Quelques idées sur l'enseignement de la mathématique en classe de quatrième

par Pierre GAGNAIRE (I.R.E.M. de Lyon)

1\. La classe de quatrième devrait comporter :

1°) *une mise en ordre des résultats découverts dans les classes précédentes et, par là-même, des exemples de structuration de connaissances acquises, ne serait-ce que pour les rendre moins encombrantes ;*

2°) *la mise en évidence de quelques structures fondamentales et de leur compatibilité : groupe, équivalence, ordre ;*

3°) *à l'occasion de la mise en ordre visée au 1°), une initiation au raisonnement déductif ;*

4°) *l'utilisation dudit raisonnement déductif à la découverte de résultats nouveaux.*

La difficulté essentielle de la classe de quatrième réside dans le contact plus ou moins brutal avec le raisonnement déductif, et tout l'art du maître consiste à motiver ce qui constitue pour l'élève une nouveauté. Une première motivation ressort du point 1°) ci-dessus : il permet de retenir l'acquis des classes antérieures sous forme d'un bagage très réduit, bagage dont il est susceptible d'assurer le développement.

La maîtrise du *raisonnement déductif*, c'est-à-dire la capacité d'analyser un raisonnement déjà fait, et d'en bâtir d'autres, ne peut s'acquérir d'emblée. D'autre part, une présentation gratuite et artificielle du "*langage de la logique*", préalablement à toute utilisation, risque d'être inopérante, ou même néfaste, car, dans de nombreux cas, l'élève ne saura pas appliquer ces "connaissances" à des problèmes "concrets" ; c'est d'autant plus vrai si la présentation de la "logique" porte uniquement sur des cas finis, ce qui ne peut guère être évité à ce niveau.

Enfin, il ne faut jamais oublier une des règles de la pédagogie de la mathématique : on ne formalisera jamais un concept sans en avoir donné préalablement des modèles variés.

Il en est du raisonnement déductif comme du reste, on ne peut le formaliser efficacement que si de nombreux exemples, dûment motivés, en ont été donnés.

Cela condamne, évidemment, tout "Chapitre 0 : *Logique*".

Cela ne condamne pas, bien au contraire, un "*Chapitre n : Logique*", n pouvant d'ailleurs être un naturel assez petit, et tel que, de toute façon, il existe un "Chapitre n + 1" (et même des chapitres n + 2, n + 3, ... n + p) dans lequel on applique les résultats du "Chapitre n".

Ce qui précède n'a rien d'original et vise uniquement à assurer la continuité avec les classes précédentes (cela en évitant la brutalité du changement qualitatif que constitue le contact avec le raisonnement déductif), tout en permettant progressivement la mise en évidence de la pensée déductive et de son efficacité.

En fait, le "Chapitre n : Logique" prendra ses racines dans les chapitres 0 à n − 1.

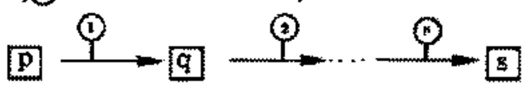
La *mise en forme* des raisonnements rencontrés, dès le plus simple, au moyen par exemple de *déductogrammes*, permettra, grâce à la répétition de certains schémas tels que :

de formaliser, *le moment venu.*

Il suffira, dans la plupart (pour ne pas dire tous) des cas rencontrés en quatrième, de vider les cadres et les bulles de leur contenu sémantique, d'appeler "*hypothèse*" ce qui figure dans un cadre $\boxed{}\longrightarrow$, *conclusion* ce qui figure dans un cadre $\longrightarrow\boxed{}$ et *théorème* ce qui figure dans une bulle.

On pourra, à ce moment-là, *mais à ce moment-là seulement*, présenter le signe $\vdash$, de la façon suivante :

si 1, 2, ... , n sont des *théorèmes*, et si



alors $p \vdash s$ pourra être inscrit au rang des théorèmes (c'est-à-dire être écrit dans une bulle) et servir dans la construction de nouveaux déductogrammes, donc de raisonnements déductifs.

2 *La structure (Z, +, ·)*

C'est la structure fondamentale, dont les élèves connaissent déjà de nombreux aspects.

1°) Les propriétés fondamentales de la structure (Z, +) qui pourront être prises comme *théorèmes primitifs* (c'est-à-dire : axiomes) sont, évidemment, les suivants : [1]

(1) Le mot "évidemment" s'adresse (évidemment !) au seul lecteur, mon collègue, et non à ses élèves.

t_1 Si n et p sont des éléments de **Z** alors n + p est un élément de **Z**.

t_2 Pour tous entiers n, p, q : (n + p) + q = n + (p + q) *(associativité)*

t_3 Pour tous entiers n, p : n + p = p + n *(commutativité)*

t_4 Pour tout entier n : 0 + n = n = n + 0 *(neutre)*

t_5 Tout entier n admet un *opposé* p qui le neutralise par + ; p est noté op(n) ; p = op(n) signifie p + n = 0 = n + p.

2°) Le concept de *relation* dans un ensemble viendra éclairer la structure (**Z**,+) de la manière suivante :

d_1 A tout entier a on associera une relation, notée $+a$: de source **Z**, de but **Z**, et dont le graphe sera l'ensemble des couples (x, x + a).

Il est alors immédiat que la relation $+a$ est une application dans **Z** (1).

On ne se privera pas de la représentation sagittale des applications $+a$, ne serait-ce que pour illustrer les propriétés suivantes, et faire manipuler, à cette occasion, les axiomes t_1 à t_5 :

$$+a \quad +b = +(a+b) \; ; \quad +a \quad +b = +b \quad +a \; ;$$
$$+0 \quad +a = +a = +a \quad +0 \; ; \quad +a \quad +\mathrm{op}(a) = +0 \; .$$

A titre d'exemple, voici comment on peut prouver

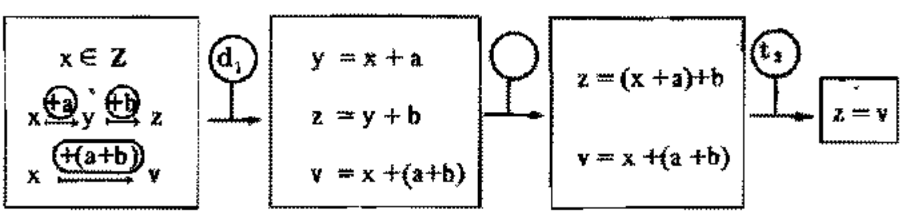
$$+a \quad +b = +(a+b)$$

Deux applications sont égales si, et seulement si, elles ont même source et même but et quel que soit l'élément x de la source, elles en donnent la même image dans le but. Présentons donc :

. un élément x (quelconque !) de la source ;

. son image z par $+a$ $+b$;

. son image v par $+(a+b)$



(1) Notamment, d'après t_1.

Remarquer la bulle vide en plein milieu du déductogramme ! Elle se traduit "ordinairement" par "Remplaçons y par x + a dans la deuxième égalité".

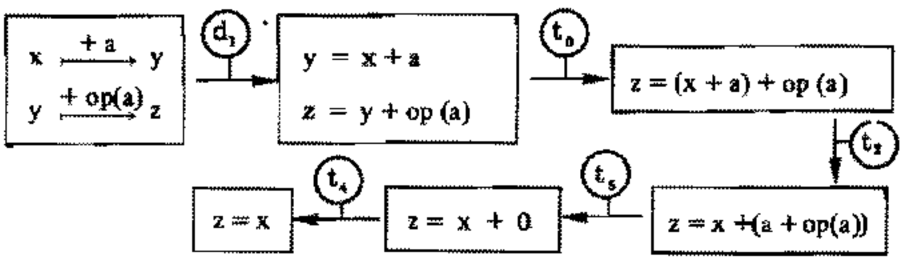
C'est l'occasion d'énoncer l'axiome t_0, dont la nécessité ne s'était pas fait sentir avant :

t_0 Si $n = p$ alors, pour tout entier q : $n + q = p + q$

Ici, on applique ainsi t_0 :

Si $y = x + a$ alors $y + b = (x + a) + b$. Comme $z = y + b$ il en résulte $z = (x + a) + b$.

3°) L'application $+a$ admet, pour relation réciproque, l'application $+\ op(a)$ comme le montre le déductogramme suivant :



Au lieu de noter $+\ op(a)$ l'application réciproque de $+a$, on convient de la noter aussi $-a$.

De même que l'image de x par $+a$ est notée $x + a$, l'image de x par $-a$ sera notée $x - a$.

On démontrera alors un bon nombre de théorèmes dont l'utilité, en calcul algébrique, n'est pas à prouver :

$$-a \quad -b \; = \; -(a+b) \; ; \quad -a \quad -b \; = \; -b \quad -a$$

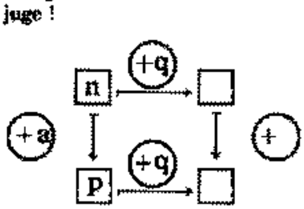
$$-(a-b) \; = \; -a \quad +b \; = \; +b \quad -a \; = \; +(b-a)$$

Ces théorèmes ne font qu'exprimer, sous une autre forme, ce que sont l'opposé d'une somme et l'opposé d'une différence.

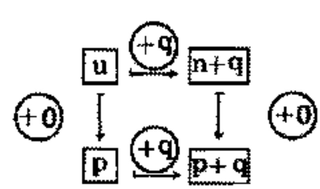
Ce qui précède peut être résumé par des schémas, dans lesquels les cases vides sont destinées à contenir des entiers. [1]

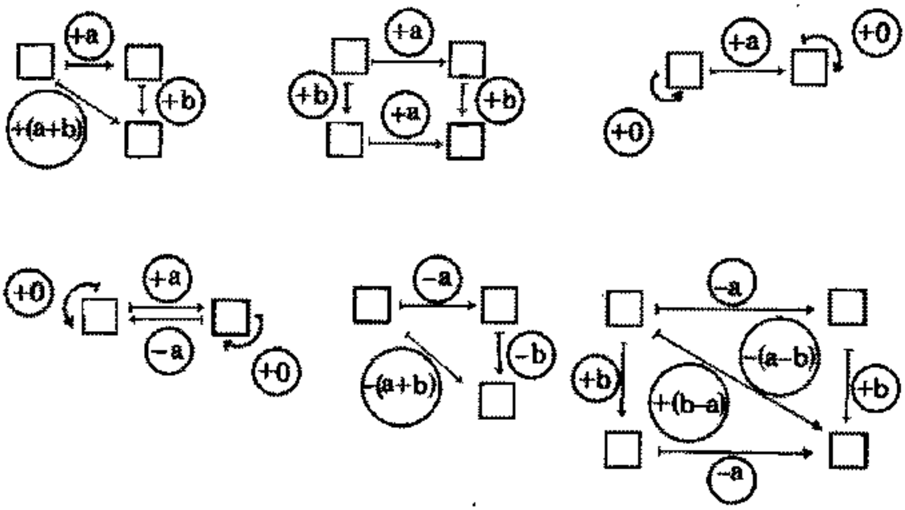
---

(1) Il n'est pas jusqu'à l'axiome t_0 qui ne soit pas justiciable de cette représentation. Qu'on en juge !



Quel entier doit figurer dans la bulle vide ? Alors on obtient le schéma de droite qui montre clairement : $n + q = p + q$





Parmi les propriétés des applications (+a) il conviendra de mettre tout particulièrement en évidence les suivantes :

$$\begin{tikzcd} a+b \arrow[r, mapsto, "-a"] \arrow[d, mapsto, "-b"'] & b \arrow[d, mapsto, "-b"] \\ a \arrow[r, mapsto, "-a"] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a-b \arrow[r, mapsto, "+b"] \arrow[d, mapsto, "-a"'] & a \arrow[d, mapsto, "-a"] \\ op(b) \arrow[r, mapsto, "+b"] & 0 \end{tikzcd}$$

4°) *Equations pour la structure (Z,+)*

Exemple : x + 3 = 7 est une formule qui donne une égalité vraie ou une égalité fausse suivant ce que l'on met à la place de x. Dans le cas où l'égalité est vraie, x + 3 et 7 représentent chacun le même entier. Alors l'image de x + 3 par l'application (+a) sera la même que celle de 7 par la même application, et ce, quel que soit l'entier a.

En particulier :

$$\begin{array}{ccc} x+3 & \xrightarrow{-3} & x \\ 7 & & 4 \end{array}$$

ce qui se traduit par "Si x + 3 = 7 alors x = 4".

Du fait que (−3) est une bijection, on a aussi :

$$\begin{array}{ccc} x+3 & \xleftarrow{+3} & x \\ 7 & & 4 \end{array}$$

ce qui se traduit par "Si x = 4 alors x + 3 = 7".

Les applications $(+a)$ permettent de résoudre simplement et proprement les équations pour la structure $(\mathbf{Z},+)$.

L'exemple ci-dessus peut être ainsi présenté :

$$\begin{array}{r|c} x+3=7 & (-3) \\ x=4 & \end{array}$$

à droite du trait vertical on a indiqué l'application dans $\mathbf{Z}$ à laquelle on soumet chaque membre de l'équation.

Autres exemples :

$$\begin{array}{r|c} x-3+x=x+7 & (-x) \\ x-3=7 & (+3) \\ x=10 & \end{array}$$

Ici apparaît une difficulté supplémentaire : l'utilisation de l'application $(-x)$:

$x-(x-(x-(x-(x-1))))=3$

$1-(1-(1-(1-(1-x))))=3$

Voilà l'occasion d'utiliser ce que nous savons des applications de la forme

$\boxed{-(a-b)}$ c'est-à-dire $\boxed{-(x-1)} = (-x) \quad (+1)$ etc ...

5°) Les propriétés fondamentales de la structure $(\mathbf{Z},+,\times)$ seront exprimées par les axiomes suivants, joints à $t_0 \dots t_5$.

t_6 Si n et p sont des éléments de $\mathbf{Z}$, alors $n \times p$ est un élément de $\mathbf{Z}$; $n \times p$ est aussi noté np.

t_7 Pour tous entiers n, p, q : $(n \times p) \times q = n \times (p \times q)$ *(associativité)*

t_8 Pour tous entiers n, p : $n \times p = p \times n$ (*commutativité*)

t_9 Pour tout entier n : $1 \times n = n = n \times 1$ (*neutre*)

t_{10} Pour tous entiers n, p, q : $n \times (p+q) = (n \times p) + (n \times q)$ *(distributivité)*

On notera l'absence, parmi ces axiomes, de l'énoncé :

Pour tout entier n : $n \times 0 = 0 = 0 \times n$ *(absorbant)*

En fait, les élèves le connaissent (mal d'ailleurs : certains le remplacent par $n \times 0 = n = 0 \times n$). Cela n'empêche pas de leur montrer qu'en cas d'oubli, ou d'incertitude sur cet énoncé, on peut le retrouver à partir des axiomes.

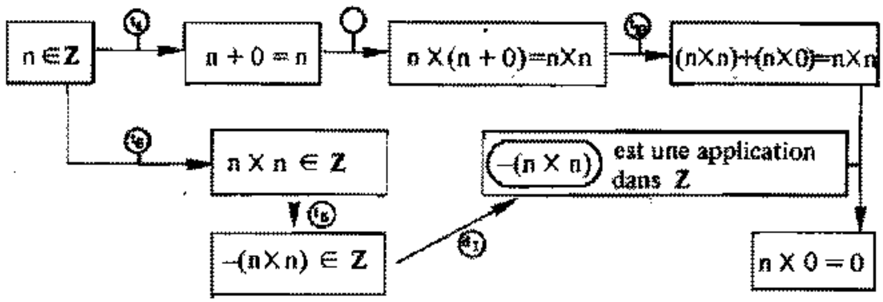
Pour bâtir le raisonnement, on est guidé "logiquement" par les faits suivants :

— le premier axiome qui parle de 0 est t_4 : il le présente comme *neutre* pour l'addition dans $\mathbf{Z}$;

— il s'agit ici de multiplication ; or t_4, qui est le premier axiome que l'on utilisera, fait intervenir l'addition.

On devra donc utiliser, en outre, un axiome qui parle à la fois de $\times$ et $+$: ce ne peut être que t_{10}.

Voici le déductogramme correspondant à ce raisonnement :



A ce niveau, on fera la convention de *priorité* de la multiplication sur l'addition, laquelle permet d'économiser les parenthèses. De plus $a \times 2$ sera noté $2a$ plutôt que $a.2$

Remarques importantes

1. Dans le déductogramme ci-dessus figure une bulle vide. Le seul moyen de la remplir est de compléter ainsi l'axiome t_0 :

   t_0 Si $n = p$, alors, pour tout entier q, $q \times n = q \times p$

2. Raccourcissons le déductogramme en écrivant seulement sa première et sa dernière case séparées par une flèche

$$\boxed{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \boxed{n \times 0 = 0}$$

Cet assemblage peut se traduire ainsi :

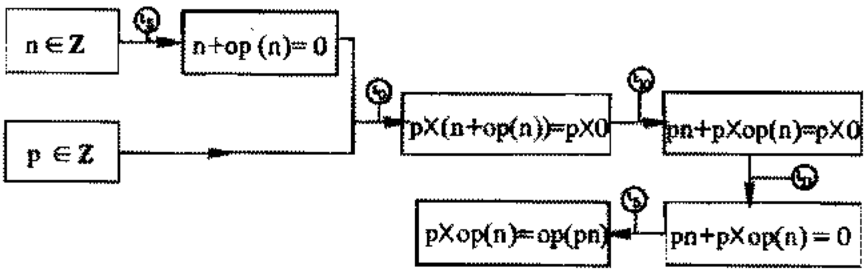
Si n est un entier, alors $n \times 0 = 0$
ou encore
Pour tout entier n, $n \times 0 = 0$ et par t_8, $0 \times n = 0$.

Nous pourrons utiliser cet énoncé au même titre que les axiomes t_0 à t_{10} dans la construction de déductogrammes nouveaux. Comme il est appelé à jouer par la suite un grand rôle, nous le noterons :

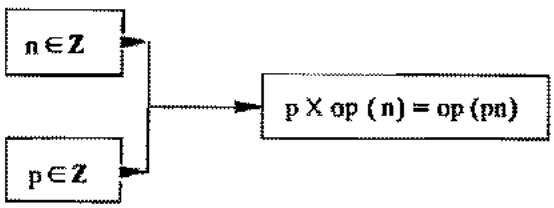
t_{11} Pour tout entier n : $n \times 0 = 0 = 0 \times n$ *(absorbant)*

Un autre énoncé important : *le théorème de l'opposé d'un produit :*

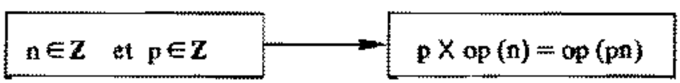
t_{12} Pour tous entiers n, p : $p \times op(n) = op(pn)$



Remarque : en raccourcissant le déductogramme, on obtient :



ou encore :



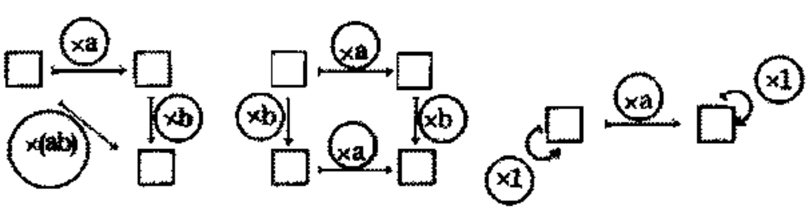
Cet assemblage, déjà traduit par l'énoncé t_{12}, peut encore se traduire par la phrase :

Si n est un entier, et p est un entier, alors p X op (n) = op(pn).

6°) De même qu'à tout entier a on a associé une application (+a) de **Z** dans **Z**, on va lui associer une application (×a) :

A tout entier a on associe une relation, notée (×a) :
de source **Z**, de but **Z**, et dont le graphe sera l'ensemble des couples (x, ax), (c'est l'axiome t_6 qui assure que (×a) est bien une application).

Les premières propriétés des applications (×a) traduisent les axiomes t_7, t_8, t_9 et sont résumées par les schémas suivants :



Le deuxième schéma permet, bien sûr, de retrouver la deuxième partie de l'axiome t_0, si on y remplace $\times b$ par $\times 1$.

Il y a une différence essentielle entre les applications $+a$ et les applications $\times a$. Soit n et p deux entiers. Il est toujours possible de trouver une application $+a$ telle que :

$$n \xmapsto{+a} p.$$

En effet :

$$\begin{array}{r|l} n + a = p & -n \\ a = p - n & \end{array}$$

Au contraire, on connaît des cas où on ne peut pas trouver d'application $\times a$ (dans **Z**) telle que :

$$n \xmapsto{\times a} p.$$

Exemple :

$$2 \xmapsto{\times a} 3$$

Autre problème, parfois sans solution : n étant un entier donné, et $+a$ une application dans **Z** donnée, on sait toujours remplir la case du schéma $\square \xmapsto{+a} n$

il suffit d'utiliser l'application réciproque :

$$\square \underset{-a}{\overset{+a}{\rightleftarrows}} n$$

pour voir que l'entier qui figure dans la case est n — a.

Au contraire, si on donne : $\square \xmapsto{\times 7} 2$

on ne peut mettre aucun élément de **Z** dans la case.

L'application dans **Z** $\times 7$ *n'est pas une bijection.*

Thème de recherche.

Quelles sont les applications dans **Z** : $\times a$ qui sont des bijections ? Etudier les propriétés de la composition de ces bijections (on verra plus tard que leur ensemble, muni de la composition des bijections, constitue un *groupe*).

7°) Nous abordons ici un paragraphe essentiel. Le thème général en est celui des *morphismes de structures*, thème qui domine actuellement toute la mathématique.

Depuis la classe de cinquième, les élèves savent ce qu'est l'ensemble des multiples d'un naturel. A la lumière des applications $(\times a)$, on peut étendre cette notion à tout entier :

d_3 Pour tout entier a, on appelle ensemble des multiples de a l'ensemble des images des éléments de Z par l'application $(\times a)$.

Exemple :

$$\begin{array}{lcccccccccc}
Z = & \{\ldots 4^-, & 3^-, & 2^-, & 1^-, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \ldots\} \\
(\times 3^-) & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
M_3 = & \{\ldots 12, & 9, & 6, & 3, & 0, & 3^-, & 6^-, & 9^-, & 12^- \ldots\}
\end{array}$$

D'une manière générale, on notera M_p l'ensemble des multiples de p.

Les théorêmes suivants sont valables pour tous les ensembles M_p :

t_{13} $0 \in M_p$

t_{14} Si $a \in M_p$ et $b \in M_p$ alors $a + b \in M_p$

t_{15} Si $a \in M_p$ alors $op(a) \in M_p$.

Les déductogrammes servant à établir ces théorèmes sont faciles à construire et ce sont peut-être les premiers que l'on pourra laisser entièrement au soin de l'élève.

Il fera ainsi ses premières armes et en éprouvera certes un encouragement bénéfique.

Il résulte de la comparaison des théorèmes t_1, t_4, t_5 avec t_{13}, t_{14}, t_{15} que les structures$(Z,+)$ et $(M_p,+)$ se ressemblent beaucoup. En'outre, les théorèmes t_2 et t_3 sont trivialement vérifiés dans la structure $(M_p,+)$ puisque M_p est un sous-ensemble de Z.

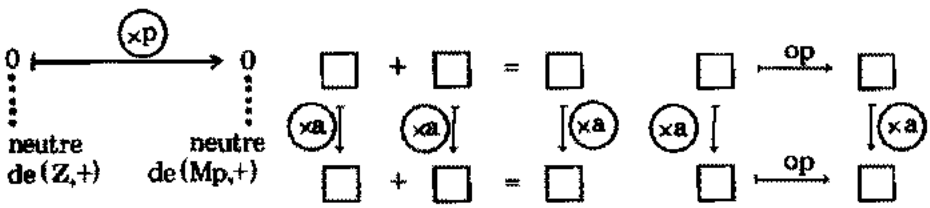
Un nouvel éclairage est jeté sur cette situation par les théorèmes suivants, relatifs à l'application $(\times p)$:

t_{16} L'image de 0 par $(\times p)$ est 0.

t_{17} L'image de la somme de deux entiers par $(\times p)$ est la somme des images de ces entiers par $(\times p)$.

t_{18} L'image de l'opposé d'un entier par $(\times p)$ est l'opposé de l'image de cet entier par $(\times p)$.

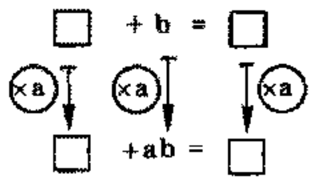
Les schémas suivants résument ces propriétés :



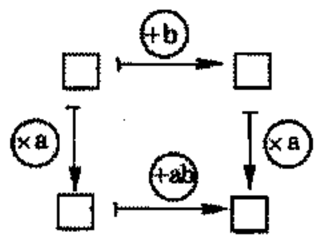
Remarque : le deuxième schéma comporte, outre les flèches d'applications, les signes + et = , alors que les précédents ne les comportaient pas.

L'intérêt d'un schéma sagittal réside dans l'aspect dynamique des flèches. Or on sait qu'il est dangereux d'accorder une signification dynamique à d'autres signes, en particulier au signe = .

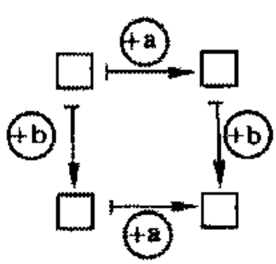
Nous sommes amenés, à la suite de cette remarque, à modifier ce schéma. A cet effet, particularisons le contenu de la 2ème case :

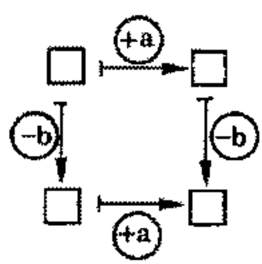


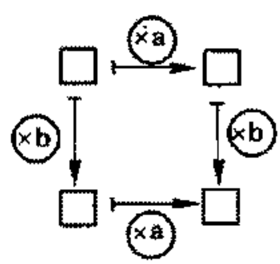
Sur la 1ère ligne, la case qui suit le signe = contient l'image, par +b , de l'entier contenu dans la 1ère case. Une remarque analogue pour la dernière ligne nous permet alors de dessiner le schéma suivant :



Observons chacun des schémas ci-dessous :







Quel que soit l'entier inscrit dans la 1ère case (en haut et à gauche), on arrive toujours au même entier dans la dernière case (en bas et à droite), que l'on suive le chemin $\mapsto\downarrow$ ou le chemin $\downarrow\mapsto$. Or, suivant ces deux chemins, on rencontre les mêmes applications, mais dans l'*ordre inverse*. On dit, pour cela, que les applications +a et +b commutent (de même que +a et −b et aussi ×a et ×b). Par contre les applications ×a et +b ne commutent pas.

Ainsi, la distributivité de la multiplication sur l'addition est la propriété qui permet de compléter le schéma :

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, mapsto, "+b"] \arrow[d, mapsto, "\times a"'] & \square \arrow[d, mapsto, "\times a"] \\ \square \arrow[r, mapsto, dashed] & \square \end{tikzcd}$$

de sorte que l'on obtienne, dans la dernière case, un entier indépendant du chemin parcouru à partir de la première case.

Les théorèmes t_{16} , t_{17} , t_{18} se traduisent en disant que l'application $\times p$ est un *morphisme* relativement aux structures $(\mathbf{Z},+)$ et $(M_p\ ,+)$, c'est-à-dire (littéralement) que cette application respecte la forme de ces structures.

On notera que les applications $\times 1$ et $\times 1^-$ réalisent chacune un morphisme de $(\mathbf{Z},+)$ vers $(\mathbf{Z},+)$. Du fait que $\times 1$ et $\times 1^-$ sont des bijections de **Z** vers **Z**, chacun des morphismes en question est qualifié d'*isomorphisme*. On verra plus loin que, si p est différent de 0, alors $\times p$ est un *isomorphisme* de $(\mathbf{Z},+)$ vers $(M_p\ ,+)$. Mais cet isomorphisme n'est pas le seul morphisme de $(\mathbf{Z},+)$ vers $(M_p\ ,+)$: pour tout entier k, $\times kp$ est aussi un morphisme de $(\mathbf{Z},+)$ vers $(M_p\ ,+)$.

La recherche de *tous* les morphismes de $(\mathbf{Z},+)$ vers $(\mathbf{Z},+)$ constitue un thème d'activité fort intéressant, qui remplace avantageusement les feu-chapitres concernant les règles de Troyes [1], les proportions et les grandeurs proportionnelles.

3 *Le "calcul algébrique"*

Ce que l'on convient d'appeler ainsi n'est, somme toute, pas plus compliqué dans **D** ou dans **R** que dans **Z**.

Ce qui pose des difficultés à nos élèves, c'est la "réduction d'expressions" telles que :

$$0{,}5 - 3{,}2(8x - 5{,}1).$$

On ne diminue pas la difficulté en prenant tous les éléments numériques dans **Z** :

$$9 - 7(4x - 3)$$

Trop souvent, l'élève calcule comme il lit, c'est-à-dire de gauche à droite, ne tenant compte de la priorité que pour les "petites" multiplications (4x par exemple) mais pas pour les "grosses" ($7 \times (4x - 3)$ en l'occurrence).

(1) Lesquelles, faut-il le rappeler, n'auront plus lieu.

Cela donne (avec, bien sûr, le signe = "dynamique") :

$$9 - 7 = 2 \times 4x = 8x - 2 \times 3 = 6 = 8x - 6$$

Si on habitue l'élève à considérer l'"expression" $9 - 7(4x - 3)$ comme l'image de l'entier x par une certaine application, les choses ont des chances de s'arranger.

$$x \xmapsto{\times 4} 4x \xmapsto{-3} 4x - 3 \xmapsto{\times 7} 7(4x - 3) \longmapsto$$

Même s'il est difficile de continuer, on a du moins gagné quelque chose : la multiplication $7 \times (\quad)$ doit être effectuée *avant* la soustraction $9 - 7$, laquelle n'est pas encore apparue dans notre schéma.

Il existe (au moins) deux possibilités de continuer :

. ou bien on considère que l'expression à calculer est l'image de 9 par l'application $(-7(4x - 3))$

. ou bien on considère que $9 - 7(4x - 3)$ est l'opposé de $7(4x - 3) - 9$.

Envisageons d'abord ce dernier cas. Le dernier schéma se continue ainsi :

$$7(4x - 3) \xmapsto{-9} 7(4x - 3) - 9 \xmapsto{op} op(7(4x - 3) - 9)$$

On calcule alors sans difficulté :

$$op(28x - 21 - 9) = op(28x - 30) = 30 - 28x$$

Dans la première optique, on aurait d'abord calculé l'application $(+7(4x - 3))$ qui est $(+(28x - 21))$, puis l'application $(-7(4x - 3))$ qui est $(+(21 - 28x))$.

Comme $(+(21 - 28x)) = (+21)\ (-28x)$, le calcul s'achève ainsi :

$$9 \xmapsto{+21} 30 \xmapsto{-28x} 30 - 28x$$

Remarque :

L'utilisation de machines à calculer, et particulièrement de *machines programmables*, permet d'éclairer d'un jour nouveau le "calcul algébrique".

Soit à programmer le calcul de l'image de x par l'application $x \longmapsto 9 - 7(4x - 3)$.

On aura les phases suivantes :

1°) introduction de la valeur numérique de x

2°) calcul de 4x, soit y

3°) calcul de $y - 3$, soit z

4°) calcul de 7z, soit u

5°) mise en mémoire de u

6°) introduction de 9

7°) calcul de $9 - u$ soit t

8°) sortie de t.

On reconnaît là un processus déjà décrit plus haut : il s'agit de *décomposer* l'application $x \longmapsto 9 - 7(4x - 3)$ en applications plus simples, de type $(+a)$ ou $(\times a)$, et même le calcul d'une application (en l'occurrence $(-u)$) par laquelle on prend l'image de 9.

Le programme est assez long et la recherche d'un programme plus court est une bonne motivation pour le calcul algébrique. On arrive ainsi à l'application

$$x \longmapsto 30 - 28x$$

qui se programme ainsi :

1°) introduction de x

2°) calcul de 28x, soit y

3°) mise en mémoire de y

4°) introduction de 30

5°) calcul de $30 - y$, soit z

6°) sortie de z.

Autre programme possible :

1°)
2°) } comme ci-dessus

3°) calcul de $y - 30$, soit z

4°) calcul de op(z), soit u

5°) sortie de u.

4 *La relation d'infériorité dans* **Z**

1°) Occupons-nous d'abord des naturels (on sait que **N** est un sous-ensemble de **Z**).

On dit que 3 est inférieur à 7 pour traduire le fait qu'il faut ajouter un naturel (4) à 3 pour obtenir 7. Autrement dit, 7 est l'image de 3 par l'application $(+4)$. Cela nous incite à poser la définition suivante :

d_4 ***Pour tous naturels a et b, $a \leqslant b$ signifie : b est l'image de a par une application $(+n)$, n étant un naturel.***

Comme premières conséquences de cette définition, on trouve :

. $p \xmapsto{+0} p$: pour tout naturel p , $p \leqslant p$

. $0 \xmapsto{+p} p$: pour tout naturel p , $0 \leqslant p$

. Si a et b sont des naturels, alors $a + b$ est un naturel.

Le schéma

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, mapsto, "+a"] \arrow[dr, mapsto, "+(a+b)"'] & q \arrow[d, mapsto, "+b"] \\ & r \end{tikzcd}$$

se traduit donc par :

pour tous naturels p, q, r, si $p \leqslant q$ et $q \leqslant r$ alors $p \leqslant r$.

Si $a \leqslant b$, le schéma suivant est justifié par le fait que les applications $+p$ et $-a$ commutent.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "+p"] \arrow[d, mapsto, "-a"'] & b \arrow[d, mapsto, "-a"] \\ 0 \arrow[r, mapsto, "+p"'] & b-a \end{tikzcd}$$

Comme, d'autre part, $-a$ est une bijection dans **Z**, la première ligne équivaut à la seconde. Donc, puisque $0 + p = b - a$ et que p est un naturel,

*pour tous naturels a et b, $a \leqslant b$ équivaut à $(b - a) \in$ **N**.*

L'avantage de cette nouvelle définition de $\leqslant$ est d'éviter l'usage du quantificateur existentiel (même sous-entendu, comme dans d_4).

Avant d'aborder l'étude de la relation $\leqslant$ dans **Z**, il nous faut encore énoncer trois axiomes :

t_{19} Si n et p sont des éléments de **N**, alors $n + p$ est un élément de **N**.

t_{20} Si n et p sont des éléments de **N**, alors $n \times p$ est un élément de **N**.

Ces axiomes expriment la *stabilité* (naturelle !) de **N** pour + et pour $\times$.

t_{21} Si n est un entier différent de 0, alors un et un seul des deux entiers n, op(n) est élément de **N**.

Ce dernier axiome exprime en fait que **Z** ne contient, outre les naturels, que leurs opposés, et que seul 0 est un naturel dont l'opposé est un naturel.

2°) Relation d'infériorité dans **Z**.

Elle prolonge "naturellement" la relation d'infériorité dans **N** :

d_4 *Pour tous entiers a et b, $a \leqslant b$ signifie : b est l'image de a par une application* $+n$ *, n étant un naturel.*

Comme dans **N**, on a les théorèmes suivants :

t_{22} Pour tout entier p, $p \leqslant p$ $\quad (p \xmapsto{+0} p$ et $0 \in$ **N**)

t_{23} Pour tous entiers p, q, r, si $p \leqslant q$ et $q \leqslant r$ alors $p \leqslant r$

(en vertu du schéma

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, mapsto, "+a"] \arrow[dr, mapsto, "+(a+b)"'] & q \arrow[d, mapsto, "+b"] \\ & r \end{tikzcd}$$

et du fait que si $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$ alors $(a + b) \in \mathbf{N}$).

Par contre, l'énoncé :

"Pour tout entier n, $0 \leqslant n$"

n'est pas vrai. Cependant :

t_{24} Si $p \in \mathbf{N}$ et si $op(n) \in \mathbf{N}$ alors $n \leqslant 0 \leqslant p$

(Cela résulte de $n \xmapsto{+op(n)} 0 \xmapsto{+p} p$ et de $op(n) \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$)

Les éléments de **Z** qui sont naturels sont encore dits *entiers positifs*. Ceux dont l'opposé est naturel sont encore dits *négatifs*. t_{24} se traduit encore ainsi :

Tout entier négatif est inférieur à 0, lequel est inférieur à tout entier positif. Par conséquent, tout entier négatif est inférieur à tout entier positif.

On notera que, en vertu de t_{21} le seul entier à la fois positif et négatif est 0.

t_{25} Si $n \leqslant p$ alors $op(p) \leqslant op(n)$

Cela résulte immédiatement du schéma suivant, justifié par le fait que l'application $(+a)$ commute avec $(-n)$ et $(-p)$

$a \in \mathbf{N}$

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, mapsto, "+a"] \arrow[d, mapsto, "-n"'] & p \arrow[d, mapsto, "-n"] \\ 0 \arrow[r, mapsto, "+a"] \arrow[d, mapsto, "-p"'] & p-n \arrow[d, mapsto, "-p"] \\ op(p) \arrow[r, mapsto, "+a"] & op(n) \end{tikzcd}$$

Au passage on reconnaît dans ce schéma la justification de :

t_{26} Pour tous entiers a et b $a \leqslant b$ équivaut à $(b - a) \in \mathbf{N}$

t_{27} Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ alors $a = b$

Cela résulte immédiatement du schéma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, shift left, "+p"] & b \arrow[l, mapsto, shift left, "+op(p)"] \end{tikzcd}$$

et du fait que si p et op(p) sont tous deux naturels, alors $p = 0$ (d'après t_{21} en le contraposant).

t_{28} Pour tous entiers a et b $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$

Cela résulte encore du schéma

$$a \underset{+op\,(p)}{\overset{+p}{\rightleftarrows}} b$$

et du fait que l'un au moins des entiers p, op(p) est naturel (t_{21}).

t_{29} Si $a \leqslant b$ alors, pour tout entier c, $a + c \leqslant b + c$

En effet, les applications $+p$ et $+c$ commutent :

$$p \in \mathbf{N} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "+p"] \arrow[d, mapsto, "+c"'] & b \arrow[d, mapsto, "+c"] \\ a + c \arrow[r, mapsto, "+p"] & b + c \end{tikzcd}$$

Le schéma ci-dessus rend donc compte du théorème.

t_{30} Si $a \leqslant b$ alors, pour tout *naturel* c, $a \times c \leqslant b \times c$

Pour démontrer le théorème t_{30}, il suffit de rappeler le schéma (voir 2, 7°) remarque) :

$$p \in \mathbf{N} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "+p"] \arrow[d, mapsto, "\times c"'] & b \arrow[d, mapsto, "\times c"] \\ ac \arrow[r, mapsto, "\times pc"] & bc \end{tikzcd}$$

et l'axiome t_{20} : p et c étant des naturels. pc est aussi un naturel.

De t_{20}, on tire encore ceci : si c est un entier négatif, son opposé est naturel. $p \times op(c)$ est alors naturel, donc pc est négatif (t_{12}).

Le schéma ci-dessous montre :

$$bc \xrightarrow{+\,op\,(pc)} ac$$

avec $op(pc) \in \mathbf{N}$. Donc $bc \leqslant ac$

t_{31} Si $a \leqslant b$ alors, pour tout *entier négatif* c, $bc \leqslant ac$

t_{32} Pour tous entiers a et b, si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

La démonstration de ce théorème est des plus délicates et peut être réservée aux élèves particulièrement doués.

Remarquons d'abord que si $a \times b = 0$, alors $op(a) \times op(b)$, $op(a) \times b$, $a \times op(b)$ sont aussi égaux à 0 (théorème t_{12}).

On peut donc se ramener au cas où a et b sont des naturels.

Or les naturels différents de 0 sont :

le naturel 1

les images de 1 par les applications $+1$, $+1$ $+1$, ...

(il y a là, évidemment, un axiome, non explicité dans ce texte).

Soit donc a et b deux naturels différents de 0. Alors il existe deux naturels, éventuellement nuls, p et q tels que :

$a = 1 + n$, $b = 1 + q$

$ab = (1 + n)(1 + q) = 1 + n + q + nq$

Cela exprime que 1 est inférieur à ab (axiomes t_{20} et t_{19}).

Comme 0 est inférieur à 1 (t_{24}), si ab était égal à 0, on aurait $1 \leqslant 0$, ce qui entraînerait $1 = 0$ d'après (t_{27}). On ne peut donc avoir ab nul sans que a ou b le soit.

Remarque :

Pousser le raisonnement ci-dessus ferait sentir la nécessité d'une axiomatique plus rigoureuse pour l'ensemble **N** : on serait amené, d'une manière certaine, au système d'axiomes de Péano. Bien sûr, pour une motivation plus profonde, il faudra exhiber des structures qui ressemblent à celle de $(\mathbf{Z}, +, \times)$ et pour lesquelles on puisse avoir $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $ab = 0$ (anneau non intègre).

Faute d'une telle exhibition, l'envie ne sera pas grande d'en savoir plus sur le "pourquoi" du théorème 32.

Thème de réflexion

Formuler, en termes précis, l'axiome non explicité dont il est question plus haut et construire le déductogramme de la démonstration du théorème 32.

3°) *Retour sur les ensembles de multiples*

On a annoncé, à la fin du paragraphe 2, que $\times p$ est un *isomorphisme* de $(\mathbf{Z}, +)$ vers $(M_p , +)$, si $p \neq 0$.

On sait déjà que c'est un morphisme. Nous sommes en mesure de démontrer maintenant que $\times p$ est une bijection de source **Z** et de but M_p , si toutefois p n'est pas nul.

Supposons, en effet, que deux entiers *différents* a et b aient même image par $\times p$. Alors $ap = bp$, d'où $ap - bp = 0$, $(a - b)p = 0$ et $p = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $p \neq 0$.

Remarquons que M_0 (qui en vertu du théorème t_{11} n'est autre que $\{0\}$) *n'est pas* isomorphe à **Z**.

Soit p un entier non nul : puisque l'application $\times p$ est une bijection de **Z** vers M_p , sa réciproque est aussi une application, mais de M_p vers **Z**.

Nous noterons $: p$ cette application.

Il est immédiat de contrôler que $: p$ est un morphisme relativement aux structures $(M_p ,+)$ et $(\mathbf{Z},+)$.

De plus, si p est un naturel et si on définit dans M_p une relation $\leqslant$ par :

"$a \leqslant b$ dans M_p" signifie "$a \leqslant b$ dans Z",

alors $(\times p)$ réalise un morphisme de $(Z,\leqslant)$ vers $(M_p, \leqslant)$ et $(: p)$ réalise un morphisme de $(M_p, \leqslant)$ vers $(Z,\leqslant)$.

Cette remarque sera précieuse lorsqu'on voudra construire l'ensemble D des décimaux: il s'agira essentiellement de **prolonger** les applications $(: 10^n)$, initialement définies sur $M\ 10^n$, à Z tout entier de manière que le prolongement réalise un morphisme de $(Z,\leqslant)$ vers $(D,\leqslant)$, la relation $\leqslant$ étant préalablement définie dans D.

Thème de réflexion

p et q sont deux entiers non nuls ; $(: p)$ et $(\times q)$ sont donc des *bijections*. Quel est l'ensemble désigné par E dans le schéma ci-dessous ?

(en toute rigueur, les deux symboles $(\times q)$ utilisés sur ce diagramme ne désignent pas la même application : quelle relation y a-t-il entre leurs sources, leurs buts, leurs graphes ? La réponse explique pourquoi cela "marche quand même").

$$\begin{tikzcd} M_p \arrow[r, mapsto, "(:p)"] \arrow[d, mapsto, "(\times q)"'] & Z \arrow[d, mapsto, "(\times q)"] \\ E \arrow[r, mapsto, "(:p)"] & M_q \end{tikzcd}$$

Sachant que deux des ensembles du schéma sont égaux, que peut-on dire de p et de q (envisager tous les cas possibles) ? Même question pour trois ensembles égaux.

4°) *Equations pour la structure $(Z,+,\times)$*

t_{33} L'équation d'inconnue x : $ax = b$ où a et b sont des entiers, a une solution et une seule, élément de Z si et seulement si $a \neq 0$ et $b \in M_a$; si $a = 0$ et $b = 0$, tout entier est solution ; dans tous les autres cas, l'équation n'a pas de solution dans Z.

Ce théorème résulte immédiatement du paragraphe précédent.

Ici se place évidemment (et traditionnellement) un chapitre dont le contenu essentiel est constitué par de nombreux exercices de résolution d'équations telles que :

$$2(7 - x) - (x - 4) - 5x = 9x - 33$$

La difficulté essentielle provient, rappelons-le, de ce qu'il est convenu d'appeler "calcul algébrique".

Ici, on finit par tomber sur :

$$17x = 51$$

Comme $51 \in M_{17}$, l'équation a pour solution unique l'entier 3. La fin de la résolution peut être ainsi présentée :

$$\begin{array}{r|l} 17x = 51 & \;:17 \\ x = 3 & \end{array}$$

L'utilisation des applications $+a$ et $\times b$ permet d'aborder ici un autre type de problème : celui de la résolution des conjonctions d'équations à deux inconnues.

Donnons d'abord un exemple simple.

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Ce système est avantageusement remplacé par :

$$7 \xleftarrow{-y} x \xrightarrow{+y} 19$$

Puisque $-y$ est une bijection dans $\mathbf{Z}$, ce schéma équivaut à

$$7 \xrightarrow{+y} x \xrightarrow{+y} 19$$

19 est donc l'image de 7 par l'application $+y$ $+y$, soit $+(y + y)$ ou encore $+2y$:

$$\begin{array}{r|l} 7 + 2y = 19 & \;-7 \\ 2y = 12 & \;:2 \\ y = 6 & \end{array}$$

On trouve alors immédiatement $x = 13$.

Autre exemple

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5x + 7y = 10 \end{cases}$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$3x \xrightarrow{+4y} 7$$
$$5x \xrightarrow{+7y} 10$$

Le schéma suivant explique mieux qu'un long discours la succession des opérations :

$$\begin{tikzcd}
10 \arrow[d, "\times 3"'] & 5x \arrow[l, "+7y"'] \arrow[dr, "\times 3"] & & 3x \arrow[r, "+4y"] \arrow[dl, "\times 5"'] & 7 \arrow[d, "\times 5"] \\
30 & & 15x \arrow[ll, "+21y"'] \arrow[rr, "+20y"] & & 35
\end{tikzcd}$$

$$\text{D'où}\quad 30 \xmapsto{(-21y)\,(+20y)} 35 \qquad 30 \xmapsto{(-y)} 35 \qquad y = 5^{-}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x - 20 = 7 & (+20) \\ 3x = 27 & (:3) \\ x = 9 & \end{array}$$

On remarquera que le schéma

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, mapsto, "(+a)"] \arrow[d, mapsto, "(\times b)"'] & \square \arrow[d, mapsto, "(\times b)"] \\ \square \arrow[r, mapsto, "(+ab)"] & \square \end{tikzcd}$$

est utilisé ici deux fois, ce qui montre son importance.

Pour ne pas conclure

Il n'est pas dans mon intention de recommencer la rédaction du programme de la classe de quatrième, aussi le lecteur ne devra pas s'étonner si cet article n'a même pas atteint les buts proposés en introduction.

Il n'a été question que de bien peu de choses.

On a parlé de Z en disant que les méthodes d'étude de celui-ci seront valables aussi pour D, lequel est resté dans l'ombre. Quant à R, on n'a même pas écrit son nom. Il n'a pas été question, non plus, de géométrie.

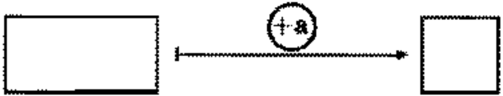
Ma seule ambition était de faire sentir que les notions étudiées dans les classes précédentes, et notamment la notion d'application ("sans laquelle, dit Godement, on ne peut rien faire et avec laquelle, au contraire, [jointe à la notion d'ensemble] on peut tout faire") peuvent, en quatrième, être utilisées bien mieux qu'elles ne le sont actuellement.

Je pense, en particulier, que si on plaçait la translation et l'homothétie *à la base* de l'étude de la géométrie, au lieu des axiomes d'incidence et de Thalès, on l'éclairerait d'un jour tout nouveau et plus conforme à ce qui l'a précédée en cinquième.

Au moment de terminer cet article, j'en relis les premières pages et je m'aperçois que le premier déductogramme présenté :

$$\boxed{} \xmapsto{\bigcirc} \square$$

ressemble étrangement (ou, en langage savant : formellement) au schéma d'une des applications (+a) ou (×a) dont il a été question plus loin.



N'est-ce qu'une apparence trompeuse ?

Je ne crois pas, et je ne puis mieux terminer qu'en proposant au lecteur, mon collègue, ce dernier thème de réflexion : qu'y a-t-il derrière cette ressemblance ?