Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

par G. LETAC

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleurs solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Gérard LETAC
Rubrique des problèmes
I.U.T. de Clermont
B.P. 29
69 — AUBIERE

ENONCES

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 1.7.1972.

** Enoncé nº 19* (P. Jullien, Faculté des Sciences de Grenoble)

Dans le plan euclidien, appelons *forêt* un certain disque fermé de diamètre unité et *arbres* certains points de la forêt. Appelons *route* de largeur h la partie ouverte du plan comprise entre deux droites parallèles à distance h appelées *bords* de la route (les points des bords n'appartiennent pas à la route).

Disons qu'une route *traverse* la forêt lorsque chacun de ses bords a, avec la forêt, une intersection non vide.

Problème : Sachant qu'il y a 100 arbres dans la forêt, quelle est la largeur maximum m, telle qu'on puisse affirmer qu'il existe une route de largeur m, qui traverse la forêt et qui ne contient aucun arbre.

Enoncé n^o^ 20 (M. Dupac, Ecole normale de Limoges)

Démontrer que tout entier positif divise une puissance de 10 ou une différence non nulle de deux puissances de 10.

Enoncé n^o^ 21 (J. Gayheader, Nantucket College)

Résoudre, en nombres rationnels positifs, les équations :

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x^y = xy$$

SOLUTIONS

Enoncé n^o^ 9 (P. Jullien, Faculté des Sciences de Grenoble)

Les 52 cartes d'un jeu sont réparties en 13 tas de 4 cartes. Montrer qu'il est possible d'extraire une carte de chaque tas, de manière à obtenir 13 cartes de hauteurs différentes.

Solution : (Christine Blanchard, Faculté des Sciences de Marseille)

Ce problème est un cas particulier du lemme des mariages, qui répond à la question suivante : trouver une condition pour que, étant donné un ensemble fini E, un ensemble F, et une application f de E dans P (F), il existe une application injective φ de E dans F telle que, pour tout x dans E, $\varphi(x) \in f(x)$ (pour comprendre le nom du lemme, prendre pour E un ensemble de garçons, pour F un ensemble de filles, pour f(x) l'ensemble des filles de F qui plaisent au garçon x ; le problème est de marier chaque garçon à une fille qui lui plaît. On ne se soucie pas du goût des filles, naturellement !). La réponse fournie par le lemme est que, la condition, évidemment nécessaire, que, quelle que soit la partie A de E, le cardinal de A soit inférieur au cardinal de $\bigcup_{x \in A} f(x)$ est aussi suffisante.

Ce lemme résout le problème 9 : prendre pour E l'ensemble des 13 hauteurs de cartes, par F l'ensemble des 13 paquets de 4 cartes considérés, pour f l'application de E dans P(F) telle que l'image d'une hauteur soit l'ensemble des paquets où cette hauteur est représentée. Il est évident qu'à chaque ensemble de hauteurs correspond ainsi un ensemble de paquets ayant, au moins, le même cardinal. Les nombres 13 et 4 ne jouent aucun rôle fondamental, et pourraient être remplacés par des entiers quelconques : par exemple, étant donné une matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et une disposition quelconque des éléments a_{ij} en un tableau rectangulaire $m \times n$, on peut choisir dans ce tableau un terme dans chaque ligne, de façon que toutes les lignes de la matrice initiale soient représentées.

Indiquons pour finir une démonstration du lemme des mariages par récurrence sur Card E :

Soit P(n) la propriété ; quels que soient l'ensemble de cardinal n, et l'application f de E dans l'ensemble des parties d'un ensemble F telle que, pour toute partie A de E, Card A $\leqslant$ Card $(\bigcup_{x \in A} f(x))$, il existe une application injective φ de E dans F telle que, pour tout x dans E, $\varphi(x) \in f(x)$. P(1) est immédiate.

Supposons P(q) vraie pour $q \leqslant n-1$, et soit E de cardinal n, $n > 1$. Soit f une application de E dans l'ensemble des parties d'un ensemble F, telle que, pour toute partie A de E,

$$\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A} f(x))$$

Soit x_0 un élément quelconque de E. S'il existe un y_0 de $f(x_0)$ tel que

$$\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A} f(x) - \{y_0\})$$

pour toute partie A de $E - \{x_0\}$, alors nous poserons $\varphi(x_0) = y_0$, et achèverons de construire φ en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\bar{E} = E - \{x_0\}$, $\bar{F} = F - \{y_0\}$ et à l'application $\bar{f}$ de $\bar{E}$ dans $P(\bar{F})$, telle que $\overline{f(x)} = f(x) - \{y_0\}$ (pour toute partie B de F, on pose

$B - \{y_0\} = B$ si $y_0 \notin B$, et $C_B\{y_0\}$ si $y_0 \in B$).

Montrons par l'absurde l'existence d'un tel y_0. Supposons que, pour tout y dans $f(x_0)$, il existe une partie A_y de $E - \{x_0\}$ telle que

$$\mathrm{Card}\, A_y > \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A_y} f(x) - \{y\}).$$

Comme on sait que $\mathrm{Card}\, A_y \leqslant \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A_y} f(x))$, on en déduit que

$y \in \bigcup_{x \in A_y} f(x)$, et que

$$\mathrm{Card}\, A_y = \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A_y} f(x))$$

pour tout y dans $f(x_0)$. L'ensemble $A = \bigcup_{y \in f(x_0)} A_y$ est inclus dans $E - \{x_0\}$, donc de cardinal au plus $n-1$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A, F, et la restriction de f à A. Il existe donc une application injective ψ de A dans F telle que, pour tout x dans A, $\psi(x) \in f(x)$. La restriction de ψ à A_y est à valeurs dans $\bigcup_{x \in A_y} f(x)$, et l'égalité ci-dessus, entre cardinaux, marque que c'est une bijection de A_y sur $\bigcup_{x \in A_y} f(x)$. L'application ψ est donc surjective sur $\bigcup_{x \in A} f(x)$, et on a :

$$\mathrm{Card}\, A \geqslant \mathrm{Card}\,(\bigcup_{x \in A} f(x)).$$

Mais nous avons vu que tout y de $f(x_0)$ appartient à $\bigcup_{x \in A_y} f(x)$, donc $\bigcup_{x \in A} f(x)$. Par conséquent,

$$\bigcup_{x \in A} f(x) = \bigcup_{x \in A \cup \{x_0\}} f(x)$$

et on a :

$$\text{Card}\,(A \cup \{x_0\}) = \text{Card}\, A + 1 > \text{Card}\,(\bigcup_{x \in A \cup \{x_0\}} f(x))$$

contrairement à l'hypothèse.

Solution de l'auteur : Ce qui importe est qu'il y a, dans un jeu de 52 cartes, 13 hauteurs comprenant 4 cartes chacune. Plus généralement, nous appelons *jeu (n,p)* un ensemble de n × p cartes contenant n *hauteurs*, disjointes deux à deux et comprenant p cartes chacune. Une *distribution* est une partition du jeu en n *tas* comprenant p cartes chacun. Relativement à une distribution, *une couche* est une partie du jeu comprenant n cartes, dont deux quelconques distinctes n'appartiennent ni à la même hauteur, ni au même tas.

Dans ce langage, il s'agit de prouver qu'à *toute distribution d'un jeu (13,4) on peut associer une couche*. Pour cela nous allons démontrer, *qu'à toute distribution d'un jeu (n,p) il est possible d'associer p couches disjointes deux à deux*. Ce qui implique évidemment l'exactitude de l'énoncé proposé.

Preuve : C'est immédiat pour les jeux (n,1) et les jeux (1,p). Supposons que ce soit vrai pour les jeux (n − 1,p) et les jeux (n,p − 1) et déduisons que c'est vrai pour un jeu (n,p). Soit J un jeu (n,p) et $\mathfrak{D}$ une distribution de J. Prenons arbitrairement une carte c dans un tas T et soit H la hauteur de c. Marquons pour les distinguer les cartes de T—H et échangeons-les provisoirement avec les cartes de H—T. Ainsi nous obtenons une distribution $\mathfrak{D}'$ de J−H, qui est un jeu (n−1,p). Par hypothèse de récurrence, il est possible d'associer à $\mathfrak{D}'$, p couches disjointes deux à deux. Dans J—H il y a au plus (p−1) cartes marquées, donc une au moins des couches obtenues ne contient aucune carte marquée. Soit C' une telle couche. L'ensemble $C' \cup \{c\}$ est alors une couche C associée à $\mathfrak{D}$. Revenons à la situation initiale en remettant les cartes échangées à leurs places de départ et supprimons la couche C. Nous obtenons une distribution $\mathfrak{D}''$ de J−C, qui est un jeu (n,p−1). Par hypothèse de récurrence, il est possible d'associer à $\mathfrak{D}''$ (p−1) couches disjointes deux à deux, qui avec C forment p couches disjointes, deux à deux associées à $\mathfrak{D}$.

Autres solutions de : J. Barbotte (Montpellier) — J. Boutillon (I.P.E.S., le Bourget) et L. Semah (Spéciales A', Bordeaux).

Enoncé n° 11 (R. Prudhomme, Faculté des Sciences de Lille)

Soient $x_1 = 1, x_2, \ldots, x_p$ les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité (p premier > 2) et f(x) un polynome à coefficients entiers. Montrer que $f(x_2) \ldots f(x_p) \equiv 1 \mod p$ si $f(1) \not\equiv 0 \mod p$.

Solution de l'auteur :

1°/ D'une façon générale, considérons des variables formelles X_1, X_2, ..., X_p et soient S_1, S_2, ..., S_p les fonctions symétriques élémentaires des variables formelles X_i.

On a $f(X_1)\, f(X_2) \ldots f(X_p) = g(S_1, S_2, \ldots, S_p)$ (1)

où g est un polynome à p variables à coefficients entiers, car le premier membre est un polynome symétrique des variables X_i à coefficients entiers.

2°/ Particularisons les X_i : supposons que les X_i sont les solutions de $X^p - 1 = 0$.

Donc $X_1 = x_1 = 1$, $X_2 = x_2$, ..., $X_p = x_p$,

$S_1 = \Sigma x_i = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_{p-1} = 0$, $S_p = \Pi x_i = 1$ (S_p vaut 1 car p est impair) et (1) s'écrit :

$$f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_p) = g(0, 0, \ldots, 0, 1) \quad (2)$$

3°/ Particularisons les X_i : supposons que les X_i sont des solutions de $(X-1)^p = 0$.

Donc $X_1 = X_2 = \ldots = X_p = 1$ et

$$S_1 = p\ ,\ S_2 = C_p^2 \ldots\ ,\ S_{p-1} = p\ ,\ S_p = 1$$

et (1)s'écrit :

$$f^p(1) = g(p, C_p^2, \ldots, p, 1). \quad (3)$$

Or $C_p^k \equiv 0 \mod p$ si $0 < k < p$ puisque p est premier. Puisque g est à coefficients entiers, on a :

$$g(p\ , C_p^2\ , \ldots\ , p\ , 1) \equiv g(0,\ 0, \ldots\ ,\ 0, 1) \mod p.$$

En comparant (2) et (3) on obtient :

$$f^p(1) \equiv f(1)\, f(x_2) \ldots f(x_p).$$

Comme $f(1) \not\equiv 0 \mod p$ et que $f^{p-1}(1) \equiv 1 \mod p$ d'après le théorème de Fermat, on a le résultat.

Autres solutions de : Christiane Blanchard, Claude Broca (Nice), R. Guillotin, L. Semah.

Claude Broca généralise l'énoncé à $f(x_2) \ldots f(x_q) \equiv f^{q-1}(1) \mod p$, où $1, x_2, \ldots x_q$ sont les racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité et q est une puissance de p.