A propos des nouveaux programmes de mathématiques

Daniel LEHMANN (Lille)

Les anciens programmes, commentaires et manuels de mathématiques, en 1er cycle, ne nous satisfaisaient pas ; nos avis sur les nouveaux sont partagés. Conscients cependant du désarroi de beaucoup de maîtres, qui ont à enseigner ces programmes, qu'ils les aient assimilés ou non, qu'ils les apprécient ou non, nous nous sommes interrogés sur la meilleure façon de les aider. Il nous a semblé que les recettes de détail que nous pourrions conseiller sur telle ou telle rubrique se rattachaient finalement à quelques principes très généraux et très simples, et qu'il serait probablement plus profitable d'énoncer ces principes (quitte à voir comment les appliquer sur quelques exemples), plutôt que de rédiger des contre-commentaires trop techniques et qui risqueraient au surplus de laisser aussi peu d'initiative aux maîtres que les commentaires officiels. Nous souhaiterions au contraire, qu'à l'aide de ces quelques principes, les maîtres puissent se forger *eux-mêmes* une opinion sur les différentes façons d'aborder telle ou telle rubrique du programme, sur l'importance relative de ces rubriques et le choix de celles sur lesquelles il faut éventuellement passer plus rapidement, sur la valeur enfin de tel ou tel manuel.

I Le premier principe à respecter, les maîtres le connaissent aussi bien que nous : c'est de faire en sorte *que le plus grand nombre possible d'élèves puissent suivre* jusqu'à la fin de l'année. Il ne serait pas "normal" en effet, qu'il n'y en ait qu'un quart ou un tiers. L'application de ce principe implique, bien entendu, un rythme de progression suffisamment lent ; et ceci risque de paraître contradictoire avec la nécessité de terminer le programme.

Il n'est pas absolument certain qu'il en soit ainsi, si l'on s'en tient à la lettre du programme (qui a seul valeur réglementaire), en négligeant un certain nombre des "broderies" suggérées par les commentaires, et qui n'ont rien d'obligatoire.

En ce qui concerne par exemple la géométrie plane de quatrième, le programme n'oblige pas à démontrer tous les résultats autres que ceux admis en axiomes : on peut parfaitement en admettre certains (ce qui n'a rien de malhonnête, pourvu qu'on le dise clairement), et d'ailleurs le nombre des théorèmes qui figurent explicitement au programme est des plus réduits. Quant à faire comprendre *pratiquement* aux élèves ce que sont des droites parallèles, une projection, une symétrie centrale, un parallélogramme propre ou aplati, ..., il n'est pas besoin pour cela de longs discours ni d'échafaudages axiomatiques. Nous discuterons plus loin de l'opportunité de cette axiomatique, ainsi que de la façon de choisir entre les résultats que l'on démontre et ceux que l'on admet. Mais indépendamment des critères d'ordre scientifique et pédagogique que nous donnerons alors, il va de soi que le temps global dont dispose le maître est l'un des premiers facteurs qu'il doit prendre en considération.

Si malgré tout, le programme — même réduit au strict minimum — s'avérait quand même trop long pour être terminé, à moins de lâcher en cours de route une proportion importante d'élèves, il faudrait alors ne pas le terminer. L'argument qui consiste à faire croire qu'il est indispensable de terminer le programme pour que les élèves puissent suivre dans la classe ultérieure est faux pour plusieurs raisons :

— dans bien des cas, le professeur de la classe ultérieure pourra reprendre les points non étudiés ;
— éliminer froidement 60 à 80% des élèves n'est certainement pas une solution démocratique, surtout quand on sait que ces élèves auraient pu suivre dans d'autres conditions.

Si les programmes sont trop longs ou mal conçus, ce n'est pas la faute des maîtres. On voudrait les pousser à pratiquer une sélection outrancière en leur faisant croire qu'ils seront responsables de l'échec ultérieur de leurs élèves s'ils ne la font pas. C'est un véritable chantage, auquel les professeurs ne se laisseront pas prendre, car ils sont trop consciencieux pour oublier qu'ils sont au service de toute leur classe, et non d'une petite élite privilégiée.

II Le second principe, dont découleront presque tous les suivants, c'est que l'essentiel de l'activité mathématique consiste à *poser*, *chercher*, *résoudre* des problèmes, *à démontrer* des théorèmes, et non pas à introduire ex nihilo une foule de notions très générales et de définitions dont on n'a pas le temps de se servir ou à se réfugier dans la rigueur formelle dont on ferait une fin en soi. L'idéal serait même de n'introduire les différentes rubriques du programme qu'à propos de problèmes précis. En fait cela présente parfois une certaine difficulté : il aurait fallu en effet que ces programmes soient construits à partir de problèmes, que les différentes rubriques apparaissent comme outils permettant de mieux résoudre ces problèmes ; or les programmes n'ont visiblement pas été conçus dans cet esprit.

Les théorèmes ou problèmes qui y figurent explicitement sont en nombre fort réduit. En ce qui concerne la géométrie de quatrième par exemple, il est tout juste fait allusion au théorème sur les médianes d'un triangle, ainsi qu'à quelques exercices (sans précision) de calcul barycentrique et vectoriel, et puis c'est tout : tout le reste n'est que définition et notions très générales, dont on risque de ne pas se servir dans des problèmes sérieux. Il faut évidemment y remédier chaque fois que c'est possible. C'est en particulier ce à quoi s'emploient Glaeser et son équipe à l'I.R.E.M. de Strasbourg, en essayant de réinventer une problématique adaptée aux nouveaux programmes : c'est un travail fort utile, mais c'est un travail acrobatique, puisque c'est le contraire qu'il aurait fallu faire ! Parfois le programme y prête mieux : par exemple, pour introduire les suites décimales illimitées, il est possible de ne le faire qu'à propos de la recherche de l'inverse ou de la racine carrée.

Encore faut-il faire attention à ne pas laisser croire qu'on ne construit les nombres réels, qu'à la seule fin de pouvoir définir $\frac{1}{3} = 0,333 \ldots 3 \ldots$; il y a une difficulté inhérente à la façon même dont est conçu le programme, qui introduit le concept de nombre réel à l'aide de la notation décimale, alors qu'en fait ces deux notions sont étrangères et correspondent à deux types de difficultés différents : il peut donc être utile d'introduire aussi un exemple de nombre irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$ [démontrer que ce nombre est irrationnel est un problème facile, faisable en 4ème, si l'on veut bien anticiper sur les fractions $\frac{p}{q}$ que les élèves ne reverront qu'en 3ème, mais qu'ils connaissent quand même dès l'enseignement élémentaire : cf. appendice].

III Le 3ème principe, conséquence immédiate du second, c'est *de ne pas ramener les mathématiques à des questions de vocabulaire :* ce serait d'autant plus une escroquerie que le vocabulaire serait plus ésotérique. Une terminologie, qu'elle soit moderne ou non, ne doit être introduite que pour répondre à des *besoins :* éviter une possible confusion, mieux formuler un énoncé ou un raisonnement. Sinon elle est nuisible : elle encombre l'esprit, et transforme les mathématiques en un catalogue pédant et dogmatique. Il serait par exemple absurde d'obliger les élèves à parler "du cardinal de l'ensemble des oeufs" au lieu du "nombre d'oeufs contenus dans un panier", "de la définition d'un ensemble en extension" au lieu de "la donnée de la liste des éléments de cet ensemble".

Non seulement il serait absurde d'obliger les élèves à utiliser pareille terminologie, mais il est inutile de l'employer, et même de l'introduire, car elle est uniquement *pédante* et n'apporte strictement rien en ce qui concerne la précision du langage. La terminologie "cardinal d'un ensemble", par exemple, ne prend de l'intérêt que pour les ensembles infinis ; pour les ensembles finis, elle se confond avec celle — plus classique et parfaitement claire — de "nombres d'éléments". La notion de "liste" des éléments d'un ensemble ne prête pas à confusion, et la terminologie des "ensembles définis en extension" ne s'oppose même pas à celle "d'ensemble défini en compréhension" (c'est-à-dire d'ensemble dont les éléments sont définis par une "propriété caractéristique"), car la propriété d'appartenir à l'ensemble ou à la liste des éléments de l'ensemble, mérite certainement l'épithète de "caractéristique". D'ailleurs cette terminologie est en fait fort imprécise, tant qu'on ne sait pas ce qu'est une "propriété". Dans la pratique, on peut parfaitement définir un ensemble, tantôt en se donnant la liste de ses éléments, et tantôt en se donnant une "propriété caractéristique", sans pour cela introduire une terminologie dont les commentaires disent, à juste titre, "qu'elle relève davantage du langage philosophique que mathématique".

Trop de maîtres interprètent encore les nouveaux programmes comme constituant de nouvelles règles substituées aux anciennes et nous parlent en termes de droit ou de devoir : "A-t-on le droit de ... ? " "Comment doit-on noter ... ? ". Notre réponse est la suivante : ils ont tous les droits, pourvu qu'ils posent clairement leurs définitions et leurs notations et qu'ils raisonnent ensuite correctement. Le souci de standardiser les notations et les définitions, si justifié soit-il, ne doit pas aboutir :

— d'une part à faire perdre complètement de vue le côté conventionnel de ces notations et définitions et à donner des mathématiques une image figée et dogmatique ("c'est comme ça et ça ne se discute pas") ;

— d'autre part à ramener les mathématiques à des questions de vocabulaire, à des listes de définitions et de règles, bref à une sorte de catéchisme où seraient oubliées la *recherche* de problèmes, la *découverte* de situations, la *démonstration* de théorèmes. Il est d'ailleurs *souvent rapide de rappeler* ses définitions et conventions, ce qui permet d'être compris aussi bien par ceux qui utilisent d'autres conventions que par ceux qui les avaient oubliées : les mathématiques ne consistent pas à apprendre par coeur des définitions, mais à raisonner.

Dans le même esprit, il importe *d'éviter toute inflation de terminologie :* le nombre des définitions de langage ensembliste utiles en mathématique est extrêmement réduit, et — le cas échéant — il sera toujours temps d'introduire une définition supplémentaire quand on en aura besoin (en supposant qu'on en ait *effectivement besoin*, car souvent ce n'est pas le cas). Il n'est pas plus long dans la pratique, par exemple, de parler d'application définie sur tel sous-ensemble de E, ou d'application de E dans lui-même, que de vouloir introduire la terminologie des "fonctions" et des "opérateurs". On peut parfaitement faire remarquer à des élèves de 4ème que la table de Pythagore d'un groupe (fini pour simplifier) possède la propriété que tout élément figure une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, et que la réciproque est fausse, sans pour cela leur faire retenir ni même apprendre ce qu'est un "carré latin". Dessiner au tableau des "diagrammes de Venn" ne signifie pas qu'il faille définir (on en serait bien incapable) ou simplement utiliser cette expression : cela ne servirait à rien. De même, si l'on veut faire compléter à des élèves des schémas sagittaux ou cartésiens, mieux vaut répéter à chaque fois des consignes précises, plutôt que de prétendre leur définir ce que sont ces schémas et le leur faire apprendre : le vocabulaire ésotérique risquerait de provoquer un blocage, et l'on pourrait croire qu'un élève n'est pas capable de compléter un tel diagramme quand il n'aurait simplement pas compris la définition des mots employés. Les notions de "réflexivité", "symétrie", "antisymétrie", "transitivité" ne doivent pas être enseignées in abstracto, mais seulement au moment de définir avec précision les relations d'ordre et les relations d'équivalence (en cinquième) ; de même les mots "associativité", "commutativité", "élément neutre", "inverse" ne doivent être introduits que pour formuler ce qu'est un groupe, et à ce moment-là seulement (en quatrième). La notion de "composition de relations" n'a que peu d'intérêt pratique en dehors des compositions d'applications. Il est donc inutile de l'introduire dans le cas général.

Les instructions officielles de sixième et cinquième énoncent :
"A chaque année, suffit sa tâche ; il est des anticipations à éviter par prudence du professeur vis-à-vis de ses élèves ; il est des sujets à ne pas déflorer par égard pour l'action du professeur qui suivra".

A ce sujet, il peut être raisonnable de ne pas introduire explicitement en sixième la terminologie des "relations d'ordre (strict ou large)" des "relations d'équivalence", des "applications", etc ... qui ne figurent explicitement qu'au programme de cinquième. Cela ne signifie pas qu'il ne faille pas en donner des exemples dès la sixième. Bien au contraire, ces types de relations sont essentiellement ceux qui servent le plus en mathématiques : il serait donc absurde, à partir du moment où l'on parle de "relations" en sixième, de ne pas en donner d'exemples, sous prétexte de ne pas "déflorer" le programme de cinquième, et de se réfugier — en ce qui concerne les relations — à des généralités sans intérêt. Il est au contraire des anticipations qu'il faut faire : l'introduction de certaines notions doit être préparée de longue date (le tout est de faire cette anticipation avec un peu de bon sens : en l'occurrence, ne pas introduire de terminologie dont on se sert pas immédiatement ; mais plutôt construire et faire manier des exemples). Quant au professeur qui suivra, il est suffisamment intelligent pour comprendre que cette "anticipation" n'a rien d'un manque "d'égards". De toute façon l'intérêt des élèves prime. Faut-il enseigner "l'antiréflexivité" ? nous ont demandé certains maîtres. La réponse est claire : n'introduire la notion que pour s'en servir (pour formuler ce qu'est un ordre strict, par exemple), sans introduire pour autant la terminologie, qui n'apporte pas grand chose.

IV Le 4ème principe est également une conséquence du second : c'est *de ne pas privilégier à l'excès le rôle de la rigueur formelle* en mathématique. Si l'essentiel de l'activité mathématique consiste à poser, chercher et résoudre des problèmes, à démontrer des théorèmes, la rigueur formelle n'intervient en général que lorsque l'essentiel de la découverte a déjà été fait : la formalisation répond à la fois à un souci d'élégance dans la présentation des résultats, à un besoin d'assurer les bases d'une découverte (où le risque existe toujours que l'intuition ait induit en erreur), et aussi parfois à un souci de généralisation ou de synthèse. La rigueur formelle intervient donc relativement tard, et il importe de respecter son rôle, donc sa place. C'est une grave erreur que de vouloir ramener les théories mathématiques à un jeu formel dans lequel on mélangerait des axiomes et des règles logiques, pour en extraire des théorèmes. Aucune découverte importante en mathématique ne s'est faite ainsi, et tous les spécialistes de ce "jeu" ont en arrière-pensée un certain nombre de motivations qui les guident intuitivement. Faire semblant de l'ignorer relève du snobisme ou de l'inconscience, et constitue une escroquerie à l'égard des élèves. Il faut que le néophyte ait manipulé suffisamment les notions qu'il croit connaître, pour qu'il prenne conscience de certaines difficultés dues à l'imprécision et à l'absence de définitions rigoureuses : c'est alors seulement qu'il éprouvera le besoin de préciser et formaliser ces notions. Il serait par exemple absurde de vouloir empêcher un élève de parler de cercles, d'angles, ou de rotations avant que ces notions ne soient définies correctement en troisième, aussi absurde que d'empêcher un jeune enfant d'apprendre à parler sous prétexte qu'il n'est pas capable de donner des définitions précises des mots qu'il emploie. Par contre, une formalisation, une fois remise à sa place, est elle-même source de nouveaux problèmes, de sorte que s'engage un processus dialectique très fécond : position d'un problème, recherche, découverte, formalisation, nouveau problème posé par cette formalisation, etc...

V Le 5ème principe consiste *à distinguer, sous le vocable "initiation à l'axiomatique"* qu'il n'est d'ailleurs pas utile de prononcer devant des élèves, *au moins trois processus différents* : ce sont

— l'apprentissage de ce qu'est une *démonstration* ou un raisonnement déductif ;

— l'explication de ce qu'est *l'axiomatisation* d'une structure mathématique ;

— l'explication de ce qu'est *la mathématisation* d'une réalité physique.

La confusion serait d'autant plus regrettable, que les exigences correspondant à chacun des trois processus sont tout à fait différentes.

En ce qui concerne l'apprentissage du raisonnement déductif, la première exigence, après la rigueur dans le raisonnement, est la *motivation* de la démonstration. Prenons l'exemple d'une axiomatique élémentaire de la géométrie de quatrième ou troisième : on demande aux élèves d'admettre en prémisses quelques axiomes correspondant à l'intuition, (du genre : "par deux points distincts passe une droite et une seule", ou "par un point passe une droite et une seule qui soit parallèle à une droite donnée"). Si, à partir de ces axiomes, on prétend, dès le début, démontrer des théorèmes dont les conclusions paraissent aussi évidentes aux élèves que les axiomes admis au départ (par exemple, si on prétend démontrer qu'il existe au moins trois directions de droite, ce que chacun "sait" bien), ce petit jeu risque de paraître artificiel aux meilleurs élèves (pourquoi admettre certaines choses, et en démontrer d'autres tout aussi "évidentes" ?). Quant au moins bons, le fait même qu'il y aura eu démonstration risque de leur échapper complètement. Par contre, le fait que lorsqu'un point M parcourt un cercle passant par les points A et B, l'angle (MA, MB) reste constant ou bien encore le fait que les médianes d'un triangle soient concourantes et se coupent aux 2/3 de leur longueur, sont des *curiosités* dont les élèves sentiront mieux la nécessité d'une démonstration. Bien sûr la notion de motivation est relative;il existe plusieurs types de motivation, plusieurs niveaux de motivation aussi, selon les connaissances préalables des élèves et surtout les questions qu'ils se sont ou non posées. La curiosité du résultat à démontrer est un type de motivation possible, mais ce n'est pas le seul : il se peut par exemple que des élèves soient suffisamment "éduqués" au bout d'un certain temps, pour comprendre la "règle du jeu" qui consiste à partir d'axiomes pour en déduire des théorèmes, et ressentir eux-mêmes la nécessité de démontrer des théorèmes "évidents", auquel cas il faudra évidemment leur faire ou mieux leur faire faire ces démonstrations, mais seulement à ce moment-là.

L'axiomatisation d'une structure relève d'un tout autre processus, qui correspond à une préoccupation de mathématicien "pur" (au sens large : un élève de quatrième peut très bien avoir, dans certaines circonstances, les préoccupations de mathématiciens purs). Quand on a constaté des analogies entre plusieurs situations mathématiques apparemment très différentes qu'on a effectivement déjà rencontrées, il devient naturel de formaliser, bref d'axiomatiser la structure sous-jacente (l'axiomatisation correspondant alors à un processus dynamique : on axiomatise une structure qu'on a déjà manipulée sur beaucoup d'exemples : on ne parachute pas une axiomatique ; l'idéal est même que les élèves essayent de faire eux-mêmes cette axiomatisation). Les critères d'une "bonne" structure sont à la fois d'être suffisamment générale pour recouvrir des *situations très variées*, et en même temps suffisamment particulière pour donner lieu à des *théorèmes non triviaux*, et suffisamment puissante pour être *maniable techniquement*. Il est difficile d'affirmer qu'une axiomatisation élémentaire de la géométrie de quatrième ou troisième vérifie ces critères : elle ne correspond qu'à un seul modèle naturellement rencontré par les élèves au préalable (tous les exemples de géométrie finie, que certains proposent d'introduire pour éviter ce reproche, sont en fait parachutés là de façon parfaitement artificielle) ; si ces axiomatiques élémentaires sont évidemment suffisamment riches pour recouvrir toute la géométrie plane traditionnelle, on ne peut pas dire qu'elles soient puissantes : les démonstrations y sont souvent fastidieuses. Il est une autre axiomatique, c'est celle d'espace vectoriel (muni ou non d'un produit scalaire), de dimension finie ou non, qui recouvre des situations extrêmement variées (tant en géométrie n—dimensionnelle qu'en analyse) qui est extrêmement riche, et qui mène à des techniques beaucoup plus puissantes. Le problème se pose alors de savoir si cela ne vaudrait pas mieux d'attendre que les élèves soient en état de comprendre et surtout d'utiliser cette axiomatique (ce qui est le point de vue de Dieudonné), plutôt que de prétendre reconstruire explicitement toute la géométrie à partir d'une telle axiomatique "élémentaire" fort peu puissante, où l'on démontre péniblement des résultats qui paraissent aussi évidents aux élèves que les axiomes qu'on leur a demandé d'admettre au départ, ce qui risque de paraître artificiel aux meilleurs, de dérouter les autres, et de les dégoûter tous.

Il est un excellent exemple d'axiomatisation d'une structure, qui figure au programme de quatrième : c'est celle de groupe (à condition de ne pas l'étudier trop tôt dans l'année scolaire, afin de laisser aux élèves le temps d'en rencontrer de multiples exemples nouveaux, ou de retrouver ceux qu'ils ont vus les années précédentes : non seulement l'addition ou la multiplication dans des ensembles de nombres, mais encore le groupe des translations du plan, le groupe des bijections d'un ensemble sur lui-même, le groupe des bijections qui "conservent" quelque chose, par exemple un polygone régulier à n côtés et la métrique du plan (il est secondaire qu'elle ne soit pas au programme) d'où les entiers modulo n, les heures (d'où les entiers modulo 12 ou 24), les angles (d'où les réels modulo 180 ou 360), les signes ± (d'où les entiers modulo 2 , etc ...). Il est inutile d'insister sur la richesse de cette structure, et elle fournit un bien meilleur exemple, au niveau de la classe de quatrième, de ce qu'est l'axiomatisation d'une structure. (Répétons que c'est à cette occasion et à ce moment-là seulement que les notions "d'associativité", "commutativité", "élément neutre", "inverse", doivent être introduites ; quand à la terminologie des "lois de composition interne" on peut parfaitement s'en passer, car il n'est pas plus long de parler d'applications $E \times E \to E$).

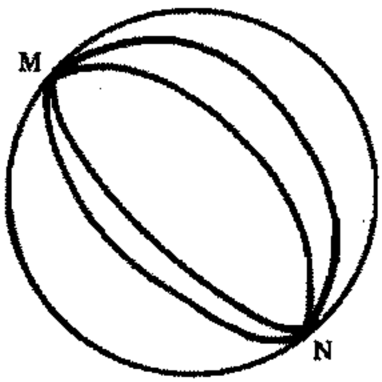
La mathématisation d'une réalité physique, enfin, correspond à une préoccupation de mathématicien "appliqué" : fournir un modèle mathématique décrivant une situation physique. Les exigences de ce processus sont :

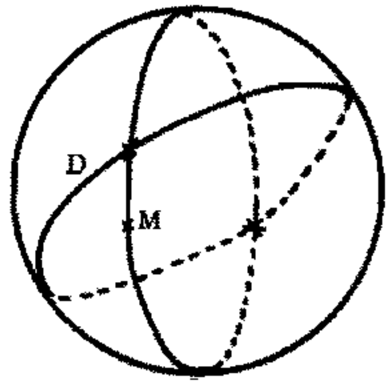
— d'une part, que le modèle mathématique approche le mieux possible la réalité que l'on veut décrire ;

— d'autre part, que ce modèle soit suffisamment "*maniable*" mathématiquement.

Il est clair que les axiomatiques élémentaires de la géométrie plane satisfont suffisamment au premier critère. On peut admettre que certaines d'entre elles satisfont suffisamment au second pour traiter les problèmes de quatrième, bien qu'elles soient évidemment moins puissantes que celles de l'algèbre linéaire. Il semble donc que c'est essentiellement en tant que mathématisation du plan physique, qu'une axiomatisation élémentaire de la géométrie peut avoir un intérêt en quatrième ou troisième. Cela signifie qu'il est probablement utile d'énoncer aux élèves un exemple de système d'axiomes qu'on leur demandera d'admettre en prémisses, qu'il faut aussi leur *dire* que toute la géométrie plane peut être entièrement construite à partir de ces seuls axiomes ; il est beaucoup moins évident qu'il faille le *faire*, du moins dans un premier temps si les élèves eux-mêmes ne le réclament pas. L'honnêteté intellectuelle vis-à-vis des élèves ne consiste pas nécessairement à tout démontrer. Admettre un résultat n'a rien de malhonnête, pourvu que cela soit explicite ; il semble préférable de réserver les véritables démonstrations aux cas où les élèves en ressentent la nécessité.

VI Le 6ème principe est de *ne pas prendre les élèves pour des imbéciles*, et de n'entreprendre avec eux que des manipulations concrètes qui en valent la peine. Par exemple, c'est se moquer d'eux que de passer du temps à leur faire vérifier expérimentalement, dans le plan habituel, l'axiome d'incidence (par deux points distincts, passe une droite et une seule) ou l'axiome d'Euclide (par tout point passe une droite et une seule parallèle à une droite donnée). Par contre, on n'insistera jamais suffisamment *sur la valeur pédagogique des contre-exemples* : en supposant qu'on en ait le temps (ce qui est un autre problème), faisons manipuler par exemple des géométries ne vérifiant pas ces axiomes en remplaçant le plan par la surface d'une sphère et en remplaçant les droites du plan par les grands cercles de la sphère, c'est-à-dire les intersections de la sphère avec un plan passant par le centre. Par deux points diamétralement opposés sur la sphère, passe une infinité de grands cercles : l'axiome d'incidence n'est donc pas vérifié ; deux grands cercles distincts se coupent toujours : l'axiome d'Euclide n'est pas vérifié.





On peut, à cette occasion, faire remarquer aux élèves que nous vivons sur la terre, et que la géométrie de la sphère représente mieux le monde où nous vivons pour les "grandes" distances, (c'est-à-dire celles qui sont non négligeables par rapport aux dimensions de la terre), que la géométrie affine ou euclidienne de quatrième ou troisième qui n'en est qu'une approximation pour les faibles distances. On peut justifier de remplacer les droites du plan par les grands cercles de la sphère, en expliquant que les bateaux qui veulent prendre la route la plus courte suivent approximativement des arcs de grands cercles sur la sphère terrestre ; on peut énoncer un résultat du genre : sur la sphère, il existe des courbes de longueur minimale parmi toutes celles joignant des points donnés, et ce sont des arcs de grands cercles. [Certes on n'a jamais défini avec précision, à ce niveau, la longueur d'une courbe. Mais, d'une part, voici une excellente motivation pour la définir un jour ; d'autre part, on ne l'a pas définie davantage lorsqu'on énonce un résultat analogue pour les droites du plan ; et je considère qu'il est utile de continuer à donner ces énoncés, même s'ils n'ont pas encore toute la rigueur souhaitable]. Les géométries "non euclidiennes" ne sont pas forcément des fantaisies de mathématiciens en quête d'abstraction ; elles servent aussi à décrire la "nature".

Les géométries du cylindre ou du cône fournissent aussi des exemples de géométries très simples, faciles à manipuler (cf. appendice).

Ceci dit, il est des maîtres qui refuseront de parler de sphères, cercles, cylindres, cônes, translations, rotations, avant que ces termes n'aient été définis correctement. Nous pensons au contraire qu'on peut utiliser la connaissance intuitive qu'ont les élèves de ces notions, avant de les définir mathématiquement, voire même pour en justifier l'introduction théorique : il ne doit pas y avoir de tabous, et la rigueur d'une définition correcte n'est pas une fin en soi, mais — répétons-le — doit correspondre à une nécessité ressentie par l'élève.

Conclusion

En guise de conclusion, il nous paraît indispensable que chaque professeur puisse penser et construire lui-même son cours, en se laissant guider par quelques principes simples et généraux, dont nous avons essayé de donner des exemples. S'il suivait de trop près un manuel, aussi bon soit-il, son cours y perdrait en spontanéité et en initiatives. En outre, au moins en ce qui concerne les programmes de quatrième, nous serions bien incapables de recommander un manuel en particulier : pour des raisons variables (mathématiques, ou pédagogiques) aucun ne nous a paru suffisamment satisfaisant parmi ceux que nous avons regardés. Cela tient en partie à la hâte avec laquelle les éditeurs se sont jetés sur le marché, sans que les manuels aient pu être testés et corrigés. Cela tient aussi aux programmes eux-mêmes et aux commentaires officiels, dont il était inévitable que les défauts transparaissent dans les manuels. Au fait, pourquoi a-t-il fallu que les éditeurs aient eu connaissance des textes officiels plusieurs mois avant leur promulgation, et avant les professeurs eux-mêmes ? Pour un aussi piètre résultat, cela n'en valait pas la peine (sinon pour les éditeurs eux-mêmes) !

Le seul conseil que nous pourrions donner aux maîtres, au sujet des manuels, c'est de les utiliser tous simultanément, en les comparant sur chaque rubrique, en les jaugeant en fonction des principes énoncés ci-dessus, et en faisant preuve de suffisamment d'esprit critique pour ne pas répéter leurs erreurs.

Certes, ce que nous proposons est difficile. Nous n'ignorons pas que beaucoup de maîtres se sentiront désemparés au début. C'est pourtant, à notre avis, la seule façon valable de procéder, la seule aussi qui requière et développe à la fois toutes les qualités d'un véritable éducateur.

Appendice

Dans les commentaires qui précèdent, nous avons fait allusion à certains problèmes ou à des manipulations, sans avoir la place de trop préciser ce que nous voulions dire. Nous allons donner ici quelques détails supplémentaires.

Toutefois, il doit bien être entendu que nous n'affirmons nullement que les professeurs *doivent* enseigner ce qui suit dans leur classe : il *leur* appartient d'en juger, en fonction du temps dont ils disposent, du niveau de leurs élèves, des rubriques sur lesquelles ils ont choisi d'insister. Nous nous contentons de faire des suggestions, que les maîtres ont toute liberté de ne pas suivre.

Problème : Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Il faut d'abord préciser qu'il n'est nullement indispensable, et qu'il est même déconseillé d'introduire en quatrième la terminologie des nombres rationnels et irrationnels. Le problème ne se pose qu'après que les réels ont été introduits, et peut se formuler ainsi de façon élémentaire : démontrer qu'il n'existe pas d'entiers positifs p et q tels que $p = \sqrt{2}.q$ (ou — ce qui revient au même à partir du moment où l'on admet, conformément au programme, que tout nombre réel ou nul admet un inverse — tel que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$).

En outre, il est indispensable que les élèves aient été amenés au préalable à se poser la question : est-ce que tout nombre réel x peut s'écrire sous la forme $x = p.q^{-1} = \frac{p}{q}$ (p entier, q entier non nul) ? Sinon, le problème est sans intérêt à leurs yeux et par conséquent la démonstration du résultat n'est pas motivée.

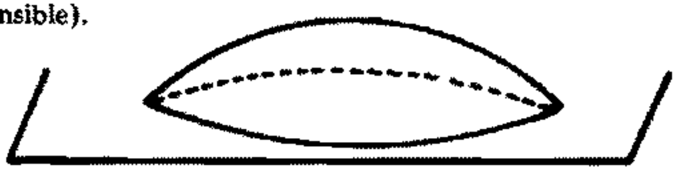
On va supposer qu'il existe des entiers positifs p et q tels que $p = \sqrt{2}\,q$, et l'on va démontrer que cette hypothèse est absurde car elle mènerait à une contradiction. Tout d'abord, quitte à diviser les entiers p et q par leur PGCD, on pourrait se ramener au cas où p et q ont un PGCD égal à 1 : en particulier, on pourrait supposer que *les entiers p et q ne sont pas tous les deux pairs.*

L'égalité $p = \sqrt{2}.q$ impliquerait $p^2 = 2q^2$; c'est dire que l'entier p^2 serait pair ; cela entraînerait que l'entier p serait lui-même pair [en effet, si p était impair, il existerait un entier p' tel que $p = 2p' + 1$ et $p^2 = (2p' + 1)(2p' + 1) = 4(p')^2 + 4p' + 1$ serait impair]. C'est dire qu'il existerait un entier p_1 tel que $p = 2p_1$; l'égalité $p^2 = 2q^2$ impliquerait donc $4(p_1)^2 = 2q^2$, d'où $q^2 = 2(p_1)^2$. Un raisonnement analogue au précédent permettrait d'en déduire que l'entier q serait pair lui aussi : il existerait un entier q_1 tel que $q = 2q_1$. Ainsi les entiers *p et q seraient tous les deux pairs,* ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. C'est donc qu'elle était absurde.

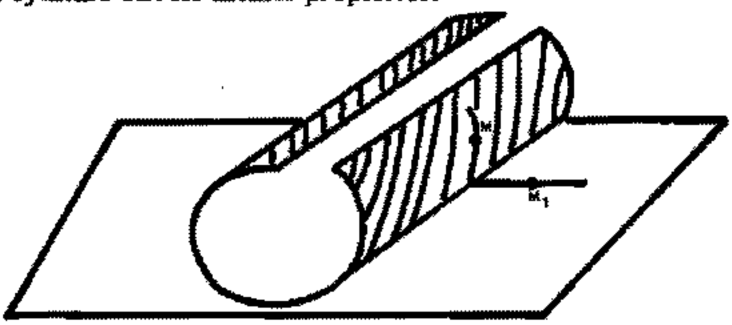
Remarquons en outre que cette démonstration ne fait intervenir que des calculs élémentaires sur les entiers naturels, et *ne nécessite aucun outil savant :* on peut donc se concentrer uniquement sur la rigueur de la démonstration. Certes celle-ci est relativement subtile pour des élèves de quatrième : elle comporte un raisonnement par l'absurde, et plusieurs étapes. Mais si, comme le dit le programme, "le but de l'enseignement des mathématiques, dans cette classe, est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations", autant le faire sur des exemples intéressants, au lieu de leur démontrer par exemple que dans un plan il y a au moins quatre points distincts.

Géométrie du cylindre

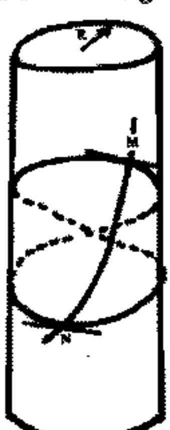
Dans les commentaires précédents, nous avons donné un exemple de géométrie ne vérifiant ni l'axiome d'incidence ni l'axiome d'Euclide : c'était celui de la sphère. Son intérêt était de mieux représenter le monde où nous vivons que le plan habituel, pour des distances non négligeables par rapport à celles de la terre. Mais, même "localement", une calotte sphérique ne peut pas s'appliquer isométriquement (c'est-à-dire en conservant les distances) sur un morceau de plan : si l'on essaye d'écraser sur un plan une telle calotte sphérique, elle se déchirera ou se déformera (faire l'expérience avec un morceau de ballon en caoutchouc peu extensible).

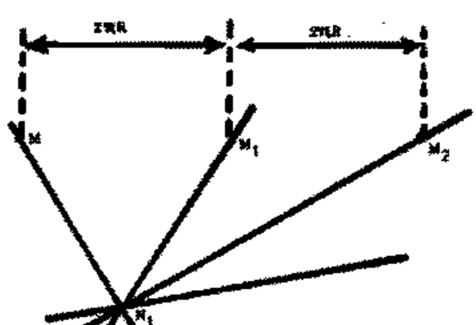


Au contraire, en faisant "rouler sans glisser" un cylindre circulaire sur un plan, un morceau de cylindre suffisamment petit s'applique isométriquement sur un morceau de plan, de sorte que "localement" plan et cylindre ont les mêmes propriétés.



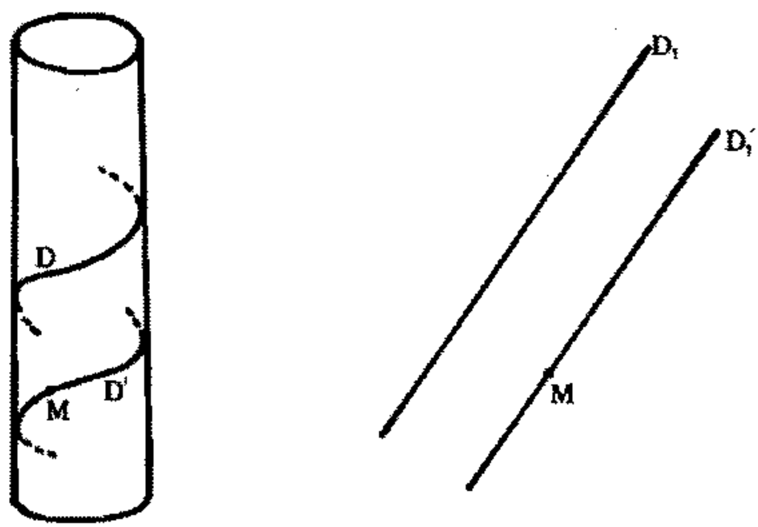
Par contre, ceci n'est plus du tout vrai "globalement" : au cours du roulement sans glissement, un même point M vient s'inscrire une infinité de fois sur le plan (M_{-1}, M_0, M_1, M_2, ...) tous les points étant homologues par des translations du plan de longueur un multiple entier de $2\pi R$ (R = rayon du cylindre) et de direction perpendiculaire dans le plan à celles des génératrices du cylindre.





Appelons "droites du cylindre" les courbes tracées sur le cylindre qui se "développent" suivant des droites du plan au cours du roulement sans glissement [ce sont les génératrices du cylindre, les cercles intersection du cylindre avec un plan orthogonal aux génératrices, et les hélices circulaires, mais il n'est pas indispensable de le dire]. On peut, à ce propos, évoquer le stencil (sur lequel on a éventuellement dessiné des droites) que l'on enroule sur le cylindre d'une ronéo, ou les feuilles de papier que ce cylindre va imprimer.

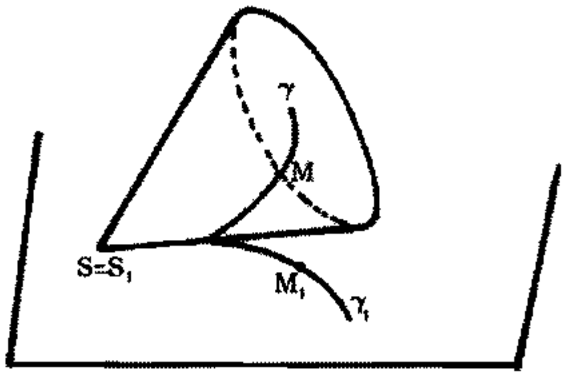
Soient M et N deux points distincts sur le cylindre ; si l'on joint par des droites du plan une représentation de N dans le plan (mettons N_1) aux différentes représentations de M dans le plan (M_{-1}, M_0, M_1, ...), on obtient une infinité de droites du plan qui sont le développement d'une infinité de "droites" du cylindre joignant toutes M et N. Ainsi, par deux points distincts du cylindre, passent une infinité de "droites" : c'est dire que *l'axiome d'incidence n'est pas vérifié* sur le cylindre.



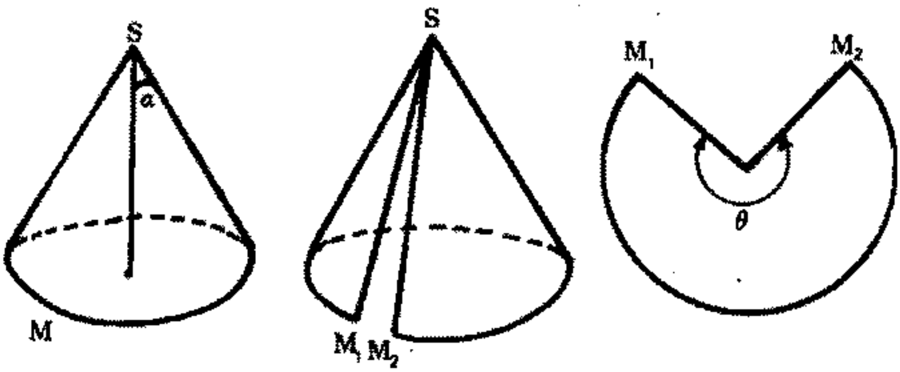
Par contre, *on vérifie aisément l'axiome d'Euclide :* si l'on appelle "droites" parallèles du cylindre deux "droites" du cylindre qui, ou bien sont confondues ou bien ont une intersection vide, par tout point M du cylindre passe une parallèle et une seule à une "droite donnée D".

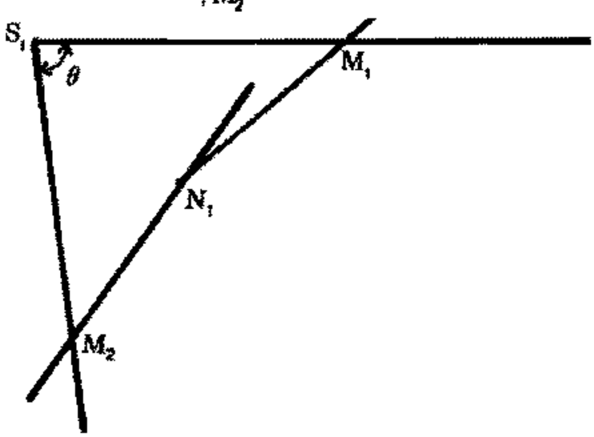
Géométrie du cône

Comme celle du cylindre, la géométrie du cône possède des propriétés semblables "localement" à celle du plan, mais "non globalement". On peut, là encore, faire "rouler sans glisser" un cône circulaire sur un plan.

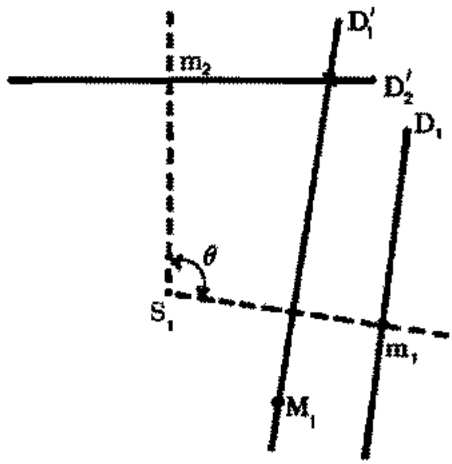


Là encore, un point M du cône s'inscrit plusieurs fois sur le plan (excepté le sommet S du cône qui s'inscrit en un seul point S_1) : les différentes représentations d'un point M dans le plan sont homologues cette fois-ci par des rotations du plan de centre S_1 et d'angle un multiple de Θ, où l'angle Θ ($0 < \Theta$ degré < 360) ne dépend que de l'angle α au sommet du cône, et peut être facilement calculé — sinon en quatrième, du moins en troisième (cf. plus loin).

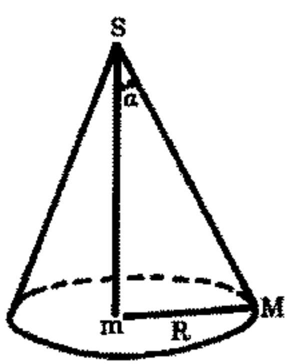




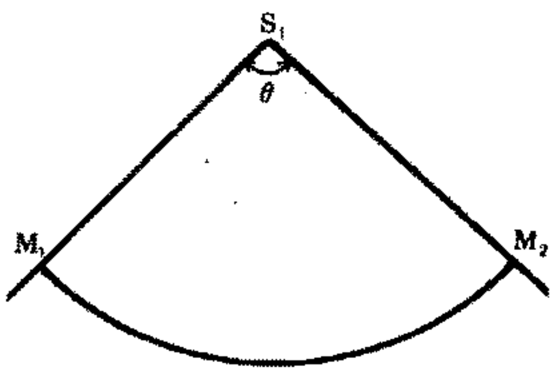
Si l'on appelle "cône" l'ensemble des points sur la surface du cône (sommet excepté), et "droites du cône" les courbes tracées sur le cône qui se développent suivant des droites du plan au cours du roulement sans glissement, un raisonnement analogue à celui fait dans le cas du cylindre prouve que *l'axiome d'incidence n'est pas vérifié* : par deux points distincts du cône, M et N, passent plusieurs "droites" [excepté si M et N sont sur la même génératrice et si $\Theta = 180°$]. Mais cette fois-ci, *l'axiome d'Euclide lui non plus n'est pas vérifié (excepté si $\Theta = 180°$) :* en effet, soient D une "droite" du cône, et M un point du cône : si, par une représentation M_1 de M dans le plan, on mène une parallèle D'_1 à une représentation D_1 de D dans le plan, D'_1 coupera toujours une autre représentation D_2 de D (à moins que D_2 ne soit parallèle à D_1 ce qui n'est possible que si $\Theta = 180°$) : de façon générale, deux "droites" du cône se coupent toujours (si $\Theta \neq 180°$).



Calcul de Θ en fonction de α (classe de troisième)



$0 < \alpha$ degré < 90



$0 < \Theta$ degré < 360

Si M_1 et M_2 sont deux représentations "successives" de M, l'arc de cercle $M_1 M_2$ de centre S_1 a pour longueur 2π . mM = 2π .SM. sin α de sorte que $\Theta_{\text{degré}} = 360 \dfrac{2\pi \text{ SM} \sin\alpha}{2\pi \text{ SM}} = 360. \sin\alpha$.

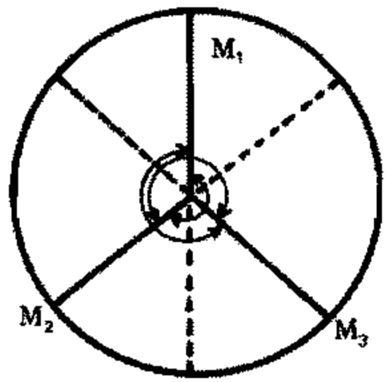
Nombre de représentations M_i dans le plan d'un point M du cône (classe de troisième) : supposons que chaque point M ne possède qu'un nombre fini n de représentations ($n \geqslant 2$, car le cas $n = 1$ correspond à $\Theta = 360°$, $\alpha = 90°$, que nous éliminons). C'est dire que $n.\Theta_{\text{degrés}}$ est un multiple entier de 360 : il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $n\Theta_{\text{degré}} = m.360$, soit en reportant dans la formule

$$\Theta_{\text{degré}} = 360. \sin\alpha = \frac{m}{n}$$

Ainsi, sin α est alors nécessairement un nombre rationnel.

dessin correspondant à $\Theta = 240°$

($n = 3$, $m = 2$)



Réciproquement, si sin α est un nombre rationnel $\frac{m}{n}$ (m et n entiers que l'on peut supposer tous deux positifs, avec $m < n$ puisque $0 < \sin\alpha < 1$), on obtient l'égalité $n\,\Theta_{\text{degré}} = m360$: c'est-à-dire que chaque point M du cône n'a qu'un nombre fini de représentations M_i, effectivement égal à n si la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible.

En résumé :

Chaque point M du cône n'a qu'un nombre fini de représentations M_i $\Big\} \Leftrightarrow$ sin α est un nombre rationnel

Exemples : $\sin\alpha = \frac{1}{n}$

chaque point M du cône a n représentations dans le plan :

$$\alpha = 30° \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}; \quad n = 2 \qquad \Theta = 180°$$

$$\alpha = 45° \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

chaque point M du cône a une *infinité* de représentations dans le plan.

On voit la richesse de cette géométrie du cône, au moins en classe de troisième, où le problème de savoir si $\sin \alpha$ est rationnel ou non devient naturel puisqu'il correspond à celui de savoir si un point M s'inscrit un nombre fini ou infini de fois dans le plan : on a donc une situation géométrique prêtant à des manipulations physiques, des exercices sur le calcul $\Theta_{\text{degré}} = 360 \sin \alpha$, des problèmes sur les nombres rationnels ou irrationnels, des exemples de géométrie localement euclidienne (c'est-à-dire "localement" isométrique au plan euclidien) mais pas globalement, fournissant des contre-exemples intéressants aux axiomes de la géométrie euclidienne. On pourra aussi, en classe de troisième, poser et résoudre le problème suivant. Par un point M du cône, peut-on mener des "droites" perpendiculaires à une "droite" D donnée sur le cône, et combien ?

Il est probablement raisonnable, compte tenu du temps dont on dispose, de ne parler en quatrième que de la sphère et à la rigueur du cylindre, pour réserver la géométrie du cône à la classe de troisième où l'on pourra mieux exploiter toute sa richesse.