Quelques thèmes d'exercices en classes de quatrième et de troisième

par René GAUTHIER

Le but de ces exercices n'est pas la découverte ou la mathématisation, mais l'exploitation et l'utilisation de résultats acquis dans des situations plus ou moins "concrètes". Le calcul avec des rationnels et des décimaux y tient une grande place ; nous devons faire du calcul, mais peut-être pas n'importe quel calcul, et n'importe comment. Il nous faut faire preuve d'imagination pour susciter un nouvel intérêt chez l'enfant.

1 — Développements - Puissances de (a + b)

a et b étant des réels, ou des décimaux, il s'agira, dans un premier temps, de trouver une autre écriture de $(a + b)^2$.

$$(a+b)^2 \qquad \left\{\begin{matrix} (a + \ldots) \,.\, (a+b) \\ (\ldots + b) \,.\, (a+b) \end{matrix}\right\} \qquad a^2 + ab + ba + b^2$$

Il est indispensable de préciser quelles propriétés sont mises en jeu pour arriver à la forme classique $a^2 + 2ab + b^2$.

Ce développement pourra éventuellement être représenté par un diagramme sur lequel sont mises en évidence les étapes du calcul et les regroupements opérés :

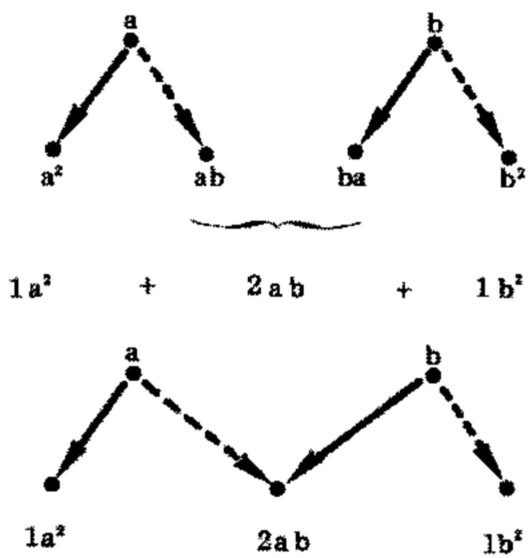
Flèche $\longrightarrow$: signifie "multiplier par a"

Flèche $\dashrightarrow$: signifie "multiplier par b"

Si cette activité s'arrête là, c'est vraiment sans intérêt; mais on peut à peu de frais poursuivre la représentation avec l'exposant 3, puis 4 etc ... Il est bien évident que cette recherche suppose deux conditions :

— en aucun cas ne faire "retenir" la formule trouvée !

— laisser trouver l'élève, qui travaille sur la représentation (voir ci-contre).



$(a + b)^3$ s'obtient à partir de $(a + b)^2$

$(a + b)^3 = (a + b)^2 \ . (a + b)$

$$\begin{cases} (a^2 + \dots + \dots) \ . \ (a + b) \\ (\dots + 2ab + \dots) \ . \ (a + b) \\ (\dots + \dots + b^2) \ . \ (a + b) \end{cases}$$

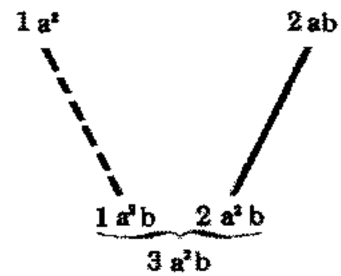
Par regroupements : le coefficient 3 de $a^2 b$ provient

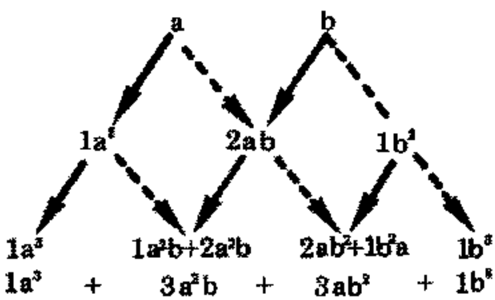
— du coefficient 1 de a^2

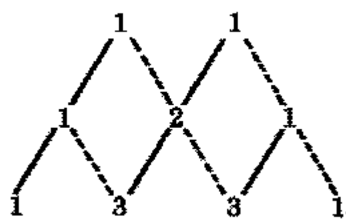
— du coefficient 2 de ab

La représentation favorise la découverte

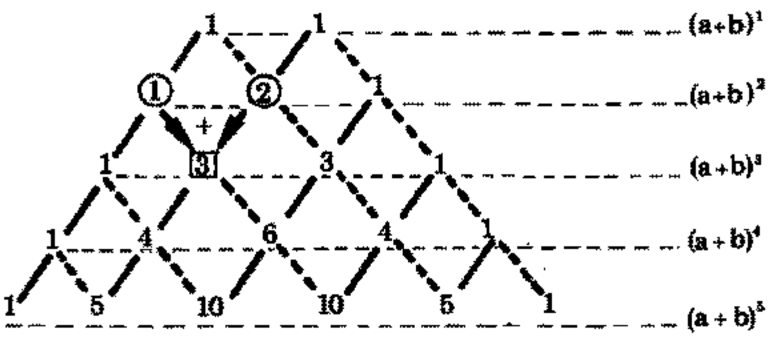
- d'une part de la fabrication des monomes $a^x b^y$
- d'autre part de l'obtention des coefficients à partir des coefficients du développement précédent.







Triangle de Pascal pour la fabrication des coefficients



2 — Equations - Entiers et rationnels

Cet exercice m'a été inspiré par l'étude d'une démonstration sur l'équipotence de **Q** et **N** (voir certains manuels de Terminale, Vissio par exemple).

Première activité

Trouver tous les couples, éléments de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, solutions de l'équation

$$x + y = 4$$

Même question avec les équations suivantes :

$$x + y = 3 \qquad x + y = 2 \qquad x + y = 1$$

On pourra éventuellement représenter chaque couple solution par un point $M(x, y)$ dans le plan muni d'un repère.

Seconde activité

Trouver tous les couples (a, b) éléments de $\mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ solutions de

$$|a| + b = 4$$

Même question avec les équations suivantes dans $\mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$

$$|a| + b = 3 \qquad |a| + b = 2 \qquad |a| + b = 5$$

Si $p \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble des solutions de $|a| + b = p$ est désigné par S_p ;

Exemple :

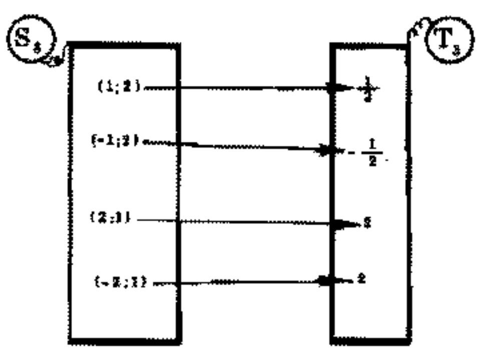
$$S_3 = \{(1\,;2), (-1;2), (-2;1), (2;1)\}$$

Troisième activité

Reprendre l'ensemble des solutions S_p pour un naturel p donné ; à chaque couple solution (a,b), associons le rationel a/b en éliminant les *écritures non irréductibles ;*

On obtient un ensemble de rationnels que l'on peut désigner par T_p par exemple :

Exemple avec p = 3



L'élève sera amené à constater un certain nombre de particularités :

- si $u \in T_p$, $1/u \in T_p$
- si $u \in T_p$, $(-u) \in T_p$

Les résultats de ces recherches peuvent faire l'objet d'une mise en ordre sous la forme d'un tableau qui peut se présenter sous la forme suivante :

	Equation dans $Z^* \times N^*$	S_p	T_p	T_p ordonné par $\leqslant$
$p = 2$	$\lvert a \rvert + b = 2$	$(1 ; 1)$, $(-1 ; 1)$	$1 ; -1$	$-1 ; 1$
$p = 3$	$\lvert a \rvert + b = 3$	$(1 ; 2)$, $(-1 ; 2)$ $(2 ; 1)$, $(-2 ; 1)$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2$	$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$
$p = 4$	$\lvert a \rvert + b = 4$	$(1 ; 3)$, $(-1 ; 3)$, $(2 ; 2)$, $(-2 ; 2)$, $(3 ; 1)$, $(-3 ; 1)$	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}$	$-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3$
$p = 5$	$\lvert a \rvert + b = 5$	----------	-------	--------
$P = 6$	$\lvert a \rvert + b = 6$	----------	-------	--------

etc ...

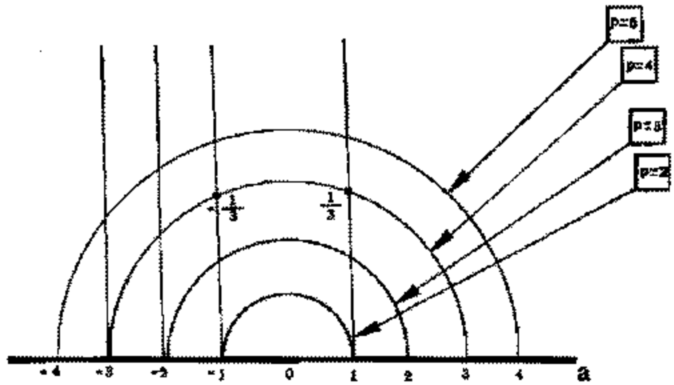
Quatrième activité

Représentations

Chaque rationnel $\frac{a}{b}$ élément de T_p sera représenté par un point dans un système particulier de repérage, constitué par des demi-cercles concentriques, et des perpendiculaires au diamètre commun passant par les points de division sur ce diamètre (voir figure).

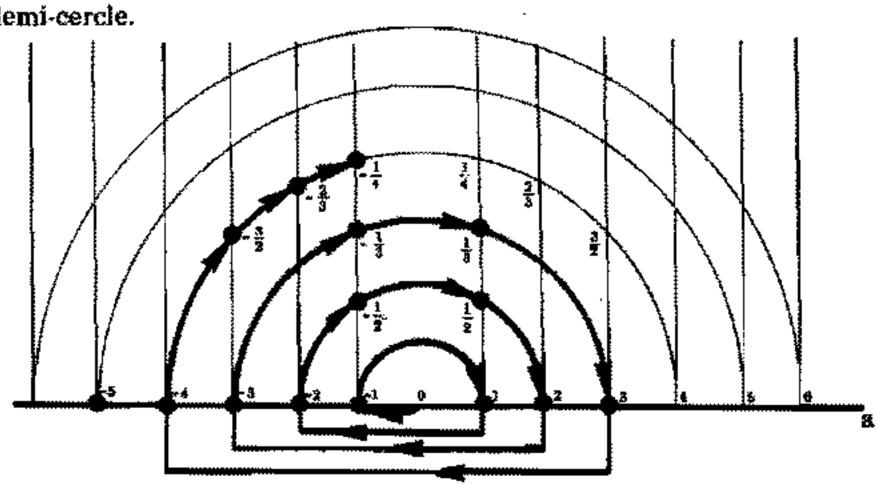
$\frac{a}{b} \in T_p$: le point associé est marqué sur le demi-cercle d'ordre p et sur la perpendiculaire correspondant à l'abscisse a.

Exemple : $-\frac{1}{3} \in T_4$: demi-cercle d'ordre 4, perpendiculaire $x = -1$



La représentation finale pour $2 \leqslant p \leqslant 5$ est la suivante.

Tous les éléments d'un ensemble T_p sont représentés par des points d'un même demi-cercle d'ordre p. Ils sont "ordonnés" sur ce demi-cercle.



On peut alors définir une suite de rationnels des T_i.

La suite

$$\Big(0 \,;\, \underbrace{-1 \,;\, 1}_{p=2} \,;\, \underbrace{-2 \,;\, \frac{-1}{2} ; \frac{1}{2} ; 2}_{p=3} \,;\, \underbrace{-3 \,;\, \frac{-1}{3} ; \frac{1}{3} ; 3}_{p=4} \,;\, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{p=5} ; \ldots\Big)$$

est associée à une suite de points sur la représentation (voir les flèches ...)

A-t-on un ordre total sur **Q** ? Pour s'en convaincre, il suffit (O ayant été placé en tête) de montrer que tout rationnel r a une écriture irréductible $\frac{a}{b}$ unique avec

$a \in \mathbf{Z}^*$, $b \in \mathbf{N}^*$, a et b étrangers, $|a| + b = p$ (p est un naturel)

De là à faire sentir que **Q** est dénombrable ...

3 — Opérateurs rationnels

La plupart des opérations gratuites sur les rationnels qui sont proposées comme exercices d'entraînement au calcul ne présentent en général aucun intérêt pratique et n'amusent personne.

Les utilisateurs des mathématiques envisagent presque toujours (sans le dire) les rationnels comme des opérateurs : pour le physicien, le chimiste, l'épicier, le banquier, etc ..., $(\mathbf{Q}, \times)$ opère sur $\mathbf{N}$ ou sur $\mathbf{Z}$, ou encore sur $\mathbf{D}$.

D'où l'intérêt pour notre enseignement d'utiliser au maximum les rationnels dans cette optique, pour ce qui concerne le calcul numérique au moins.

"Prendre les 3/4 de x"

$$\boxed{x} \longrightarrow \left(\times\frac{3}{4}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{3}{4}\cdot x}$$

"Prendre 5% de y"

Cet opérateur revient à "prendre les 5/100 de y" ou encore "prendre 0,05 y"

$$\boxed{y} \longrightarrow (\times 5\%) \longrightarrow \boxed{\frac{5}{100}\cdot y} \quad \text{ou} \quad \boxed{0{,}05\cdot y}$$

Ces banalités étant dites, il convient sans doute, en quatrième et troisième, d'utiliser au maximum les propriétés de la structure de corps pour démystifier la règle "de trois" et certains calculs sur les pourcentages ; ce n'est pas notre activité principale, mais une bonne compréhension des structures doit conduire à un bon maniement du calcul pour certaines applications.

Certains utilisateurs des mathématiques auraient raison de nous vilipender si, au sortir de troisième, nos élèves connaissent ce qu'est un corps, un vectoriel, une distance, mais ignorent tout de l'usage des fractions dans certaines activités.

Une pédagogie rénovée n'est en rien contradictoire avec un bon usage du calcul, bien au contraire ; un certain progrès consiste, à mon sens, à remettre certains calculs à leur juste place, leur donner moins d'importance que par le passé, mais en trouver une présentation qui exploite au mieux les acquisitions nouvelles et intéresse l'enfant.

La fameuse "règle de trois" chère à l'Académie des sciences est un exemple parmi d'autres. A l'apprentissage stupide d'une mécanique ésotérique, au rabâchage rebutant pour tant de gosses, il faut substituer une élégance et une compréhension facilitées par l'usage de propriétés simples et efficaces.

Associativité et propriétés d'un corps commutatif :

$$a.\frac{b}{c} = (a.b).\frac{1}{c} = (a.\frac{1}{c}).b$$

$$a.\frac{b}{c}.\frac{d}{e} = (a.b.d).(\frac{1}{c}.\frac{1}{e}) = \text{ etc ...}$$

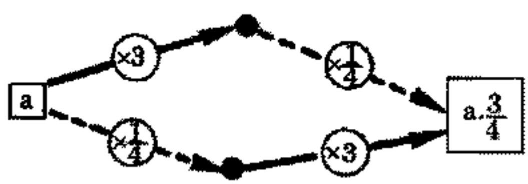
Rationnels inverses

$$x.\frac{b}{c} = y \iff x = y.\frac{c}{b}$$

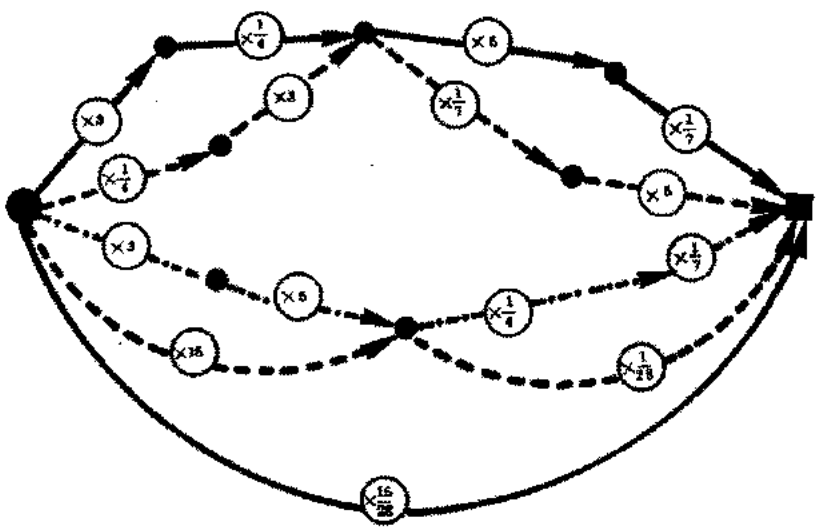
Exemples

Deux "chemins" possibles pour "prendre les 3/4 de ..."

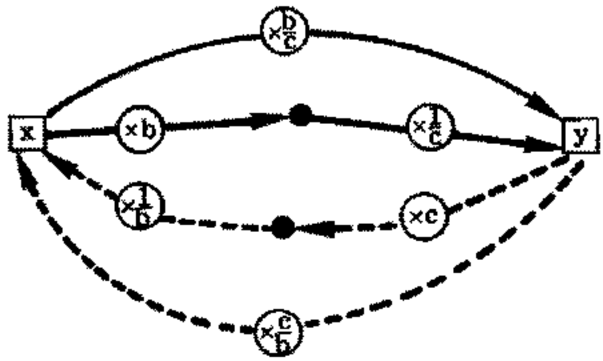
Multiplier puis diviser, ou diviser puis multiplier ...



Divers chemins pour "prendre les 3/4 de ... puis les 5/7 du résultat".



Usage d'opérateurs inverses ; application réciproque.



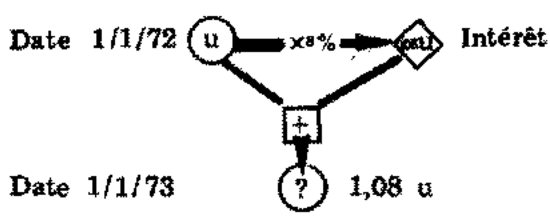
Les *pourcentages* sont un autre exemple de rationnels (décimaux) utilisés comme opérateurs. Certains maîtres n'aiment pas beaucoup ces exercices à caractère économique qui ont un relent de capital : et pourtant, dans une classe, combien d'élèves dont les parents paient les intérêts d'un emprunt, la T.V.A. ?

Sans faire une étude des intérêts composés dans cette classe, on peut envisager quelques activités de calcul sur la question : il faut, très tôt, initier nos élèves à certaines questions économiques ; c'est une excellente occasion de discussion et de critique ...

Première activité : explication élémentaire de "la somme u est placée à 8% en un an" ; intérêt ; capital final.

Seconde activité : représentation

Usage de l'opérateur 8%

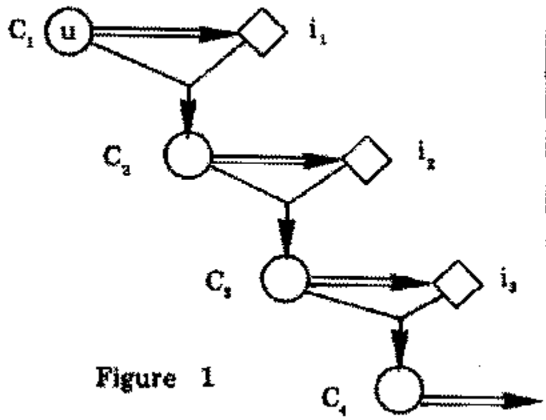


L'algorithme qui précède peut sans peine être répété :

— si, au début de l'année (i + 1) on prend comme capital la somme obtenue à la fin de l'année (i), alors c'est un placement à intérêts composés (figure 1).

— si, au début de l'année (i + 1) on prend comme capital initial u, alors il s'agit d'un placement à intérêt simple (figure 2)

Cet exercice sera l'occasion de calcul littéral éventuellement.



C	i
$C_1 = u \ldots$	
	$i_1 = 0{,}08\,u$
$C_2 = u + i_1$	
	$i_2 = 0{,}08\,C_2$
$C_3 = C_2 + i_2$	
	$i_3 = 0{,}08\,C_3$
$C_4 = C_3 + i_3$	

Figure 1

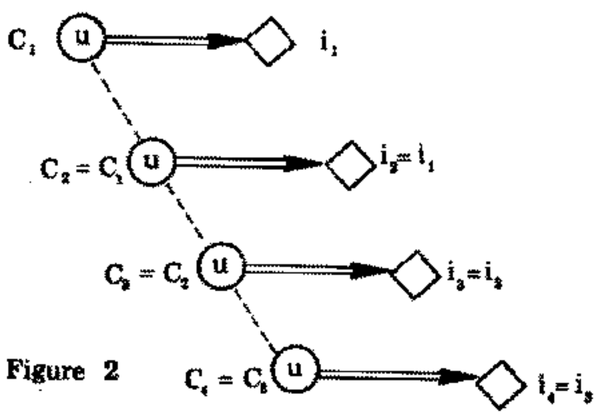


Figure 2

4 — Statistiques

Les statistiques "ne-sont-pas-au-programme" : mais elles offrent une mine d'exercices à la fois riches et variés dans lesquels on a l'occasion de faire du calcul, d'utiliser des pourcentages, des rationnels, des arrondis, diverses représentations. Le calcul est fortement motivé.

Les exemples sont très nombreux : il n'est donc pas question ici d'en donner une liste ; tout au plus, sur un exercice, voyons ce qu'il est possible de faire.

Situation :

Une élection, avec trois candidats ; on s'intéressera aux résultats dans deux communes désignées par X et Y.

commune X	commune Y
candidat A : 2 140 voix	candidat A : 936 voix
B : 3 080 voix	B : 2 040 voix
C : 836 voix	C : 1 200 voix
D : 1 400 voix	D : 300 voix
bulletins nuls : 230	bulletins nuls : 26
électeurs inscrits : 8 540	électeurs inscrits : 4 836

Il n'est pas sans intérêt de comparer les résultats obtenus par les candidats dans ces deux communes : cette comparaison ne saurait être faite sur ces résultats bruts. Il convient d'en donner une représentation, un codage qui tienne compte soit de la totalité des électeurs inscrits dans chaque commune, soit du total des votes exprimés.

Commune X : A a obtenu 2 140 voix pour 7 686 votes exprimés

Codage : $(A, X) \longmapsto \dfrac{2\,140}{7\,686}$

Commune Y : A a obtenu 936 voix pour 4 502 votes exprimés

Codage : $(A, Y) \longmapsto \dfrac{936}{4\,502}$

La comparaison des rationnels obtenus est possible, à condition de donner pour chacun d'eux une autre écriture avec même dénominateur.

La recherche d'un ppcm est possible, mais fastidieuse.

On cherchera à trouver comme dénominateur commun une puissance de dix, par exemple 100.

Mais est-ce possible ?

Il sera nécessaire de prendre comme numérateur un arrondi, une valeur approchée décimale d'un quotient.

$$\frac{2\,140}{7\,686} = \frac{u}{100}$$

$$7686 \xrightarrow{\times \frac{1}{76,86}} 100$$

donc

$$2140 \xrightarrow{\times \frac{1}{76,86}} u$$

Nouveau codage (A, X) $\longmapsto \frac{u}{100}$ ou u%

$$\frac{936}{4\,502} = \frac{v}{100}$$

$$4502 \longrightarrow \times\frac{1}{45{,}02} \longrightarrow 100$$

$$936 \longrightarrow \times\frac{1}{45{,}02} \longrightarrow v$$

Nouveau codage (A, Y) $\longmapsto \frac{v}{100}$ ou v%

Comparer (A, X) et (A, Y) revient à comparer u et v.

Il est inutile d'insister sur toutes les variantes que peut comporter cette activité ainsi que sur les représentations que l'on peut donner des résultats : surfaces rectangulaires, surfaces circulaires, bâtons, etc ...

Autres exercices : calculs de moyennes, d'écarts.

5 — **Etude d'une facture de l'E.D.F. ...** (par exemple)

Cet exercice favorisera des discussions intéressantes, des calculs sur les décimaux, sur des questions d'arrondi, des calculs de pourcentages.

Voici un exemple de facture, très légèrement simplifiée : on a supprimé les "coefficients" pour l'électricité ; inutile de dire que chaque collègue pourra trouver de telles factures dans ses archives personnelles, (voir tableau page 530).

Voici quelques questions qui peuvent se poser :

— qu'est-ce qu'un relevé de compteurs ? unités de mesure ?

— qu'est-ce qu'une répartition par tranches ? une Collectivité locale ?

— calcul du montant hors taxe ? Signification de H.T. ?

— Calcul du pourcentage de T.V.A.

— arrondi de certains résultats.

Autres activités : fournir une facture incomplète ; établir une facture d'après des relevés ; représentation des consommations (fonctions affines) ; trouver des fautes de calcul dans une facture complète.

	Relevés de compteur		Prix unitaire hors taxes et répartition						Abonnement	Montant H. taxes	Taxes		Montant total avec taxes
			1ere tranche		2e tranche		3e tranche						
	Ancien	Nouveau	Prix unitaire en F.	KWH ou Th.	Prix unitaire	KWH ou Th.	Prix unitaire	KW ou Th.			Collectivités locales	T.V.A.	
EDF	00429	00789	38,46	64	38,46	32	10,35	264	12,24	76,48	5,16	13,43	95,07
GDF	02146	02592	04,59	446					30,55	51,03	000	8,97	60,00
											Total		155,07