Réflexions sur les "mathématiques modernes" (1)

par J. BASS (Université de Paris VI)

Tout le monde parle des mathématiques modernes : professeurs, élèves, parents, utilisateurs, journalistes, ... Tout le monde, sauf peut-être les mathématiciens. Existe-t-il donc vraiment des mathématiques modernes, qui soient différentes des mathématiques anciennes ? C'est ce que je vais essayer d'éclaircir, sans cependant le moindre espoir d'arriver à une lumière définitive.

Les mathématiciens sont bien obligés de s'occuper de mathématiques contemporaines. Ils travaillent sur ce qui est le plus récent. Cela ne veut pas dire qu'il rejettent les mathématiques lorsqu'elles sont âgées de plus de 20 ans. Certains résultats, vieux de 100 ou 150 ans, restent toujours utiles. Le fond est solide. Seule, l'expression a pu être un peu remaniée pour satisfaire à certaines exigences modernes.

Quand on parle de mathématiques modernes, on pense donc plutôt à l'enseignement, c'est-à-dire aux sujets qu'on va enseigner et à la manière dont on les enseignera. C'est un fait qu'on a introduit dans l'enseignement secondaire, et même primaire, des questions qui n'y figuraient pas il y a 30 ans. C'est aussi un fait qu'on a modifié la présentation des questions plus classiques.

---

(1) Texte d'une conférence faite au centre culturel français de LOME (TOGO), pendant une mission d'enseignement de l'auteur à l'Ecole des Sciences de l'Université du Bénin.
Le partage de gâteaux en tranches et l'expérience sur le courant électrique ont été matériellement présentés à l'auditoire pendant la conférence.

Que les sujets introduits soient "modernes", cela n'est pas toujours exact. Certains étaient déjà connus à la fin du 19ème siècle. Mais ils ont assez brusquement acquis une importance inattendue, tant par le rôle qu'ils jouent pour façonner l'intelligence des enfants, que par les applications nouvelles qu'ils ont parfois reçues dans le domaine des sciences physiques et des techniques. Il est donc naturel qu'ils se soient introduits dans les programmes de l'enseignement. La seule question qui n'est pas réglée, et elle est grave, c'est de savoir jusqu'où il faut aller dans la voie du "modernisme".

Il conduit à des idées générales. Mais une idée générale est stérile lorsqu'on ne l'applique pas à de nombreux cas particuliers. Or, savoir appliquer n'a rien d'intuitif, et il est à craindre que, par une sorte de point d'honneur, et peut-être aussi par manque d'expérience, certains professeurs ne le fassent pas assez. D'autre part, si l'on ajoute des matières nouvelles, il faut bien en retrancher parmi les anciennes. On risque ainsi de supprimer des programmes des questions utiles, au profit des questions qui ne le sont pas plus.

On craint, par exemple, que les élèves formés aux mathématiques nouvelles ne sachent plus calculer, et ne connaissent plus la géométrie, qui pourtant est une science toujours valable. On a même redouté que les élèves de l'Ecole Elémentaire ne sachent plus la table de multiplication. Or elle n'est pas devenue totalement inutile, même si les épiciers font leurs opérations à l'aide de machines à calculer. N'oublions pas enfin que, entre le raisonnement mathématique et la réalité, il y a un monde. La vie courante ne repose pas sur la logique, et rien n'est plus dangereux que de vouloir diriger les actions humaines par le raisonnement pur.

Qu'il y ait une certaine exagération dans la présentation actuelle des mathématiques semble donc évident. Mais l'utilité de nouvelles notions et de nouvelles présentations n'en est pas moins réelle. Je vais le montrer par quelques exemples ; après quoi j'essaierai de faire le bilan.

Commençons par l'étude des fractions. Que signifie la fraction $\frac{3}{5}$? Les explications qu'on donnait autrefois sont assez confuses. On divise le tout en 5 parties, et on en prend 3 (cela n'aide pas à comprendre la fraction $\frac{7}{5}$, qui compte plus de parts qu'il n'y en a dans le tout !). Mais que veut-on dire lorsqu'on parle de fractions égles ($\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{10}$), et cependant non identiques ? On pense évidemment à une propriété commune à ces fractions, et on a tendance à confondre la notion de fraction et celle de "propriété commune à toutes les fractions égales", c'est-à-dire de nombre rationnel.

L'expliquer en langage mathématique aux jeunes débutants serait certainement prématuré. On se contentera de faire comprendre qu'il y a plusieurs idées utiles dans la notion de fraction : l'une est celle de division d'un gâteau (ou d'un ensemble) en un certain nombre, par exemple 5, de parts (dénominateur), suivie du choix d'un certain nombre de ces parts (3) ; l'autre est celle de la quantité de gâteau contenue dans les parts choisies. Elle est la même pour 3 parts sur 5, ou pour 6 parts sur 10.

A partir d'un certain niveau (fin des études secondaires), il est normal de mathématiser tout cela. Le rôle des mathématiques est de placer la notion de fraction dans un cadre précis, en y adaptant des théories générales. Les fractions apparaissent donc comme une réalisation de certaines structures générales et simples. On doit dissocier l'idée mathématique de structure, et sa traduction pour un problème particulier, dont la nature peut être très diverse : mathématique, physique, pratique. On évite donc de mélanger les notions logiques et les notions appliquées.

Si l'on veut une comparaison, supposons qu'on se propose d'expliquer à un enfant ce que c'est qu'un poste de radio. Au plus jeune, on montrera un poste et on lui apprendra à s'en servir. Plus tard, quand il en sera capable, on lui expliquera le principe commun à tous les postes de radio (éléments d'électricité, d'électronique, de physique des ondes). On lui fera une classification des différents types de postes, et il apprendra à chercher, derrière l'aspect particulier de chaque poste, les principes suivant lesquels il est construit. Cela ne lui sera pas inutile en cas de panne !

Dans le cas de l'exemple choisi, on appelle à priori *fraction* un couple de deux entiers (x, y), qu'on écrit généralement $\frac{x}{y}$; on pose, sans justification, que deux fractions $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont *équivalentes* (et non égales) si $xy' = x'y$. La propriété d'équivalence est réflexive et une fraction est évidemment équivalente à elle-même. On forme ensuite la classe des fractions équivalentes à l'une d'entre elles et on vérifie que deux fractions de cette classe sont équivalentes entre elles.

Cette classe est un cas particulier d'une structure mathématique générale, celle des *classes d'équivalence*. On définit d'une façon générale une relation d'équivalence, reliant les couples d'éléments d'un ensemble abstrait E. Cette relation a les trois propriétés attribuées aux fractions équivalentes : si a et b sont "équivalents", b et a le sont ; a est équivalent à a ; si a est équivalent à b, et b équivalent à c, alors a est équivalent à c. Enfin on associe à tout élément a la "classe d'équivalence" des éléments de E qui sont équivalents à a. Cette classe est un ensemble d'éléments ayant en commun une même propriété.

Quelle est cette propriété dans le cas spécial des fractions ? Qu'y a-t-il de commun entre les $\frac{3}{5}$ d'un gâteau et les $\frac{6}{10}$ de ce même gâteau ?

C'est la quantité de gâteau qui s'y trouve contenue. Dans un cas, on mange une part, dans l'autre deux parts, mais on a toujours mangé autant de gâteau. Seule, l'opération de partage n'est pas la même. Cette propriété commune à toutes les fractions d'une même classe s'appelle un *rationnel ;* il n'est pas possible de définir un rationnel, d'une façon claire, par d'autres procédés que celui-là. Car, si certains rationnels s'écrivent bien : les décimaux, représentants d'une classe de fractions dont l'un des représentants a pour dénominateur 10, ou 100, ou 1000, ... — exemple : $\frac{3}{5}$, équivalente à $\frac{6}{10}$ qu'on écrit aussi 0,6 —, d'autres sont plus gênants à caractériser : exemple : le rationnel caractéristique de la classe associée à $\frac{5}{6}$; il n'y a pas de représentation décimale précise, finie : $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ ...$

Bien entendu, pour utiliser l'idée de rationnel, il ne suffit pas de se limiter aux classes d'équivalence de fractions. Il faut *définir* sur les fractions, d'une façon purement théorique, des opérations d'addition, de multiplication et de division. Mais on s'aperçoit que ces opérations présentent certaines difficultés, et ne sont utilisables que si l'on se donne le droit de remplacer des fractions par d'autres fractions équivalentes. Ce sont donc en réalité des opérations sur les classes de fractions, c'est-à-dire sur les rationnels. On sait définir la somme de deux rationnels, le produit de deux rationnels. On connaît le rationnel 0 (classe des fractions $\frac{0}{y}$) et le rationnel 1 (classe des fractions $\frac{x}{x}$). Cela permet de doter l'ensemble des rationnels d'une structure d'anneau, et même de corps, et c'est de cette façon que se présente en mathématiques l'intérêt véritable de la notion de fraction.

Il faut *ensuite* expliquer le rapport de ces opérations avec les problèmes pratiques, de telle sorte que l'élève ne dise pas au hasard, lorsqu'il doit résoudre un problème : "il faut multiplier", ou bien "il faut additionner", mais que les règles théoriques soient pour lui un guide sûr, un mode d'emploi garanti.

Alors seulement apparaît la notion d'approximation des rationnels non décimaux, qui contient déjà une idée de limite, et sort du cadre purement algébrique.

Signalons que la notion abstraite de relation d'équivalence se rencontre partout en mathématiques. En voici des exemples qui n'ont rien à voir avec les fractions :

— l'égalité des triangles : les triangles "égaux" constituent une même classe, dont la propriété commune est l'égalité des *dimensions*.

— la similitude des triangles : la propriété commune des triangles d'une même classe est qu'ils ont la même *forme*.

— le parallélisme des droites : les droites d'une même classe ont la même *direction*.

— le fait pour deux entiers d'avoir pour différence un entier pair ; on divise ainsi les entiers en deux classes, caractérisées par leur *parité* : les entiers pairs et les entiers impairs.

— *l'orientation* des figures dans l'espace : si l'on s'intéresse par exemple aux vis, il y en a deux sortes : les vis à droite et les vis à gauche ; on ne retient pas les autres propriétés de formes et de dimensions des vis.

De même, dans l'ensemble des mains, on distingue deux classes, les mains gauches et les mains droites. Cette distinction, qui retient une propriété bien connue, mais assez délicate du point de vue mathématique, a bien entendu de nombreuses applications dans la vie courante.

Passons à un autre exemple, qui montrera combien les mathématiques dites "modernes" ont bousculé certaines traditions. Il s'agit de savoir si $1 + 1 = 2$. Entendons-nous. La notion de naturel est une notion très claire, et, avec les naturels, on a bien $1 + 1 = 2$. Mais la notion d'addition (et celle de multiplication) sont à priori définies par des propriétés générales. Elles concernent des ensembles abstraits E dans lesquels il y a bien :

— un élément appelé 0 et une opération appelée addition, tels que $0 + x = x$.

— un élément appelé 1 et une opération appelée multiplication, tels que $1 \times x = x$.

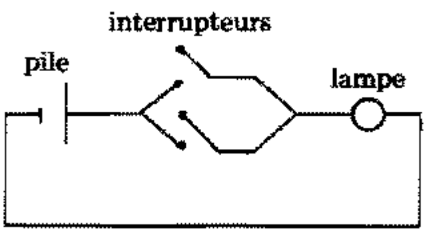
Les mathématiciens ont jugé nécessaire de soumettre ces opérations à un certain nombre de règles. Mais leur structure, tout en étant indépendante de la nature de l'ensemble E, conduit, dans chaque cas particulier, à des circonstances différentes, qui, elles, dépendent des particularités de l'ensemble. Nous allons le montrer sur des exemples. Ces exemples auront un intérêt nouveau. Ils feront comprendre comment, grâce à la notion de structure algébrique, les mathématiques peuvent avoir un caractère *qualitatif*, et non plus quantitatif. Or le qualitatif est utile dans la pratique. Même en physique, il joue un grand rôle. Obtenir une loi quantitative et la représenter par un formalisme mathématique, mesurer une grandeur et comparer sa valeur avec une valeur calculée, cela reste fondamental, mais ce n'est pas tout. Il est souvent bien intéressant de répondre à des questions du genre de celles-ci : se passe-t-il quelque chose ou rien ? La déviation espérée aura-t-elle lieu vers la droite ou vers la gauche ? Cela est bien connu dans certains phénomènes (polarisation de la lumière, circulation de l'atmosphère, piézo-électricité, ...). Examinons un exemple concret :

Dans la réalisation d'un réseau de distribution électrique, il faut évidemment calculer l'énergie qui sera fournie à chaque abonné, c'est-à-dire, sous une tension donnée, l'intensité du courant qu'il reçoit. Mais d'abord, il faut qu'il puisse recevoir du courant, ou couper le courant.

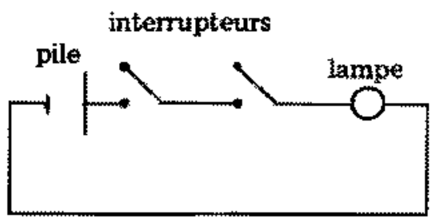
Que le courant passe ou ne passe pas est la première des choses qu'il est essentiel de constater, et cela suffit dans bien des applications. Par exemple, dans certains compteurs, le passage du courant compte pour 1 ; son absence pour 0. Chaque passage de courant fait avancer le compteur par sauts brusques. On voit apparaître ici un point de vue qualitatif, que je vais discuter dans un cas très simple : une pile produit du courant, qui passe à travers deux interrupteurs et une lampe. Nous voulons savoir, suivant la position des interrupteurs, si la lampe s'allume. Associons le symbole 0 à la situation :

l'interrupteur est ouvert (aucun courant ne peut le traverser)
et le symbole I à la situation
l'interrupteur est fermé (un courant peut le traverser)

Considérons les deux schémas ci-dessous :



1 — Interrupteurs en dérivation



2 — Interrupteurs en série

La lampe nous permet d'observer ce qui se passe, suivant que les interrupteurs sont ouverts ou fermés. Remplaçons le circuit qui contient les deux interrupteurs par un fil unique, dans lequel nous plaçons un seul interrupteur. Quelle doit être la "situation" de cet interrupteur (ouvert ou fermé) pour que le circuit ainsi modifié donne le même résultat dans la lampe (allumée ou éteinte) ?

Schéma 1. (Interrupteurs en dérivation)

0 et 0 équivaut à 0 (deux interrupteurs ouverts. Le courant ne passe pas).

0 et I, ou I et 0 équivaut à 0 (un interrupteur ouvert, un fermé. Le courant passe).

I et I équivaut à I (les deux interrupteurs fermés. Le courant passe)

Schéma 2. (Interrupteurs en série)

0 et 0 équivaut à 0 (deux interrupteurs ouverts. Le courant ne passe pas)

0 et I, ou I et 0 équivaut à 0 (un interrupteur ouvert, un interrupteur fermé. Le courant ne passe pas)

I et I équivaut à I (les deux interrupteurs fermés. Le courant passe).

Traitons 0 comme "zéro" et I comme un symbole d'unité. Alors les résultats du schéma (2) évoquent la multiplication habituelle :

$0 \times 0 = 0$

$0 \times I = I \times 0 = 0$

$I \times I = I$

Ceux du schéma (1) évoquent plutôt l'addition :

$0 + 0 = 0$

$0 + I = I + 0 = I$

$I + I = I$

Il n'y a dans tout cela aucune incompatibilité. Il est naturel de définir 0 et I par les propriétés suivantes :

0 est le "nombre" qui, *ajouté* à tout nombre x, donne x comme résultat.

I est le "nombre" qui, *multiplié* par tout nombre x, donne x comme résultat.

Ici, l'ensemble des nombres utilisés ne comporte que deux éléments, qui sont 0 et I. Ils constituent respectivement l'élément neutre pour l'addition et l'élément neutre pour la multiplication. Les opérations ci-dessus sont la table d'addition et la table de multiplication de cet ensemble. Or, dans les axiomes de l'addition, on constate qu'il n'y a aucune raison de choisir *à priori* le résultat de l'addition 1 + 1. L'élément neutre pour la multiplication n'a pas de propriétés additives obligées. Cependant, puisque l'ensemble considéré ne possède que deux éléments, on ne peut avoir que 1 + 1 = 1 ou 1 + 1 = 0.

Pour l'application à l'électricité, on est conduit à choisir 1 + 1 = 1.

On écrit, généralement, ces tables d'addition et de multiplication de la façon suivante :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

multiplication

+	0	1
0	0	1
1	1	1

addition

Ces tables permettent de prévoir si un certain courant passe ou ne passe pas. Elles n'ont pas pour objectif de nous renseigner sur l'intensité de ce courant. On peut bien entendu généraliser ces procédés pour l'étude de circuits électriques compliqués. Les règles d'addition et de multiplication qu'on obtient constituent une "algèbre" particulière, appelée algèbre de Boole, et différente de l'algèbre ordinaire des nombres entiers dans laquelle on sait que 1 + 1 n'est pas égal à 1 (unité + unité = ?).

Nous avons remarqué que, si un ensemble n'a que deux éléments 0 et 1, et si on veut y placer une addition et une multiplication, il est normal que ces tables d'addition et de multiplication aient la forme suivante :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

multiplication

+	0	1
0	0	1
1	1	?

addition

Seule la somme $1 + 1$ n'est pas imposée par les propriétés naturelles des nombres 0 et 1. Dans l'exemple précédent, on avait $1 + 1 = 1$.

Voici un exemple où $1 + 1 = 0$:

L'ensemble des entiers est bien connu ; conformément à un exemple déjà signalé plus haut, ne distinguons dans un nombre x que sa parité : x est pair, ou x est impair. A tout entier pair, associons le symbole 0, qui est un excellent représentant de la classe des entiers pairs. A tout entier impair, associons de même le nombre 1. Puis, dans les opérations d'addition et de multiplication, remplaçons le résultat par le représentant de sa classe : 0 si le résultat est pair, 1 s'il est impair. Voici les tables que nous obtenons :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

multiplication

+	0	1
0	0	1
1	1	0

addition

Cela signifie par exemple que :

entier pair × entier impair = entier pair ($6 \times 3 = 18$)

entier pair + entier impair = entier impair ($6 + 3 = 9$)

etc...

Nous avons donc là une représentation arithmétique simple d'une algèbre (à deux éléments) dans laquelle :

$$1 + 1 = 0.$$

L'électricité nous avait fourni une algèbre analogue, sauf que l'on avait :

$$1 + 1 = 1.$$

Tout cela est aussi *vrai* et aussi *utile* que l'algèbre usuelle des entiers, où :

$$1 + 1 = 2.$$

C'est seulement un peu plus facile à manipuler, parce qu'il n'y a que deux éléments au lieu d'une infinité.

Notons en passant que, à ces idées, se rattache la notion de systèmes de numération. Diverses applications techniques, en particulier les machines à calculer, utilisent le système binaire. Ce système ne serait pas commode pour la vie courante (où le système de base douze serait d'ailleurs un peu plus simple que le système usuel de base dix). Cependant, la table de multiplication en base deux serait nettement plus facile à apprendre à l'Ecole Elémentaire. Voici les deux tables comparées :

×	0	1
0	0	0
1	0	1

multiplication en base deux

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

multiplication en base dix

Il est vrai que, dans la table de multiplication en base dix, on écrit inutilement deux fois presque tous les nombres, puisque la multiplication est commutative ($7 \times 5 = 5 \times 7$). Mais cela ne change pas l'intérêt de la confrontation.

Comme dernier exemple de l'esprit moderne des mathématiques, revenons à la géométrie, et même à la topologie, tout en conservant un certain contact avec l'algèbre. Et, comme modèle d'application, faisons de la géographie.

Que demande-t-on à une carte de géographie ? Compte tenu de son échelle, elle doit nous donner des renseignements sur le pays qu'elle représente. Or elle ne peut pas tout dire. Si son dessin nous renseigne sur la nature des côtes (droites ou découpées), il ne nous indique rien de tangible sur le relief ni sur la population des villes. D'où la nécessité de compléter la carte proprement dite par des explications écrites surimprimées, et aussi, pour éviter l'encombrement, de spécialiser les cartes : cartes physiques, politiques, climatologiques, économiques (agriculture ou industrie). Limitons-nous, pour fixer les idées, à une carte politique, montrant les côtes, les grands cours d'eau, les frontières des états, les villes principales, et donnant peut-être quelques indications sommaires de relief. Cette carte, nous lui demandons beaucoup. Par exemple, combien y-a-t-il de kilomètres de Lomé à Dakar, soir par les routes existantes, soit par mer, soir par avion ? Le Dahomey est-il plus grand que le Togo, soit en superficie, soit en longueur ? Quelle est la ville côtière d'Algérie qui est exactement au nord de Lomé ? Quel cap le pilote du DC 8 choisit-il pour aller de Niamey à Cotonou ? Quand on remonte le Niger à partir de Niamey, rencontre-t-on d'abord Gao ou Bamako ? Le Togo a-t-il une frontière commune avec le Niger ? etc... etc...

On demande beaucoup, et on a l'impression que ces questions sont de qualité bien inégale, et mériteraient d'être classées avec soin. Il est d'ailleurs clair qu'une carte peut être "*fausse*" sur certains points et parfaitement *utilisable* pour d'autres. Tout le monde sait par exemple qu'on ne peut pas représenter "exactement" la totalité de la surface terrestre sur une feuille de papier. Les cartes de Mercator usuelles représentent bien les zones tropicales. Elles sont à peu près "exactes" pour des territoires n'excédant pas 1 000 km^2 environ. Elles permettent d'y déterminer des directions "exactes". Mais elles exigent de grandes précautions pour comparer la distance de Lomé à Dakar à celle d'Oslo à Moscou, ou pour évaluer la distance de Lomé à Londres.

Là aussi, les idées qui se trouvent à la base des mathématiques actuelles nous aident à *classer* et à *choisir*. Pour dessiner une carte, nous devons choisir ce qui nous intéresse, et nous laissons forcément beaucoup d'indications de côté. Il suffit que la carte contienne une certaine information (sans quoi ce n'est plus une carte, mais un dessin sans valeur).

Pour notre carte politique, nous retiendrons d'abord la nécessité de préciser les frontières. En suivant la frontière de chaque pays, il faut pouvoir dire quels sont, dans l'ordre, les pays limitrophes. Si nous dessinons aussi les grands fleuves et les villes, nous voulons que les rivières de la carte ne se rencontrent que si elles le font dans la nature (il ne faut pas que le Niger et le Sénégal se coupent), et que Gao soit bien, sur le Niger, *entre* Bamako et Niamey.

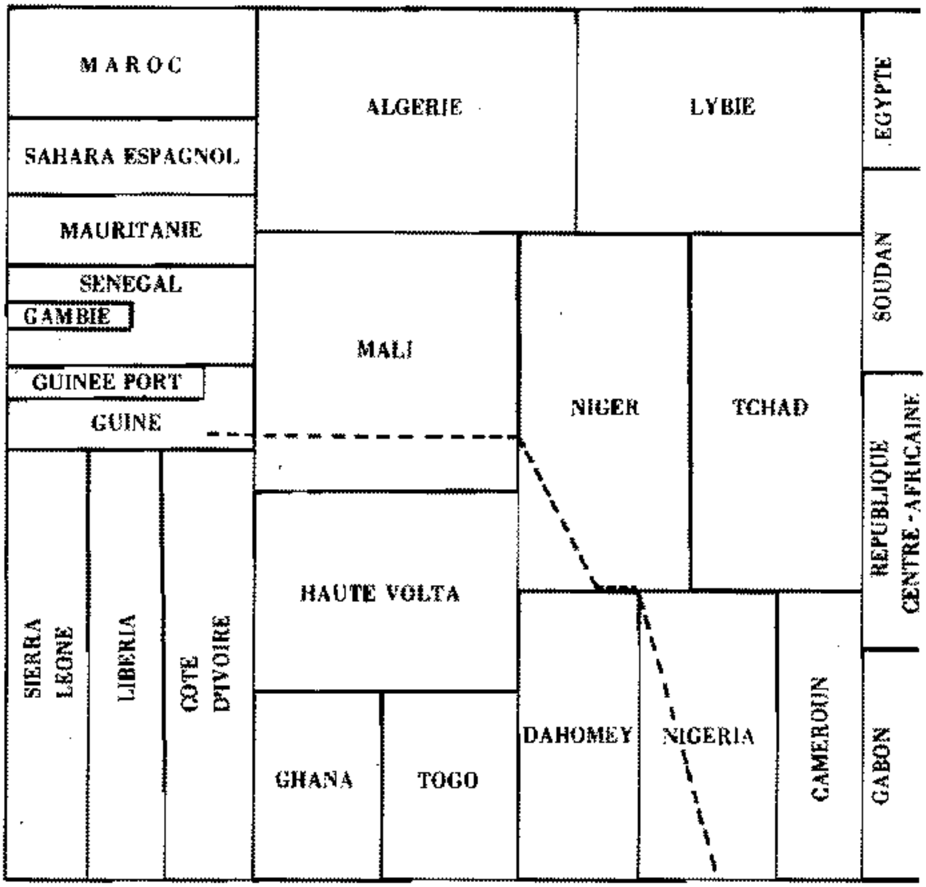
Mais nous ne nous préoccuperons pas du tout pour le moment de respecter les formes véritables et les distances relatives.

Voici un essai de réalisation de carte politique de l'Afrique occidentale, conforme à ces données. (1)

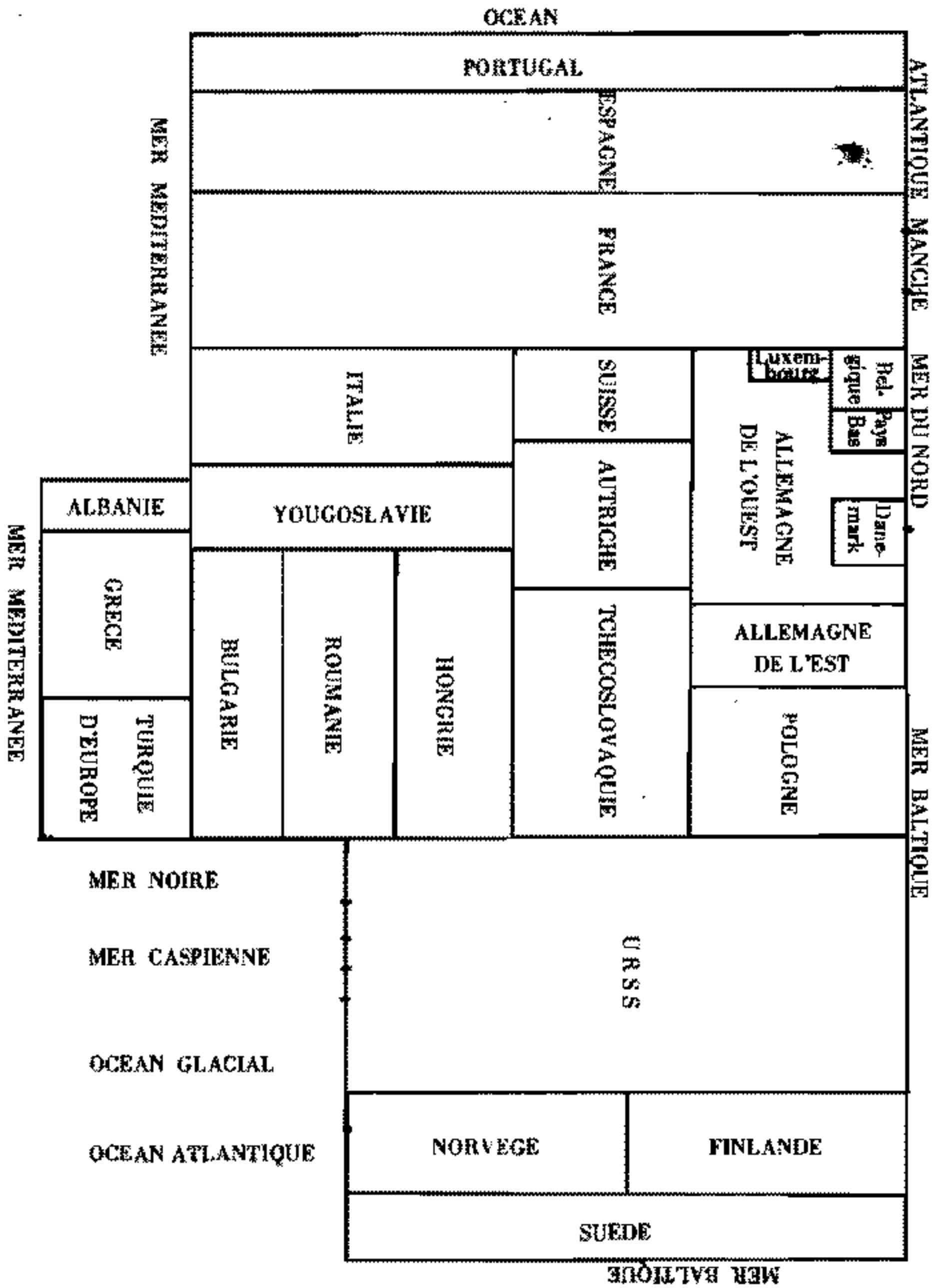
---

(1) Cette carte était adaptée à un auditoire africain. Pour les lecteurs européens, il a semblé opportun de la compléter par une carte d'Europe, dessinée suivant les mêmes principes.

AFRIQUE OCCIDENTALE



Ces cartes, qui choquent parfois les géographes, sont cependant fort utiles. Elles nous montrent, bien plus clairement que les cartes usuelles, l'articulation politique de l'Afrique occidentale et de l'Europe. Des cartes reposant sur ce principe sont d'ailleurs utilisées en pratique. Celle du réseau du métro de Londres est de ce type. Son seul inconvénient, c'est qu'elle ne permet pas de trouver son chemin en ville, quand on sort du métro. Au contraire, celle du métro de Paris est surimprimée sur un plan traditionnel de la ville de Paris. Pour le voyageur qui prend le métro, elle n'est cependant pas plus pratique. D'ailleurs, dans chaque voiture du métro parisien, il y a une petite carte particulière de la ligne, qui indique les noms des stations dans leur ordre, mais ne fait pas du tout connaître au voyageur les autres aspects de l'itinéraire qu'il suit, par exemple si les stations sont rapprochées ou éloignées entre elles.


OCEAN
ATLANTIQUE
MANCHE
MER DU NORD
MER BALTIQUE
MER MEDITERRANEE
MER MEDITERRANEE
PORTUGAL
ESPAGNE
FRANCE
ITALIE
SUISSE
Luxembourg
Belgique
Pays Bas
ALLEMAGNE DE L'OUEST
Danemark
AUTRICHE
ALBANIE
YOUGOSLAVIE
GRECE
TURQUIE D'EUROPE
BULGARIE
ROUMANIE
HONGRIE
TCHECOSLOVAQUIE
ALLEMAGNE DE L'EST
POLOGNE
MER NOIRE
MER CASPIENNE
OCEAN GLACIAL
OCEAN ATLANTIQUE
URSS
NORVEGE
FINLANDE
SUEDE
MER BALTIQUE

Nous dirons que la carte ainsi dessinée satisfait aux règles de la *topologie générale.* On y respecte ce qui concerne l'ordre et la continuité, et rien de plus. Si on dessinait sur une feuille de caoutchouc, elle conserverait toute sa valeur lorsqu'on déformerait le support.

Si l'on veut d'autres détails, on complique la carte. Si elle ne représente pas une portion trop étendue de la terre, il est usuel de s'arranger pour que (à échelle réduite) elle nous renseigne sur les distances et les directions. Aux propriétés de continuité, nous ajoutons des exigences de nature métrique. Cette opération, usuelle en mathématiques pures, consiste à revêtir un ensemble ayant déjà une structure topologique d'une structure métrique. Sur un ensemble bien peu caractérisé, nous avons d'abord mis une "strcuture topologique", utile mais imprécise à certains points de vue. La structure métrique, qui doit être nécessairement compatible avec la structure topologique, nous apporte donc des renseignements plus complets, sinon plus exacts. Notons cependant que les géographes, s'ils n'aiment pas les cartes purement topologiques, admettent cependant très facilement des cartes très "déformées" (par exemple certains planisphères bizarres) qui contiennent des renseignements de nature intermédiaire entre ceux de la topologie générale et ceux de la topologie métrique. Ils acceptent que le fleuve soit "mal représenté", à condition que cela ait un certain caractère systématique et que, s'il fait des méandres ou des boucles, ces méandres ou ces boucles figurent sur la carte. Cela correspond à des types de "représentations" de la terre sur la feuille de papier, plus strictes que les simples transformations topologiques, (qu'on appelle des homéomorphies), mais moins complètes que celles qui conservent les distances (on les appelle des isométries, au changement d'échelle près). Encore faut-il se méfier de ce qu'on appelle une distance. Pour l'utilisateur, ce n'est pas nécessairement la distance "en ligne droite" qui compte. Les distances à parcourir ne sont pas les mêmes en saison sèche et en période de pluie, en avion ou par la route. On pourrait s'amuser à dessiner une carte sur laquelle, autant que possible, la distance en ligne droite de deux villes (en centimètres), serait proportionnelle à la distance réelle (en kilomètres) de ces deux villes par la route la plus courte qui les joint. Cela donnerait une carte très intéressante, mais assez déconcertante, surtout dans les régions montagneuses.

Ces idées sont bien connues des mathématiciens. On sait que, sur un ensemble donné, il est généralement possible de donner plusieurs définitions distinctes de la distance de deux points, ayant leurs avantages et leurs insuffisances propres. Les idées abstraites sur la notion de distance ne sont donc pas essentiellement différentes des idées pratiques. Seule leur présentation revêt une forme spéciale, parfois difficile à comprendre pour le non-initié.

De l'étude de ces exemples, nous pouvons maintenant dégager des idées et des conclusions. Dans les mathématiques modernes, il y a du moderne et du moins moderne. Ce qui est vraiment moderne, c'est la prise de conscience que le champ d'application des mathématiques est bien plus vaste qu'on ne le pensait il y a 30 ans. En plus de leur rôle quantitatif, les mathématiques s'intéressent à des questions qualitatives : relations, ordres, continuité. Il fallait bien codifier ces questions : c'est le rôle de ce qu'on appelle les structures mathématiques. L'enseignement des principes qui les régissent est devenu une nécessité. C'est ce qui a motivé l'introduction dans les programmes de la théorie des ensembles, des structures algébriques, des éléments de logique,...

Ce type d'enseignement ouvre des horizons, corrige des erreurs, permet des applications nouvelles, et donne au raisonnement mathématique un support plus solide. Pour toutes ces raisons, il est utile.

Mais je ne voudrais pas terminer sans signaler qu'il présente aussi des dangers, et qu'il ne doit pas dépasser certaines limites. Il ne faut pas commencer trop tôt. Il faut savoir doser, à chaque stade de l'enseignement, ce qu'il est raisonnable de "motiver" et ce qu'il faut affirmer sans le justifier. On peut, si on en a le temps, exposer la théorie des fractions et des rationnels dans les classes terminales de lycée. On ne doit pas le faire à l'Ecole Elémentaire, où il faut se contenter de notions intuitives et pratiques. De même, les propriétés mathématiques de la ligne droite doivent résulter de considérations expérimentales. Dans un cours de débutants, il est prématuré de les présenter sous forme axiomatique. Il suffit de les cataloguer avec soin et honnêteté, et, une fois ce travail fait, d'en tirer les conséquences logiques.

Enfin, il faut choisir, et ne pas systématiquement négliger l'ancien au profit du moderne. Il faut que ce choix soit fait suivant des critères suffisamment larges. Habituer les enfants au raisonnement abstrait n'est pas inutile. Mais il n'est pas du tout sûr que tous les enfants soient également ouverts à assimiler la logique pure. Certains ont un esprit plus dirigé vers la pratique, et même certains n'ont pas du tout l'esprit scientifique. Quoi qu'il en soit, il est indispensable que les idées générales qu'on essaie de leur faire absorber soient susceptibles d'applications, soit à des cas particuliers, soit à des problèmes physiques, et que ces applications soient traitées. Les signaler n'est pas suffisant et l'art d'appliquer une théorie abstraite devrait être enseigné.

Tout cela exige donc de la part des professeurs un long travail d'adaptation et de compréhension, et une révision complète des méthodes d'enseignement. Les difficultés et incertitudes de l'heure actuelle montrent que ce travail n'est pas encore terminé.