L'enseignement de la géométrie dans le premier cycle

par Pierre BUISSON (I.R.E.M. de Strasbourg)

Dans le Bulletin n° 279 sur la quatrième et dans celui-ci sont publiés des articles destinés à donner une information mathématique sur les actuels programmes de géométrie. Le but de l'article qui suit est différent : présenter un certain nombre d'arguments en faveur de la suppression de la "géométrie déductive" des programmes obligatoires du premier cycle et de son remplacement par une "géométrie physique".

1. — Incohérence des programmes du premier cycle

Relisons les programmes de quatrième : "à la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître comme une *véritable théorie mathématique* ... Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations, de leur apprendre à en rédiger ; ..."

Relisons maintenant les instructions officielles relatives aux programmes de cinquième : "En cinquième, il s'agit uniquement de constatations physiques, auxquelles on s'attache à donner un mode d'expression correct ; en troisième, le raisonnement logique apparaîtra dans quelques séquences *sans qu'il soit encore question de bâtir une doctrine totalement déductive.*

L'incohérence est manifeste, et il est regrettable que les programmes n'aient pas été conçus dans la globalité du premier cycle ; il y a actuellement un changement de direction trop violent en quatrième. Reste naturellement à savoir s'il faut adapter les programmes de quatrième à ceux de cinquième ou l'inverse ; l'expérience donnera une réponse.

2. — La géométrie comme "théorie mathématique"

2.1 *Que signifie : "Théorie Mathématique" ?*

En gros une théorie mathématique consiste à rechercher les propriétés vraies dans un ensemble dont on suppose qu'il vérifie certaines propriétés initiales ; celles-ci sont appelées axiomes ou définitions et les conséquences logiques sont les théorèmes ; précisons à l'aide d'un exemple, celui des groupes.

On étudie un certain nombre d'ensembles munis d'une loi de composition que l'on rencontre au cours des programmes :
$(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{D}, +)$, $(\{10^n, n \in \mathbf{Z}\}, \times)$, $(\mathcal{S}(E), \circ)$ où $\mathcal{S}(E)$ désigne l'ensemble des bijections d'un ensemble fini donné ; on remarque que tous ces ensembles vérifient certaines propriétés et que toutes les autres sont les conséquences de ces premières. On fera de la théorie des groupes en se plaçant dans un ensemble dont on supposera seulement qu'il vérifie ces premières propriétés et en en cherchant les conséquences. Pour illustrer la théorie des groupes on donne les divers exemples déjà rencontrés et on en construit d'autres. Ces groupes, construits dans le cadre des ensembles, s'appellent des *modèles* de la théorie.

2.2 *La géométrie en tant que théorie mathématique*

Il n'est pas possible d'étudier la géométrie élémentaire comme les groupes car, à un isomorphisme près, il n'y a qu'un modèle de cette théorie : l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^2$. On ne peut donc introduire la géométrie par l'étude préalable de modèles ensemblistes. Le programme de quatrième permet pourtant, en ce qui concerne uniquement les axiomes d'incidence, d'étudier d'autres modèles : "plan" à quatre, neuf, seize ou vingt-cinq "points". Mais ces exemples ne se rencontrent pas naturellement, ils servent plus d'illustration que d'introduction aux axiomes d'incidence.

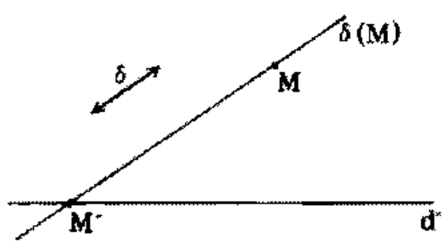
La démarche suggérée par les programmes et les commentaires est la suivante : les dessins et les activités de mesurage suggèrent un certain nombre de propriétés des droites et points dessinés ; on énonce ces propriétés dans le langage ensembliste puis on étudie un ensemble qui possède ces propriétés et on en cherche les conséquences, le dessin servant à chaque fois d'illustration. On étudie donc directement une théorie en travaillant sur un ensemble muni d'une structure sans autre précision sur la nature des éléments. Remarquons, de plus, que les propriétés prises comme axiomes sont choisies pour faire une étude linéaire de la théorie : on prend trois axiomes dont on cherche à tirer le maximum de conséquences, puis on en rajoute un autre que l'on exploite, et ainsi de suite... Mais ces propriétés ne sont certainement pas les plus naturelles, Thalès et la symétrie du rapport de projection orthogonal n'ayant certainement rien d'intuitif ! L'avantage de cette méthode est de pouvoir expliciter tous les axiomes et donc de faire des déductions à partir de prémisses clairement énoncées et pas trop nombreuses. Les anciens programmes, au contraire, envisageaient dès le départ la globalité de la situation physique, ce qui est plus naturel, mais ne permettait pas d'expliciter clairement les axiomes ; il était donc difficile de connaître les prémisses des raisonnements.

3. — Difficultés d'un enseignement de la géométrie dans le premier cycle

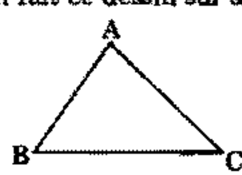
Il me semble qu'il y a trois difficultés essentielles d'ordre sémantique, linguistique et mathématique.

3.1 *Difficultés sémantiques*

Lorsqu'on étudierune fonction de Z dans Z (par exemple définie par $f(x) = 2x - 5$) on peut faire calculer la valeur de la fonction pour certaines valeurs de la variable pour s'assurer de la compréhension (par exemple $f(0)$, $f(-2)$, $f(5)$...). Il est impossible de procéder ainsi en géométrie car, comme on n'étudie pas un modèle explicite, on ne peut pas préciser des valeurs de la variable. Prenons la projection du plan P sur une droite d' parallèlement à la direction δ ; pour expliquer la définition on peut faire le dessin où $\delta(M)$ désigne la droite de δ passant par M.



Pour le professeur le point M est évidemment "*quelconque*", mais pour l'élève le point M, une fois dessiné, n'est plus quelconque, car c'est celui qui est sur le tableau, qui n'est pas le même que celui qui est sur sa feuille ni sur celle du voisin ; que signifie "soit ABC un triangle quelconque" pour un élève qui fait ce dessin sur sa feuille de papier ?



Il n'est pas évident qu'il suffise de répéter un dessin deux ou trois fois en variant la position d'un point ou d'une droite pour permettre à l'élève de séparer et de distinguer une propriété indépendamment des autres propriétés globalement perceptibles sur le dessin effectué.

On veut demander à l'élève de démontrer des théorèmes, c'est-à-dire trouver et énoncer les arguments qui permettront d'affirmer qu'une propriété est "vraie". Mais que signifie "vrai" en Géométrie ? Einstein écrivait dans "La Relativité" : "La notion de "vrai" ne s'applique pas aux énoncés de la Géométrie pure, car par le terme "vrai" nous désignons, en dernier ressort, toujours la concordance avec un objet "réel"." Comment convaincre des élèves de quatorze ans non seulement que le modèle mathématique n'est pas le modèle physique mais que, de plus, le mot "vrai" n'a pas le même sens dans les deux situations ?

L'enseignement traditionnel n'y a réussi que dans une minorité de cas et ce n'est pas un changement d'axiomatique qui permettra à une majorité d'élèves de comprendre ; la difficulté est inhérente à tout enseignement déductif de la géométrie. Cet enseignement a simplement permis de remplacer la version latine pour sélectionner les élèves ; on a l'impression que la Commission Lichnérowicz a voulu lui conserver ce pouvoir.

3.2 *Difficultés linguistiques*

En algèbre le remplacement de phrases écrites dans le langage courant par des formules se prêtant à des calculs ou à des transformations bien définies a été un progrès essentiel. Un langage, celui des langues naturelles, à structure complexe a ainsi fait place à un langage, celui de l'algèbre, dont la structure est plus simple ; de plus la structure d'une phrase française est liée au sens alors que la structure d'une expression algébrique est purement formelle.

Les théorèmes des anciens manuels comme "la puissance n-ième d'une fraction est une fraction dont le numérateur est la puissance n-ième du numérateur, et dont le dénominateur est la puissance n-ième du dénominateur de la fraction donnée" ont disparu ; la formule $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ peut être comprise, c'est-à-dire utilisée sans erreur, sans être lue.

En géométrie pure, les lettres utilisées n'ont aucun pouvoir opérateur ; on désigne les points et les droites par des lettres qui ne reflètent ni la marche de la construction ni les relations existantes. C'est le calcul vectoriel qui a permis de simplifier la géométrie par l'introduction d'un langage à pouvoir algorithmique. La géométrie, prise dans un contexte autre que vectoriel, ne peut donc s'exprimer que dans le langage courant et il suffit de regarder les manuels de quatrième en géométrie pour retrouver une inflation de vocabulaire et des théorèmes énoncés avec des phrases ayant une structure trop compliquée pour être intelligible à un élève de quatrième. On relève par exemple dans un manuel récent et apprécié :

"La restriction à une droite Δ' de la projection du plan Π sur une droite Δ parallèlement à une droite Δ'' de direction distincte de celles de Δ et de Δ' est une bijection qu'on appelle projection de Δ' sur Δ parallèlement à Δ"."

Et les auteurs ont même pris soin d'encadrer cette phrase en rouge !

Les figures permettent peut-être de mieux comprendre ce type de phrase mais elles n'ont aucun pouvoir opératoire et l'on retrouve les difficultés sémantiques.

Pour être objectif il faut préciser que les fiches utilisent moins de vocabulaire et sont plus lisibles par des élèves car elles ne cherchent pas des formulations aussi précises.

3.3 *Difficultés mathématiques*

La géométrie est une théorie riche, c'est d'ailleurs ce qui fait son intérêt ; mais sa trop grande richesse peut être un inconvénient au niveau de l'enseignement du premier cycle car elle oblige à connaître et à combiner un grand nombre de résultats. De plus sur les nouveaux programmes l'enseignement de la géométrie doit se faire en une année scolaire et demie avec quatre heures de mathématique par semaine et un programme d'algèbre ; cela semble irréalisable.

Il faut néanmoins remarquer que les nouveaux programmes, par l'introduction progressive des axiomes, soulèvent moins de difficultés que les anciens ; mais il est probable que de nombreux élèves seront arrêtés par des difficultés sémantiques et linguistiques et l'influence de la réforme risque d'être minime.

Conclusion

Il n'est plus possible de penser les programmes du premier cycle comme il y a vingt ans ; car à cette époque, les élèves étaient orientés vers un enseignement long dès la sixième. Ces programmes étaient donc conçus pour une minorité d'élèves.

Avec la création des C.E.S. et l'enseignement obligatoire jusqu'à seize ans, la situation a changé. Ces programmes s'adressent maintenant à des élèves dont les possibilités intellectuelles et l'environnement culturel sont très variés. Deux écueils sont à éviter, l'un qui consiste à ignorer cette transformation et bâtir des programmes pour une minorité, l'autre à aligner sur le bas et à éliminer toutes les difficultés.

Certains élèves sont lents, d'autres rapides, on ne peut leur demander d'assimiler le même programme dans le même temps. Beaucoup de membres de l'A.P.M. réclament depuis longtemps un programme minimum et obligatoire qui contiendrait par exemple de la géométrie physique et un programme facultatif qui contiendrait par exemple de la géométrie abstraite : cela permettrait à chaque professeur d'adapter son enseignement à sa classe et à chaque élève ; mais cela demanderait naturellement un aménagement des structures actuelles.