient les voies choisies par le professeur.

Nous vous prions d'agréer, Monsieur le Président, l'expression de nos sentiments respectueux.

Les expérimentateurs, unanimes.

P.S. — Les expérimentateurs sont à la disposition de la Commission pour fournir des documents à placer en annexe des programmes.

Annexe 4

Projet de l'équipe lyonnaise, (5 juin 1970).

La géométrie en quatrième dans la ligne de ce qui a été expérimenté en cinquième (quadrillage).

A) Soucis constants :

1° Faire apparaître nettement les phases de mathématisation et bien distinguer les travaux relevant du dessin et ceux qui relèvent de la mathématique.

2° Ne pas partir du "concret" pour l'abandonner définitivement, donc donner de temps en temps des problèmes concrets dont la solution utilise un schéma mathématique.

3° Garder, comme ligne directrice, des idées que privilégie la mathématique :

— groupes, groupes de bijections, groupes opérant sur un ensemble ;

— espaces vectoriels ;

— espaces affines.

4° Entraîner les élèves au langage géométrique, langage qui prend son vocabulaire dans le domaine spatial mais peut exprimer de façon, tantôt économique, tantôt suggestive, des résultats de l'algèbre, de la statistique, de l'analyse (ultérieurement).

Ne pas introduire pour autant une axiomatique propre à ce langage.

5° Ne pas élaborer, par des procédés d'une trop grande ingéniosité, des théorèmes correspondant à des résultats évidents.

6° Du point de vue pédagogique, éviter de présenter, comme premier exemple de vectoriel, R sur lui-même.

7° Même si le début de cette approche comporte de l'analytique, faire acquérir, dès que possible, l'outil vectoriel et l'utiliser pour éviter des calculs trop fastidieux.

8° Dès que les théorèmes d'incidence et de parallélisme de droites sont acquis, certaines études pourront se faire par la géométrie "pure".

B) Un moyen d'atteindre les objectifs :

1° Des manipulations sur les réseaux (codage d'instructions de cheminement, exécutions d'une suite d'instructions, codage des noeuds) motivent la mise en place du groupe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus)$, d'une loi externe (ensemble des opérateurs : Z), et la mise en évidence du fait que le groupe précédent opère fidèlement sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2° Prolongement *formel* à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de ces structures ; mise en évidence des propriétés d'espace vectoriel.

Introduction du langage géométrique : point, plan, translation.

Le groupe des translations opère sur l'ensemble des points.

Homothéties vectorielles.

3° Au cours de l'élaboration de R, les élèves ont, par exemple, traduit sur une *droite matérielle* les encadrements successifs définissant un réel.

Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de R et R comme schéma mathématique de la droite matérielle.

De même, on les habituera à repérer des *points matériels* à l'aide de deux droites matérielles graduées.

(Ne pas craindre, à propos des dessins, de parler de parallélisme en tant que "situation" se mettant en évidence par les outils que sont les règles et les équerres).

4° La translation (1, 0) peut se noter $\vec{i}$.

La translation (0, 1) peut se noter $\vec{j}$; dès lors, la translation (a, b) s'écrit $a\vec{i} + b\vec{j}$.

La translation par laquelle le point A a pour image le point B se note $\overrightarrow{AB}$.

Application : couple de points équipollents, parallélogramme,

Coordonnées d'un point.

Corollaire de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (différentes formes).

5° Un couple de points distincts (A, B) étant donné, étude de l'ensemble des points M défini par : "$\overrightarrow{AM}$ est homothétique de $\overrightarrow{AB}$".

Propriétés

— A et B appartiennent à cet ensemble.

L'ensemble précédent est appelé droite AB.

— C et D étant deux points distincts quelconques de la droite AB, la droite CD est égale à la droite AB.

5° *bis* Graduation. Abscisse d'un point sur une droite.

Etant donné une droite AB, tout point M de la droite est tel que $\overrightarrow{AM}$ est homothétique de $\overrightarrow{AB}$. Il existe un seul réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$.

L'application $g_{A,B} : M \mapsto x$ de la droite dans R est appelée graduation associée à (A, B) de la droite.

On dit aussi que est x l'abscisse du point M pour cette graduation $g_{A,B}$. $g_{A,B}$ es t une bijection de la droite sur R.

Changement de graduation.

6° Droites parallèles : étant donné deux droites, droite EF et droite GH, ces droites sont dites parallèles, si et seulement si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont homothétiques.

— Théorème d'Euclide.

— Deux droites parallèles sont disjointes ou égales.

— Théorème : deux droites non parallèles ont un point commun et un seul.

7° Représentation graphique de la droite.

8° Projection, de direction donnée, d'une droite D sur une droite D'.

Théorème de Thalès : A, B, C étant trois points quelconques de D ; A', B', C' leurs projections respectives, et k un réel, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$.

Réciproque du théorème de Thalès : étant donné trois points A, B, C sur une droite D, et A', B', C' sur une droite D' tels que la droite AA' soit parallèle à la droite BB',

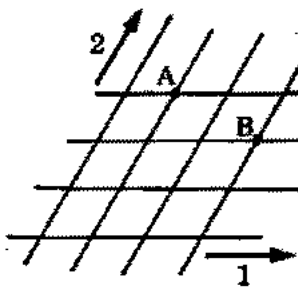
si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, alors la droite CC' est parallèle à la droite AA'.

9° Segment AB : ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ensembles convexes.

C) Début d'explication :

Nous distinguerons les *travaux manuels* (partie gauche), les mathématiques (partie droite).

Travaux pratiques	*Mathématique*
① Quadrillage. Deux directions privilégiées, on ne s'intéresse qu'aux noeuds du quadrillage.  On chemine suivant les lignes du quadrillage. (Il n'y a aucun problème à soulever quant à la définition des noeuds et des lignes ; ce n'est qu'un problème de construction matérielle).	
② On code les ordres les plus économiques permettant d'aller d'un noeud à l'autre. Exemple : ordre de A à B : codé $(2, \bar{1})$.	On utilise $Z \times Z$ pour coder les ordres.
③ Remplacement d'une suite de deux ordres par l'ordre économique ayant le même effet. On fait chercher et constater expérimentalement que : l'ordre (a, b) suivi de l'ordre (c, d) a le même effet que l'ordre $(a + c, b + d)$.	On a motivé une loi de composition sur $Z \times Z$ (alias $\mathfrak{T}$) : $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ $\oplus((a, b), (c, d)) \longmapsto (a + c, b + d)$ *Mise en place du groupe* $(\mathfrak{T}, \oplus)$

Exemple de problème concret, utilisant le schéma mathématique :

A et B deux noeuds donnés,
T_1 un ordre donné.

Trouver l'ordre qui, exécuté à la suite de T_1, permet d'aller de A en B.

Equation dans le groupe $(\mathcal{T}, \oplus)$

④ Itération d'un même ordre.

Remplacer l'exécution d'une suite d'ordres égaux par un seul ordre.

Loi externe sur $\mathcal{T}$

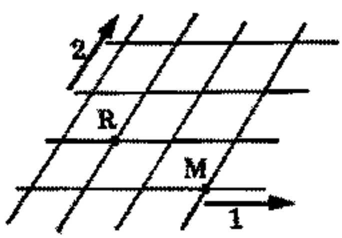
$$\mathbb{Z} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

$$(\lambda, (a, b)) \longmapsto (\lambda a, \lambda b)$$

⑤ Codage des noeuds.

On privilégie un point R sur la quadrillage.

Tout noeud M est codé par un couple (x, y) d'entiers.



Mise en place du Z-module.

On utilise $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (alias $\mathscr{T}$) pour coder les noeuds. (Plan-pointé).

⑥ Des noeuds et des ordres sont donnés par leurs codes, trouver expérimentalement les codes des noeuds obtenus après exécution des ordres.

On a donc motivé le fait que le Z-module $\mathcal{T}$ opère sur $\mathscr{T}$.

Se trouvent ainsi motivées des structures sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que l'élève prolongera, avec l'aide du professeur, à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

⑦ Au cours de l'élaboration de $\mathbb{R}$, les élèves ont, par exemple, traduit sur une droite matérielle les encadrements successifs définissant un réel.

Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ comme schéma mathématique de la droite matérielle.

— groupe additif $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus)$ ou encore $(\mathcal{T}, \oplus)$;

— espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

— variétés affines.

De même, on les habituera à repérer des points à l'aide de deux droites graduées.

(Ne pas craindre, à propos des dessins, de parler de parallélisme en tant que "situation" se mettant en évidence par les outils que sont les règles et les équerres.)

Le seul problème sera de contrôler l'adéquation de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ à schématiser le plan matériel.

Pour préparer la notion de variété affine, on reprend des exemples de groupes finis opérant sur des ensembles finis traités en Sixième et Cinquième. On met en évidence la notion de trajectoire.

La variété affine peut alors apparaître comme la trajectoire d'un point obtenu à partir d'un sous-ensemble de $\mathcal{T}$.

On fait représenter graphiquement cette trajectoire.

L'examen des représentations de différentes variétés amènera les élèves à *conjecturer* des résultats sur les variétés. Ces résultats seront démontrés en Troisième.

Deux remarques.

1° Il peut être gênant d'utiliser le même $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ou $(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ pour schématiser deux concrets différents : les points et les translations. En fait, cela peut être, pour le professeur, une occasion supplémentaire de bien insister sur la différence entre les mathématiques et ce qui est à mathématiser.

2° Dans un souci de sécurisation des parents, il est facile de faire observer que l'on développe ici la géométrie du géomètre expert. En outre, on peut réintroduire, par des exercices, des figures usuelles.

Annexe 5

Projet pour les classes de quatrième et troisième, présenté par un groupe d'expérimentateurs de l'I.P.N. (11 mai 1970).

Dans ce projet nous n'avons pas séparé les classes de Quatrième et de Troisième car nous pensons que ces deux années forment un tout. Cependant, cela étant nécessaire pour la coordination entre enseignants, entre classes et entre établissements, il sera possible de proposer une répartition des thèmes sur les deux ans.

Ce projet ne se présente pas comme un programme habituel, mais plutôt comme une liste de thèmes d'étude. Nous avons choisi ce point de vue pour plusieurs raisons :

1. — Nous pensons souhaitable de faire des programmes légers définissant un bagage minimum que tout élève doit savoir au sortir de la classe correspondante ; ceci est d'autant plus important qu'on se trouve ici en Troisième, fin de la scolarité obligatoire.

2. — Nous pensons souhaitable de laisser une grande liberté au maître sur les moyens utilisés pour conduire ses élèves à acquérir ce bagage minimum.

3. — Un programme léger peut être complété en fonction des intérêts des élèves et du maître, si cela est nécessaire.

Dans les thèmes d'étude choisis nous avons distingué trois niveaux :

— notions mathématiques ;

— savoir faire ;

— exemples, ou exercices, préparant des prises de conscience et des ouvertures.

1° Notions mathématiques.

Les notions mathématiques seront dégagées à partir de nombreux exemples et contre-exemples. Elles sont une synthèse où tout ce qu'il y a de commun à ces exemples et les différencie d'autres, permet de faire apparaître la notion elle-même.

Nous en avons distingué deux sortes :

a) Celles qui, après une préparation qui aura pu commencer en Cinquième et se prolonger ensuite, seront mises au point au cours de l'une des deux années de Quatrième ou de Troisième.

— groupe ;

— anneaux et corps ;

— distances ;

— ordre (ω et η) (préparation aux décimaux et aux réels).

b) Celles qui doivent être préparées en Quatrième et Troisième et dégagées soit en fin de Troisième soit au début de la classe de Seconde.

— espace vectoriel ;

— R.

2° Savoir faire.

Les savoir-faire consistent en des techniques que tout individu devrait posséder et en des procédés qu'il faut connaître. Il faut en faire un apprentissage intelligent, c'est-à-dire les faire découvrir et élaborer par les élèves qui les fixent intelligemment dans la mémoire et ensuite les faire pratiquer. Ce sont :

- Organisation et technique de calculs algébriques en fonction de la structure;
- Calculs approchés;
- Traduction de problèmes simples sous forme de graphe;
- Utilisation de Z^2 ;
- Dessins et études géométriques :
  - utilisation de la règle et du compas;
  - étude de groupes de pavage du plan;
  - table de rapports (sinus et cosinus).

3° Exemples.

Dans cette rubrique nous mettons des exercices permettant la construction de certains modèles mathématiques s'appliquant à des situations réelles. Ils sont de deux types : ceux qui préparent directement les notions du paragraphe 1° ci-dessus, et les autres qui, s'ils préparent pour ceux qui poursuivront leurs études d'autres notions mathématiques, doivent permettre à ceux qui ne poursuivent pas leurs études la compréhension de certains phénomènes, les habituer à une réflexion et leur former l'esprit critique. Il est fondamental pour la formation intellectuelle et civique de l'individu que ces exemples soient pris, pour la plupart, dans des situations ayant existé. Ces exercices peuvent porter sur les problèmes suivants :

— Cheminements dans un graphe. Recherche opérationnelle. Optimisation;

— Croissances linéaire et non linéaire (travail sur papier logarithmique ou semi-logarithmique);

— Exemples économiques de calcul matriciel (Produit, addit.) ;

— Organisation de données, d'information, de calculs ;

— Etude de Z^3 (approche de l'espace) ;

— Problèmes de gestion d'une entreprise ou d'un budget individuel... ;

— Vote... .

Depuis l'article de Belouze, deux mois et demi se sont écoulés et les éléments nouveaux sont fort nombreux. La Commission Pédagogique de l'A.P.M.E.P. fait le point dans le Bulletin 277 de Janvier-Février 1971 ; on trouve en effet page 103 :

La Commission pédagogique de l'A.P.M. s'est mise au travail. Lors de ses premières réunions, elle a dégagé certains principes d'action qui ont été plus ou moins repris en compte par le Bureau et les professeurs membres de la commission Lichnérowicz (obtenir une certaine liberté d'action du côté de la géométrie).

A sa demande, le Bureau de l'A.P.M. a été reçu par M. Lichnérowicz le jeudi 15 octobre 1970 et lui a fait part de son inquiétude sur les derniers projets de la Commission ministérielle, d'une part quant aux contenus (présence d'une géométrie axiomatique ambitieuse), d'autre part quant à la forme (programme contraignant ne laissant aucune initiative aux professeurs).

A la suite de cette entrevue, une première amélioration était obtenue : la voie axiomatique indiquée par le programme n'était qu'une voie possible, les voies "non officielles" devant faire apparaître tous les résultats de la "voie officielle", soit en axiomes, soit en théorèmes. Ce projet n'en restait pas moins "austère et contraignant" aux yeux de la Régionale parisienne notamment.

Une amélioration plus substantielle fut obtenue à la suite de l'intervention à la commission Lichnérowicz de D.J.S. (Défense de la Jeunesse Scolaire). Celle-ci, après des contacts auprès de membres de l'A.P.M., décidait de reprendre à son compte la position des expérimentateurs de Quatrième (voir l'annexe 3 dans l'article des numéros 275-276) et présentait un projet défendu par M. Samuel. La commission Lichnérowicz se ralliait à ce projet et admettait le principe d'un programme avec des objectifs limités et d'annexe(s) indiquant des voies pour les atteindre.

L'ancien libellé du programme de géométrie devenait donc "une" annexe, mais il fallut attendre le Conseil Supérieur de l'Enseignement de décembre, où le projet fut adopté, pour obtenir que d'autres annexes soient mises "en concurrence" avec la première.

A cette fin, nous publions des documents des équipes de Lyon et Poitiers-Limoges pouvant servir de point de départ pour rédiger ces autres annexes.

Au-delà de cet historique du programme de Quatrième, plusieurs remarques s'imposent :

1° Ce n'est qu'à la suite de l'intervention de D.J.S. cautionnée par des professeurs de l'enseignement supérieur (M. Samuel et M. Pisot) que des progrès appréciables ont été obtenus. On ne peut qu'épiloguer sur le poids des avis des professeurs de Quatrième eux-mêmes auprès de la commission Lichnérowicz et même d'autres professeurs...

2° Les annexes seront plus ou moins ouvertes selon ce que les professeurs, eux-mêmes, en feront. Il semble donc nécessaire que les Régionales se penchent sur ce programme de Quatrième et sa suite, celui de Troisième, et fassent des propositions. Certaines Régionales, ainsi Paris, ont déjà commencé leurs travaux. Un bulletin de synthèse pourrait être la conclusion de ces études.

3° A plus long terme (4 ans !), il semble indispensable de revoir *les contenus* des programmes de Quatrième et Troisième. Bien sûr, ces

contenus ne peuvent être revus qu'en fonction des objectifs qu'on assigne à l'enseignement dans ces classes.

Pour l'instant, le moins qu'on puisse dire c'est que les avis divergent selon les individus ! Les Régionales doivent donc essayer de préciser ces objectifs. Pour reprendre une lettre de Lassave (Toulouse) :

l'enseignement doit-il

- *préparer le 2e cycle*
  - tous les élèves n'y rentrent pas.
  - le pourcentage "d'élus" est faible
- *donner une formation utilisable*
  que signifie utilisable ?
  - *apporter des connaissances*
    - lesquelles ?
    - qui choisit ?
    - évolution rapide
  - *apporter des schémas*
    - adaptables à des situations variées,
    - structurant la pensée de l'enfant

On voit qu'en fonction des réponses apportées aux différentes questions, le contenu des programmes de ces classes sera très différent.

4° Le nombre des lettres reçues d'un peu partout (et tout particulièrement du Nord) montrait l'ampleur du malaise ressenti par les collègues au début de cette année scolaire devant les projets de la commission Lichnérowicz. Un peu partout on s'indignait de voir complètement oublié l'intérêt même des enfants. Quoique tardive, et parce qu'elle a reçu des concours appréciables, l'action de l'A.P.M. n'a pas été inutile. Notre vigilance ne doit plus être prise en défaut ; rendez-vous pour le programme de Troisième.

Belouze, secrétaire de la Commission Pédagogique.

N.D.L.R. — Réunie le 1er février, la Commission ministérielle a décidé, de façon presque unanime (à 9 sur 10), de soumettre au Conseil d'enseignement du 3 mars, un texte de programme, pour les Quatrième et Troisième, tenant compte de diverses suggestions évoquées ci-dessus. Ce large accord met fin, de façon heureuse, à une confusion artificiellement entretenue par certains. Les collègues enseignant en Quatrième et Troisième ne peuvent que se réjouir de ce dénouement.

HELAS ! nous savons aujourd'hui ce qu'il en est ! ...

Annexe 1

Proposition de programme faite par l'équipe lyonnaise (fin octobre 1970)

Géométrie de 4e.

N.B. — *Nous avons inclus dans ce projet toutes les notions qui figurent dans le projet de la Commission dans sa rédaction du 29 juin 1970. Il est entendu que nous approuvons en principe les allègements éventuels opérés depuis lors.*

1° Exercices sur un réseau (oblique ou non) : cheminement le long des traits du réseau, codé par une suite d'instructions (chaque instruction comportant un entier et l'une des deux directions du réseau). Chemins ayant même noeud de départ et même noeud d'arrivée. Repérage d'un noeud par un couple d'entiers.

Translation sur un réseau, déterminée par un couple d'entiers. Translation transformant un noeud en un noeud donné. Couples de noeuds équipollents : "(A, B) est équipollent à (C, D)" signifie "la même translation transforme A en B et C en D".

(Ce 1° comporte des manipulations sans préoccupation de rigueur mathématique.)

2° La feuille de papier, le tableau noir..., sont des morceaux de *plans matériels*. Un trait tracé à la règle est un morceau de *droite matérielle*. La pointe d'un crayon bien taillé laisse pour trace sur un plan matériel un *point matériel*.

Ce sont des représentations concrètes grossières du *plan*, de la *droite*, du *point* (voir plus loin).

Au cours de l'élaboration de R, les élèves ont, par exemple, traduit sur une *droite matérielle* les encadrements successifs définissant un réel. Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de R et R comme schéma mathématique de la droite matérielle.

De même, on les habituera à repérer des *points matériels* à l'aide de deux droites matérielles graduées, à utiliser des "translations matérielles", des couples de noeuds "équipollents", etc.

On mathématisera ensuite.

3° Définitions (1).

① Un *plan réel repéré* est un couple (P, f) où P est un ensemble, dont les éléments sont appelés *points*, et f une bijection de P vers $R \times R$.

(1) Voir plus loin "Commentaires".

② M étant un élément de P et (a, b) un élément de $R \times R$, si $f(M) = (a, b)$, a est appelé "première coordonnée" de M, b est appelé "seconde coordonnée" de M.

③ A tout couple de réels (x, y), on associe une application de P vers P, dite "translation associée à (x, y)" (notée par exemple $t_{x,y}$) par laquelle le point M, tel que $f(M) = (a, b)$, a pour image le point M', tel que $f(M') = (a+x, b+y)$.

Théorèmes.

1. Les translations sont des bijections.

2. A tout couple de points (A, B) correspond une translation unique par laquelle A a pour image B, qu'on peut noter $t_{(A,B)}$.

3. L'ensemble des translations, muni de la loi "composition des bijections", est un groupe commutatif.

4° Couples de points équipollents : "(A, B) est équipollent à (C, D)" signifie "$t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$".
Parallélogramme.

L'équipollence est une relation d'équivalence dans $P \times P$. Chaque classe d'équipollence est le graphe d'une translation et s'appelle *vecteur géométrique* (de la géométrie plane). Le vecteur classe d'équipollence du couple de points (A, B) se note $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur graphe de la translation composée de deux translations est le vecteur *somme* des vecteurs graphes de ces deux translations. On définit ainsi dans l'ensemble des vecteurs une loi dite *addition vectorielle* notée par exemple $\oplus$ qui lui confère la structure de groupe commutatif.

Théorème de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; autres formes.

Produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un réel k : si $\vec{V}$ est le graphe de la translation $t_{(a,b)}$, $k\vec{V}$ est le vecteur graphe de la translation $t_{(ka,kb)}$.

Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont dits "linéairement dépendants" s'il existe deux réels a et a' non tous deux nuls, tels que $a\vec{V} \oplus a'\vec{V}'$ soit le vecteur nul.

Traductions diverses de cette situation.

5° Un couple de points distincts, (A, B), étant donné, étude de l'ensemble des points M défini par : "Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

Propriétés.

— A et B appartiennent à cet ensemble. L'ensemble précédent est appelé droite AB.

— C et D étant deux points distincts quelconques de la droite AB, la droite CD est égale à la droite AB.

6° Graduation. Abscisse d'un point sur une droite.

Etant donné une droite AB, tout point M de la droite est tel qu'il existe un seul réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

L'application $g_{(A,B)}$: $M \longmapsto x$ de la droite vers R est appelée "graduation" associée à (A, B) de la droite.

On dit aussi que x est l'abscisse du point M pour cette graduation $g_{A,B}$.

7° Droites parallèles : étant donné deux droites, droite EF et droite GH, ces droites sont dites parallèles si et seulement si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont linéairement dépendants.

— Théorème d'Euclide.

— Deux droites parallèles sont disjointes ou égales.

— Théorème : deux droites non parallèles ont un point commun et un seul.

(On vérifiera expérimentalement que les droites matérielles "traduisent" les propriétés des droites, que deux droites parallèles distinctes se représentent par deux droites matérielles qui ne se coupent pas, etc.)

Projection, de direction donnée, d'une droite D sur une droite D'.

Théorème de Thalès : A, B, C étant trois points quelconques de D, A', B' et C' leurs projetés respectifs et k un réel, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$.

Réciproque du théorème de Thalès : étant donné trois points A, B, C sur une droite D et trois points A', B', C' sur une droite D' tels que la droite AA' soit parallèle à la droite BB', si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, alors la droite CC' est parallèle à la droite AA'.

8° Segment AB : ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Demi-droite.

9° Décomposition unique d'un vecteur selon deux directions sous forme d'une combinaison linéaire à coefficients réels. Repère du plan.

Barycentres dans le plan. Triangle ou repère du plan. Ensembles convexes, demi-plan, intersection d'ensembles convexes.

Représentation graphique des applications $x \mapsto ax+b$ de R vers R.

10° Symétrie centrale. Image d'une droite.

11° On pourra faire le bilan des lois dans R × R utilisées et aboutir à l'espace vectoriel R × R construit sur R.

Commentaires sur 3°) et 4°).

Dans ces deux paragraphes, on a mis en évidence un espace vectoriel, l'espace vectoriel des translations, $\mathcal{T}$, dont le groupe opère transitivement et fidèlement sur P. La donnée du couple (P, $\mathcal{T}$) définit sur P une structure affine. Cette partie du programme est donc une approche analytique de la notion de plan affine.

Annexe 2

Une présentation possible de la géométrie en classe de quatrième.

Jacques Chayé
Poitiers

Réunion des Expérimentateurs de Poitiers et Limoges en classe de quatrième. Projet remis au Président de la Commission Ministérielle le 10 novembre 1970.

Acquisitions antérieures.

Indispensables $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$ Souhaitables $\begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}$

(1) *Opération. Loi de composition interne. Stabilité. Associativité. Commutativité. Elément neutre. Symétrique. Groupe. Sous-groupe.*

De nombreux exemples et contre-exemples sur des ensembles finis ou infinis peuvent, certains dès la classe de Cinquième, être proposés aux enfants :

- ceux qui leur sont déjà familiers dans N, dans Z ;
- exemples de lois de composition non associatives (soustraction, moyenne arithmétique, exponentiation, etc.) ;
- composition de bijections sur des ensembles finis (sous forme de jeux algébriques ou dans le langage des bijections : dans les deux cas, les élèves de Cinquième Quatrième y sont remarquablement actifs !) ;
- lois $\cap$, $\cup$, Δ, dans $\mathcal{P}$ (E) fini ou non ;
- lois sur un ensemble-produit ;
- addition, multiplication dans Z/pZ (cf. plus loin).

Les notions peuvent être dégagées au fur et à mesure mais pas avant qu'elles ne soient motivées par exemples et contre-exemples.

(2) *Structures à deux lois internes. Distributivité. Anneaux (Z, +, ×), (D, +, ×). Corps (R, +, ×). Anneaux et corps (Z/pZ, +, ×).*

Les structures (Z/pZ, +, ×) sont très faciles à présenter sans le recours explicite aux congruences arithmétiques et aux opérations sur les classes ; une horloge dont les heures sont numérotées de 0 à $p-1$ constitue une bonne motivation pour introduire dans l'ensemble $E = \{0, 1, ..., p-1\}$ une loi + en convenant que : quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $x+y$ désigne le reste euclidien de $x+y$ par p, puis par analogie une loi $\times$ telle que : quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $x \times y$ désigne le reste euclidien de $x \times y$ par p.

Il importe peu à ce niveau que les structures d'anneau et de corps soient dégagées pour elles-mêmes ; l'essentiel est que les élèves puissent calculer dans $(Z/pZ, +, \times)$ ou dans $(R, +, \times)$ en sachant ce qu'ils font, sans automatisme imbécile.

Loi externe. Module. Espace vectoriel.

Ici aussi, c'est par l'intermédiaire de nombreux exercices que ces notions pourront être rencontrées. Citons par exemple les trois situations isomorphes (pour une addition et une multiplication externe convenables) :

- translations sur un quadrillage infini codé par Z^2 ou fini codé par $(Z/pZ)^2$; le quadrillage n'est ici qu'un support concret, ce n'est pas un objet d'étude ; au même titre que les blocs logiques ou les pions du jeu d'échecs, il n'a pas à être défini mathématiquement ; dans le cas fini, si on veut que les translations-applications soient suggérées par les translations physiques, il est recommandé de présenter le quadrillage sur une chambre à air dont on ne dessine plus ensuite que la "carte" plane ;
- ensemble-produit Z^2 ou $(Z/pZ)^2$; pour cette situation plus abstraite, le quadrillage peut encore être utilisé, il figure alors l'espace lui-même ;
- applications affines de Z vers Z ou de Z/pZ vers Z/pZ ; les élèves prennent beaucoup d'intérêt à la question s'il leur est demandé au préalable de construire les diagrammes sagittaux.

Dans les trois cas, les domaines d'opérateurs étant Z ou Z/pZ, la loi externe apparaît comme une loi interne "répétée" et ces premiers exemples sont ainsi très accessibles aux élèves de Quatrième.

Sachant que dans les écritures $\lambda . x$,

$$\begin{cases} x \text{ décrit un groupe} \\ \lambda \text{ décrit un anneau unitaire ou un corps} \end{cases}$$

on est amené à chercher si quelque chose de simple peut être dit sur :

$$\begin{array}{lll} \lambda.(x_1+x_2), & \lambda,0, & \lambda.(\text{opp. } x) \\ (\lambda_1+\lambda_2).x, & 0.x, & (\text{opp. } \lambda).x \\ (\lambda_1\ \lambda_2).x, & 1.x, & (\text{inv. } \lambda).x \end{array}$$

On peut alors remarquer, mais ce n'est pas indispensable, que les quatre résultats choisis traditionnellement pour leur commodité :

$$\begin{cases} \lambda.(x_1+x_2) = \lambda.x_1+\lambda.x_2 \\ (\lambda_1+\lambda_2).x = \lambda_1.x+\lambda_2.x \\ (\lambda_1\ \lambda_2).x = \lambda_1.(\lambda_2.x) \\ 1.x = x \end{cases}$$

permettent de retrouver les autres :

$$\begin{cases} \lambda.0 = 0 \\ \lambda.(\text{opp.}\ x) = \text{opp.}\ (\lambda.x) \\ 0.x = 0 \\ (\text{opp.}\ \lambda)x = \text{opp.}\ (\lambda.\ x) \\ \lambda.[(\text{inv.}\lambda).x) = x. \end{cases}$$

Les notions de Z-module, Z/pZ-module, Z/pZ-espace vectoriel, plus tard de R-espace vectoriel, sont très accessibles au niveau de la classe de Quatrième ; commencer par les cas les plus simples et non pas par l'espace vectoriel des "vecteurs" de la géométrie apparaît souhaitable.

Géométrie intuitive.

Les paragraphes 4 et 5 du programme de Cinquième permettent de développer l'imagination et d'enrichir l'expérience géométrique des enfants ; on aurait tort de les priver des imageries traditionnelles sur lesquelles l'abstraction pourra s'appuyer dans l'avenir.

Initiation à l'axiomatique.

Il est indéniable que cette initiation est d'une grande importance, ne serait-ce que d'un point de vue culturel, mais présenter pour la première fois cette démarche à l'occasion de la géométrie apparaît illusoire. Nous constatons chaque année dans nos classes, à ce sujet, un véritable malentendu entre maître et élèves. En effet, la géométrie apparaît à ces derniers comme une science ayant pour but de *décrire* les propriétés des êtres (?) dont elle parle, quel que soit le zèle pédagogique déployé par le professeur pour leur apprendre à *déduire* à partir des règles du jeu et à l'aide de la logique (elle-même plus ou moins exploitée, mais c'est un autre problème). Ces propriétés — axiomes et théorèmes — sont pour eux des vérités absolues au même titre que la rotondité de la terre ou la date de la bataille de Marignan. Bien sûr, l'espace physique nous suggère certains axiomes et leur choix n'est pas arbitraire si nous voulons que le modèle mathématique colle au plus près la réalité, mais logiquement, seule la cohérence de la théorie représente une contrainte : nous restons donc toujours libres de fixer les règles du jeu pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires.

Cette liberté est d'autant moins ressentie par les élèves que le référentiel semble imposé par la "nature" et demeure le même tout au long de l'année ou des années. Les points, les droites, les plans, sont apparemment inchangés, leurs représentations graphiques aussi, et *pourtant la structure s'enrichit progressivement d'axiomes nouveaux* dont certains sont formulés tardivement au moment où le besoin s'en fait sentir ; l'introduction de ces énoncés non démontrés semble résulter d'une impuissance déductive ou d'une paresse intellectuelle et n'est pas perçue comme un nouveau départ permettant l'exploration d'une structure particulière.

Il est certain que dans tout enseignement élémentaire des mathématiques surgissent, quelquefois au sein même d'une phase déductive, des résultats que l'on est contraint d'admettre parce que leur démonstration exigerait soit une recherche très pénible, soit des outils mathématiques trop élaborés, mais *cette fois aucune modification n'est apportée à la structure elle-même.*

Pour éviter ce dialogue de sourds, il serait donc souhaitable de faire précéder l'étude de la géométrie d'une initiation à la démarche axiomatique sur des exemples simples où apparaîtrait mieux la dualité situation-modèle. Il est aisé d'exhiber des exemples de jeux algébriques ("petites machines", "monchodromes", "frises", etc.) dont la structure est décrite par quelques "axiomes" surabondants ou non ; on pourra même, sur ces exemples, constater que plusieurs axiomatiques équivalentes peuvent être choisies pour mathématiser une situation et qu'inversement une même structure algébrique donne lieu à diverses interprétations.

Progression possible.

Une fois traité le paragraphe 1 tel que le suggère le projet de programme, le paragraphe 2 pourrait être intégré au paragraphe 3 et l'introduction des *translations* dans le plan permettrait une présentation complète de toutes les notions contenues dans ces deux paragraphes.

Axiomes des translations.

Il existe un ensemble $\mathcal{T}$ de bijections du plan P vers lui-même appelées *translations* et une multiplication externe sur P à opérateurs réels, vérifiant les axiomes T_1, T_2, T_3, T_4.

$$(T_1) : (\mathcal{T}, o, .) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}$$

pratiquement $x \text{ o } y$ sera noté $y+x$.

(T_2) : Quels que soient les points A et B, il existe une translation et une seule, telle que A ait pour image B, on la notera t_{AB} ou $\overrightarrow{AB}$.

On peut introduire les notions de bipoint, équipollence, vecteur, et ne pas identifier la translation t_{AB} avec son graphe, c'est-à-dire le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$, mais ce n'est pas indispensable.

(T_3) : Pour que 3 points A, B, C, deux à deux distincts, soient alignés, il faut et il suffit qu'il existe un réel λ et un seul tel que : $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

Remarque : la condition d'unicité est surabondante.

(T_4) : Si $A \neq B$, $A' \neq B'$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors : $AB//A'B'$.

— *Conséquences.*

- Formule de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- l'application identique de P est une translation ;
- l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$;
- "croisement des équipollences" : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$;
- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors $B = C$;
- si un point est invariant par une translation, cette translation est l'application identique ;
- translatée d'une droite.

— *Parallélogramme.*

Définition : (A, B, C, D) est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (la notion de parallélogramme-quadruplet-de-points est très éloignée du sens habituel et peu "géométrique" : à 4 points peuvent correspondre 8 parallélogrammes distincts ; au lieu de dire que (A, B, C, D) est *un* parallélogramme, on pourrait peut-être dire que (A, B, C, D) est *en* parallélogramme).

Théorème : soient A, B, C, D, 4 points distincts non alignés ; pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme, il faut et il suffit que $AB//CD$ et $AC//BD$.

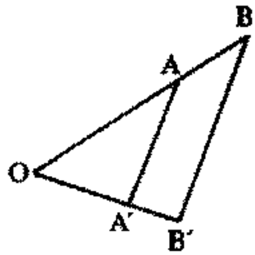
Exercices : 1, 2, 3, 4 (cf. plus loin).

— *Les théorèmes de Thalès.*

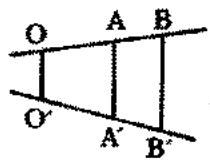
Théorème préliminaire ; soient A, B, C, D, 4 points distincts ; pour que $AB//CD$, il faut et il suffit qu'il existe un réel λ et un seul tel que : $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

Théorème I ("réciproque" du théorème de Thalès dans le triangle) : si $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OB'}$, alors $AB//A'B'$.

Théorème II (théorème de Thalès dans le triangle) : si $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB}$ et $AB//A'B'$, alors $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OB'}$.



Théorème III } Généralisations.
Théorème IV }



Exercices : 5, 6, 7.

Symétrie centrale :

- définition ;
- symétrique d'une droite.

Exercices : 8, 9.

— *Milieu ou centre d'un bipoint (avant barycentre) :*

- existence et unicité d'un point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$;
- pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme, il faut et il suffit que (A, C) et (B, D) aient même milieu.

Exercices : 10, 11.

— *Centre de gravité d'un "triangle" :*

- existence et unicité d'un point G tel que : $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{0}$;
- G est situé sur chacune des médianes.

Exercice : 12.

— *Barycentre de 2 points, de 3 points.*

— *Bases-coordonnées.*

— *Demi-droites :*

- relation $\mathcal{R}$ sur D—{0} : $\forall A, \forall B, (A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, \vec{OA} = \lambda \vec{OB})$;
- $\mathcal{R}$ est d'équivalence ;
- il existe deux classes d'équivalence ;
- demi-droite ouverte]OM, demi-droite fermée [OM.

— *Segments :*

- segments $]AB[$, $[AB]$, $[AB[$;
- Théorème : pour que $M \in]AB[$, il faut et il suffit qu'il existe μ tel que $0<\mu<1$ et $\overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AB}$.

— *Ensemble convexe :*

- définition ;
- premiers exemples.

— *Demi-plan :*

- relation $\mathcal{R}'$ sur P—D :

$$\forall A,\ \forall B,\ A\,\mathcal{R}'B \Leftrightarrow \begin{cases} & A = B \\ \text{ou :} & AB//D \\ \text{ou :} & \text{O étant l'intersection de AB et D,} \\ & \exists \lambda > 0,\ \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

- $\mathcal{R}'$ est d'équivalence ;
- il existe deux classes d'équivalence ;
- demi-plan ouvert, demi-plan fermé ;
- tout demi-plan est convexe.

Exercice : 13.

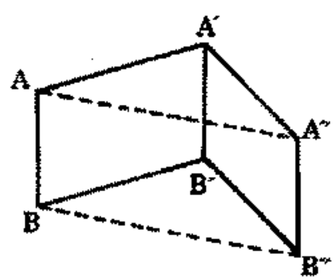
— *Graduation d'une droite par R. Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un bipoint.*

Ces notions peuvent être introduites tout de suite après les axiomes des translations ; elles sont utiles pour énoncer certains résultats comme les théorèmes de Thalès, mais elles ne sont pas indispensables.

Exercices.

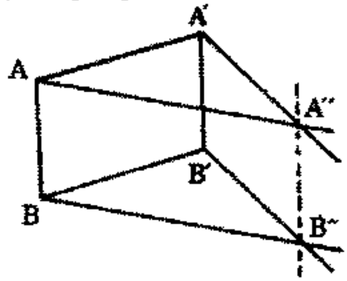
1. Construction de X tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CX}$ (A, B, C alignés ou non).
2. Construction d'un représentant de $2t$, $3t$, etc., connaissant un représentant de t.
3. On suppose que :

$$\begin{cases} AA'//BB' \\ A'A''//B'B'' \\ AB//A'B' \end{cases}$$



montrer que si A''B''//AB, alors AA''//BB''.

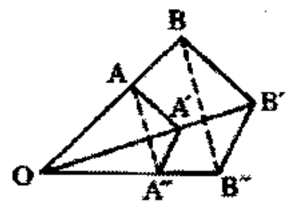
4. Montrer que, réciproquement, si AA"//BB", alors A"B"//AB.



5. Construction d'un représentant de $\frac{1}{3}t$, $\frac{3}{5}t$, *etc.*, connaissant un représentant de t.

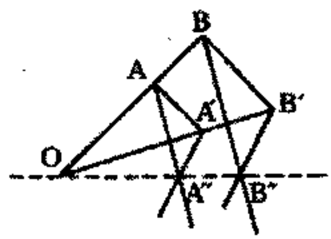
6. On suppose que :

$$\begin{cases} AA'//BB' \\ A'A''//B'B'' \\ AB \text{ et } A'B' \text{ sécantes en } O \end{cases}$$



montrer que si A"B" passe par O, alors AA"//BB".

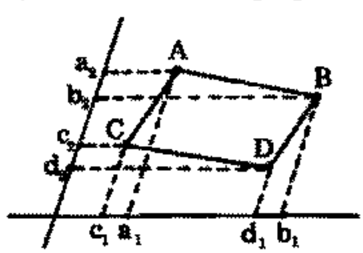
7. Montrer que, réciproquement, si AA"//BB", alors A"B" passe par O.



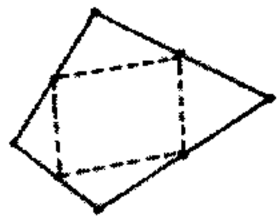
8. Composition d'une translation et d'une symétrie centrale, d'une symétrie centrale et d'une translation.

9. Composition de deux symétries centrales, de trois symétries centrales.

10. Condition nécessaire et suffisante pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme (en utilisant les projections sur deux droites sécantes).



11. Exercice classique sur les milieux des côtés d'un quadrilatère.



12. Equibarycentre de 4 points.

13. Secteurs angulaires. Bande de plan.

Ce dossier serait incomplet sans rappeler les deux lettres de F. Colmez au Ministre de l'Education Nationale (Bulletin 278, mars-avril 1971, page 186) :

Monsieur le Ministre,

J'ai l'honneur d'attirer votre attention sur l'inquiétude que suscite chez les professeurs de mathématique le retard apporté à la parution officielle des programmes des classes de Quatrième et de Terminale, qui doivent entrer en vigueur dès le mois de septembre de cette année.

Cette inquiétude est d'autant plus grande qu'aucune raison ne peut officiellement être invoquée pour justifier ce retard ; ces programmes ont été présentés par la Commission ministérielle sur l'Enseignement des Mathématiques et soumis au Conseil supérieur de l'Enseignement au mois de juillet pour les classes de Terminale et au mois de décembre pour les classes de Quatrième.

Si certains collègues ont manifesté une certaine réticence devant le programme présenté par la Commission pour la classe de Quatrième, c'est que celui-ci ne comblait pas entièrement leur désir de renouveau ; mais ils pensent cependant que ce programme marque un grand progrès sur celui qui est actuellement en vigueur, et qui, de toute façon, ne peut plus être enseigné après les changements intervenus dans les classes de Sixième et de Cinquième.

L'unanimité se fait, en tout cas, pour désapprouver vigoureusement l'action entreprise par certains membres de la Commission ministérielle qui ont décidé de leur propre chef de présenter directement à votre Cabinet un contre-projet de programme fondé sur des idées auxquelles la Commission, après étude, avait préféré celles qui animent les programmes présentés maintenant.

En espérant que les quelques faits que je viens de porter à votre connaissance vous seront utiles pour prendre une décision que tous les professeurs de Mathématiques espèrent rapide, je vous prie d'agréer, Monsieur le Ministre, l'expression de ma haute considération.

Le 28-1-1971.

Monsieur le Ministre,

Des articles récemment parus dans la presse annonçaient que les nouveaux programmes de Quatrième ne seraient pas officiellement publiés avant trois mois. L'A.P.M.E.P. pense qu'une telle information ne peut qu'être erronée et vous demande de bien vouloir faire paraître un démenti indiquant un délai plus raisonnable.

En effet la commission ministérielle présidée par le Pr Lichnérowicz qui avait à trancher les difficultés soulevées par MM. Pisot et Zamansky, a élaboré au cours de sa séance du 1er février, un libellé des programmes qui, sans en changer fondamentalement l'esprit, les rendent accessibles à tous.

Dans ces conditions il semble que la procédure soit terminée (comme elle aurait dû l'être au mois de décembre) et que la parution prochaine des programmes ne dépende que de votre décision. C'est pourquoi je renouvelle, en tant que président de l'A.P.M.E.P., la demande que je vous avais faite dans ma lettre du 28 janvier concernant la publication aussi rapide que possible de ces programmes.

Je vous prie d'agréer, Monsieur le Ministre, l'expression de ma haute considération.

A Paris, le 8 février 1971.

Jeanne Bolon, dans le texte proposé à la réflexion des Régionales (12.11.71), et publié à la page 173 du Bulletin 282 de février 1972, fait un bilan :

Premier Cycle : Carrefour des contradictions

La réforme de l'Enseignement du Premier Cycle est le fruit du travail de la Commission "Lichnérowicz" où se sont trouvés affrontés 3 courants :

— celui des Universitaires, qui veulent que soient enseignées les mathématiques d'aujourd'hui et non celles d'hier, de la façon la plus correcte possible ;

— celui de l'Administration de l'Éducation Nationale, qui se trouve confrontée avec le problème de la formation du personnel et qui ne sait comment le résoudre ; qui freine toute réforme qui déconcerterait le personnel actuellement en place ;

— celui de type "rénovation pédagogique", qui n'est intéressé *a priori* ni par les espaces vectoriels, ni par la notion de mesure algébrique, mais qui s'interroge sur les finalités de l'enseignement du tronc commun (c'est-à-dire un enseignement non tourné vers la préparation professionnelle, devant s'adresser à tous).

Cela ne sera un secret pour personne de dire que le courant de type "rénovation pédagogique" a été minoritaire, et que ses préoccupations ont bien peu transparu dans les programmes de quatrième et de troisième...

Un même enseignement doit être adressé à tous les élèves ; ils ont le même horaire, qu'ils soient de section I ou II, ou qu'ils viennent de section III ; par contre, les professeurs les moins mathématiquement formés et les plus chargés de classes sont ceux qui s'adressent aux élèves les plus lents, dont la scolarité est moins facile.

Les classes pratiques, les classes de transition restent le plus souvent à l'écart de la réforme de l'enseignement ; d'ailleurs les programmes de C.E.T. n'ont pas changé : on parle d'angles alternes internes, de "faire passer un terme d'un membre dans l'autre" dans la préparation mathématique aux B.E.P....

La formation permanente n'est pas prévue pour tous : les instituteurs remplaçants et maîtres auxiliaires sont nombreux, en mathématiques ; n'étant pas titulaires ils n'ont pas droit à la formation permanente (cours des I.R.E.M., journées organisées par l'Inspection Générale, etc.).

Enfin, dans "Une nouvelle étape"... qui se trouve dans notre dernier Bulletin 283, l'A.P.M.E.P. met en évidence sa politique sur les programmes :

5.2 Une modification des structures des programmes qui consisterait, au lieu de la liste exhaustive des matières qu'il faut enseigner coûte que coûte dans telle classe, à distinguer :

— *un noyau de notions fondamentales* qu'au terme de l'année tout élève de la classe doit avoir acquises, l'étude de ces notions ne nécessitant qu'une partie du temps imparti, dans cette classe, aux mathématiques ;

— *une liste de thèmes* parmi lesquels les élèves et le maître pourront choisir ceux qu'ils étudieront, soit pour motiver l'introduction des notions fondamentales, soit pour illustrer des utilisations de ces notions, soit encore pour nourrir des recherches supplémentaires dont l'apparente gratuité donnerait, aux amateurs qui s'y livreraient, un avant-goût des études libres que, devenus adultes, ils entreprendront peut-être.

Remarques

1) La mise en pratique de cette nouvelle conception des programmes suppose qu'une vaste documentation serait mise à la disposition des maîtres, pour éclairer leur choix et pour les guider dans la réalisation de ces études ; en dehors des études que l'A.P.M.E.P. pourrait mener et publier à cette fin, il est dans la vocation des I.R.E.M. de contribuer à cette tâche.

2) Le maintien de la formule actuelle des programmes avec sa tendance bien connue à la surcharge marquerait la volonté délibérée de faire de l'enseignement mathématique un instrument de sélection. Ce que nous refusons non moins délibérément.

5.3 Un aménagement des horaires qui permettrait au maître de donner aux élèves tout le temps d'acquérir les notions fondamentales, aux élèves les plus rapides d'entreprendre des recherches libres, aux élèves momentanément en difficulté de bénéficier du soutien effectif du maître ou des camarades pour rejoindre le peloton.

Remarques

1) Ces aménagements dans les programmes et dans les modalités de l'enseignement devraient permettre, au moins durant toute la scolarité obligatoire, un brassage des élèves déjà réalisé à l'Ecole Elémentaire, favorisant la cohésion du peuple enfantin sans étouffer ses diversités individuelles, et promouvant ainsi, dans la réalité des choses vécues, une certaine démocratisation de l'enseignement.

2) Cette égalité de tous les élèves devant l'enseignement obligatoire rend superflu tout diplôme de fin de scolarité.

3) Il ne faut pas celer que les modestes réformes qui viennent d'être présentées sont fondées sur le désir d'étendre à toute la période de la scolarité certains au moins des fruits de l'action des Ecoles Maternelles. Cela signifie donc que toute mesure qui porterait le moindre préjudice à ces Ecoles devrait, selon nous, mobiliser tous les amis de l'enfant ou de l'Ecole pour l'interdire.

Il est bon enfin de reprendre dans le Bulletin 283 une partie de la page 402 :

L'A.P.M.E.P. a toujours milité en faveur d'une réforme de l'enseignement des mathématiques. Elle s'est opposée à tout retour aux anciens programmes ; ce qui ne signifie nullement qu'elle approuve sans réserves le programme actuel de quatrième dont elle ne porte pas la responsabilité.

L'expérience d'un semestre d'enseignement amène aux constatations suivantes :

— La longueur du programme et son contenu imposent une rupture avec l'enseignement de sixième et cinquième.

— Il n'est pas toujours possible qu'un concept nouveau soit dégagé de l'étude de diverses situations. Il doit être imposé dans un temps trop bref pour que tous les élèves l'assimilent correctement.

— Le clivage traditionnel entre les bons élèves et les autres réapparaît rapidement et l'espérance pédagogique qu'avait soulevée la réforme, et entretenue les deux premières années d'application, se trouve déçue.

Une réforme ? ... Oui. Mais une réforme démocratique, c'est-à-dire des programmes adaptés à tous nos élèves et des maîtres bien formés pour assurer un enseignement efficace.