

## Les cartes perforées en classe de sixième

par J. M. PROUVEUR (C.E.S. de Rives)

### 1 — Matériel nécessaire

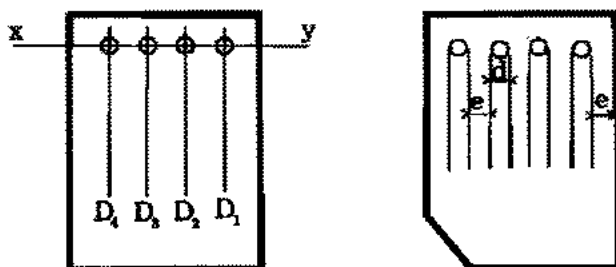
Un paquet de 25 cartes bristol 150 X 100 mm.

### 2 — Préparation des cartes

2.1 8 cartes sont nécessaires. On les coupera en deux parties égales de façon à obtenir 16 cartes (75 X 100) facilement maniables par les petites mains des élèves.

Opération simple mais néanmoins quelques difficultés manuelles (repérage incorrect du milieu de la carte sur les deux bords, découpage en escaliers ...).

2.2 Chaque carte sera percée, dans sa partie supérieure, de quatre trous de telle façon que, les 16 cartes réunies, les quatre séries de trous coïncident. (Utiliser une perforatrice simple : matériel personnel des élèves ou matériel emprunté à la technologie).



Ici se place donc un problème important de repérage dans le plan : repérage du centre des trous.

La méthode utilisée dépend de la perforatrice. Pour un appareil simple, on peut faire deux remarques intéressantes :

a) Les centres des quatre trous doivent être situés sur une même ligne horizontale  $xy$  (repérage dans le sens de la hauteur de la carte). Il suffit alors d'engager, à fond, la carte dans la perforatrice pour déterminer cette ligne ; les élèves le remarquent aisément.

b) Pour le repérage dans le sens de la largeur de la carte, il s'agit de tracer les droites (D). En effet, la perforatrice utilisée possède sur le devant de la mâchoire supérieure, un trait vertical de repère du centre du trou. Il suffit de placer ce trait en coïncidence avec l'une des droites (D).

Les élèves ont tendance à vouloir tracer ces droites équidistantes (l'intervalle étant de 15 mm). Les laisser faire pour une carte ; ils remarquent alors que les trous 1 et 4 sont plus éloignés des bords de la carte que des trous voisins (respectivement 2 et 3).

En examinant attentivement la carte précédente, certains élèves trouvent la solution. Pour d'autres, c'est plus difficile ... On peut alors, pour occuper les meilleurs, en attendant que les autres aient compris, proposer de généraliser : pour 5 trous, pour 6 trous, pour une autre largeur de carte ... et arriver à la formule suivante :

$$e = \frac{L - n \times d}{n + 1}$$

e : espace entre chaque trou bord à bord.

L : largeur de la carte.

n : nombre de trous.

d : diamètre d'un trou.

Le diamètre d'un trou était de 6 mm. On obtenait  $e = 10$  mm et il reste un millimètre ; d'où la réflexion d'un élève : "On aurait dû couper les cartes à 74 mm au lieu de 75".

*Remarque :*

Ce millimètre n'apparaît pas chez tous : il disparaît ou encore il en reste deux. (découpage non précis, épaisseur des traits, reports des distances ...).

Les distances s'établissent ainsi :

- bord gauche de la carte à centre C4 ou bord droit à centre C1 = 13 mm.
- centres C4 - C3, C3 - C2, C2 - C1 = 16 mm.

2.3 Nous avons besoin de repérer les trous : 1er, 2ème, 3ème et 4ème trou. Le repérage se fera de préférence de la droite vers la gauche (pour l'utilisation en numération).

Donc nécessité de définir une droite et une gauche de la carte. Par comparaison avec les cartes perforées de l'industrie (quelques élèves en amènent), on coupera un coin de la carte.

On doit alors établir une convention : par exemple, le coin encoché sera la partie gauche de la carte et les élèves devront toujours tenir le paquet de cartes dans leur main gauche, l'encoche du côté du pouce.

Cette convention est fondamentale et indispensable.

#### 2.4 Résultats

Sur une classe de 24 élèves, pas de difficultés majeures : quelques cartes doivent être refaites dans certains paquets. La coïncidence des

trous n'est pas toujours exactement réalisée mais un écart de 1 à 2 mm n'est pas gênant si l'on utilise un "pointeur" d'un diamètre plus petit que celui des trous (clou, réservoir de stylo bille ...).

### 3 - Différenciation des cartes

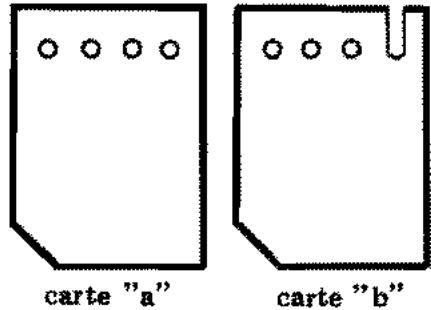
Commençons par deux cartes. Une possibilité s'offre en considérant le trou n° 1.

- On peut laisser ce trou comme il est.
- On peut encocher ce trou.

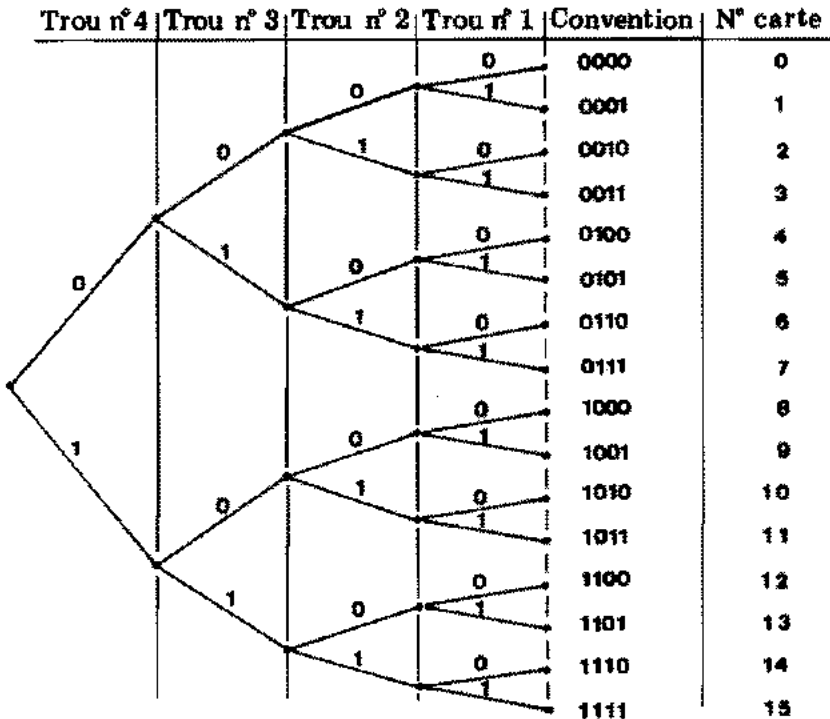
La carte "a" reste sur le pointeur quand celui-ci est introduit dans le trou n° 1 ; la carte "b" tombe sur la table. D'où création d'une méthode de triage.

Il est intéressant d'établir une deuxième convention :

- le trou non modifié est noté 0
- le trou encoché est noté 1



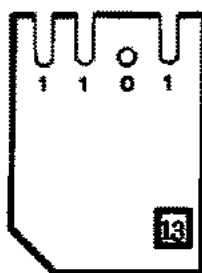
On peut alors faire l'arbre suivant :



Présentation finale de deux cartes :



carte n° 6



carte n° 13

#### 4 — Triage d'une carte

Les élèves mélangent les cartes. Le problème à résoudre : "comment obtenir la carte 13 (par exemple) et quel est le nombre de manipulations à prévoir pour extraire une carte donnée ?".

##### 4.1 Premier problème : Obtention de la carte 13.

*Première méthode :* On utilise l'arbre précédent. La carte 13 correspond à la convention 1101.

L'élève prend le paquet de 16 cartes dans sa main gauche, l'encoche du côté du pouce.

Le pointeur est mis dans le trou n° 1. Celui-ci, noté 1, est encoché pour la carte 13 donc elle se trouve dans l'ensemble des cartes qui tombent. On élimine les cartes restées sur le pointeur.

Les cartes tombées sont reprises dans la main gauche. Le pointeur est mis dans le trou n° 2. Celui-ci, noté 0, n'est pas encoché donc la carte 13 reste sur le pointeur. On élimine les cartes tombées.

Le pointeur est mis dans le trou n° 3, noté 1. La carte 13 est parmi celles qui tombent.

On prend les cartes tombées. Le pointeur est mis dans le trou n° 4, noté 1. La carte 13 est celle qui tombe.

*Deuxième méthode :* Après avoir étudié la numération binaire, on fait remarquer que la convention prise fait correspondre à un nombre exprimé en base dix, le même nombre exprimé en base deux.

Reprenons le triage de la carte 13. L'élève devra d'abord transformer 13 (base dix) en base deux (sans utiliser l'arbre) et extraire, ensuite, comme précédemment, la carte.

L'obtention de la carte correcte est pour lui un moyen de vérifier que son changement de base est exact.

Le problème inverse peut être traité. On donne à l'élève un nombre en base deux (inférieur à 1111). L'élève effectue la transformation de ce nombre en base dix et il vérifie ensuite, par triage, que la carte obtenue possède le même nombre.

Les élèves prennent ces exercices comme un jeu. Ils sont très intéressés et très vite ils ne font plus d'erreurs dans le triage d'une carte et dans le changement de base.

4.2 Deuxième problème : Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour trier une carte donnée ?

L'arbre tracé précédemment donne la réponse.

On part de seize cartes :

Le pointeur est mis dans le trou n° 1.

Combien de cartes restent sur le pointeur ?

Combien de cartes tombent ?

On peut les compter et, mieux, lire le résultat sur l'arbre.

Le pointeur est mis dans le trou n° 2. Des huit cartes qui restent après le n° 1, le pointeur permet d'en conserver quatre... etc...

On obtient la succession suivante :

— au départ : 16 cartes.

— après le trou n° 1 : 8 cartes.

— après le trou n° 2 : 4 cartes.

— après le trou n° 3 : 2 cartes.

— après le trou n° 4 : 1 carte .

De nombreuses autres questions peuvent être posées :

Peut-on obtenir la carte en "pointant" les trous dans un ordre quelconque ?

Combien d'opérations seraient nécessaires pour trier une carte si l'on partait d'un nombre plus important de cartes : 17, 18, 32, 33 ... ?

Sur un thème donné, les exercices sont nombreux et variés. A chaque fois, l'élève peut répondre en utilisant l'expérience et l'arbre. Mais il est bon d'alterner les méthodes : commencer d'abord par l'expérience et retrouver le résultat en lisant l'arbre ; ensuite, lire le résultat sur l'arbre et le vérifier par l'expérience.

##### 5 — *Rangement des cartes*

Peut-on classer les cartes à partir d'un désordre quelconque ?

La méthode est donnée directement aux élèves :

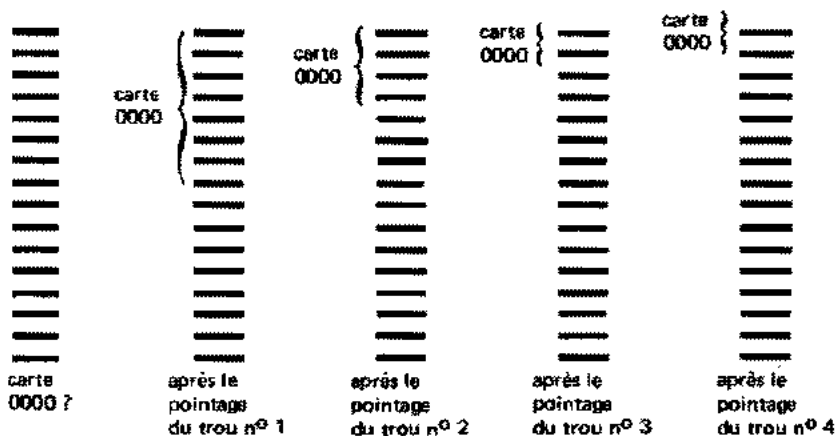
Pointeur dans le trou n° 1. Les cartes restant sur le pointeur sont placées derrière le tas de cartes qui tombent (recueillir ces cartes sans les mélanger).

Pointeur dans le trou n° 2. Les cartes qui restent sur le pointeur sont placées derrière le tas de cartes qui tombent.

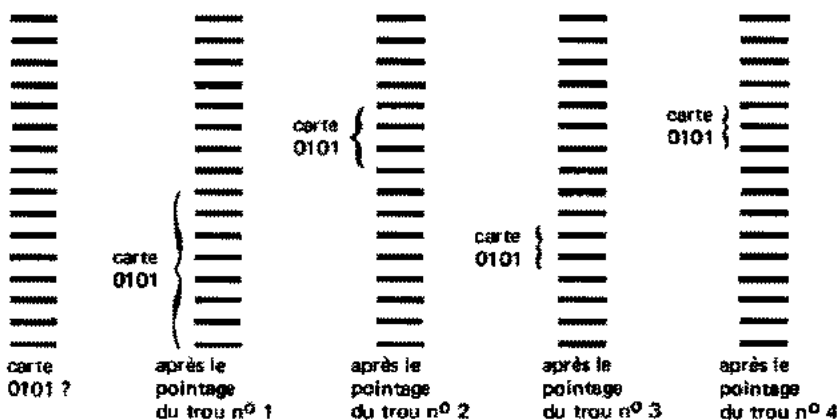
Procéder de même pour les trous n° 3 et n° 4.

Faire trouver cette méthode, même par les meilleurs élèves, me semble délicat. On les y amène en les aidant beaucoup. Là aussi, l'arbre sera l'élément essentiel de notre raisonnement.

Pour expliquer, il est bon de suivre une carte donnée.  
 Suivons, par exemple, la carte n° 0 (convention : 0000).



Prenons un deuxième exemple : la carte n° 5 (convention : 0101).



Suivre la carte dans cette manipulation demande un effort certain de la part des élèves. Ils réussissent néanmoins car ils sont intéressés.

De nombreuses questions peuvent être aussi posées sur cette manipulation :

Ce classement est-il indépendant de l'ordre dans lequel on "pointe" les trous ?

Existe-t-il d'autres méthodes de rangement ?

Si, au lieu de mettre, derrière, le tas qui reste sur le pointeur, on le mettait devant, quel rangement obtiendrait-on ?

Si, au lieu de pointer les trous dans l'ordre 1 - 2 - 3 - 4, on les pointait dans l'ordre 4 - 3 - 2 - 1, que se passerait-il en mettant à chaque fois le tas restant en arrière ? en le mettant à chaque fois en avant ?

Et si l'on alternait, une fois un tas en arrière, une fois un tas en avant ?

Et pour répondre à chaque question, l'élève dispose des deux méthodes précédentes : l'expérience et le raisonnement.

Pour terminer cette série d'exercices, l'élève suivra, par le raisonnement, l'ensemble des cartes. L'élève mélange ses cartes et relève sur une feuille les numéros des cartes. A partir de ce moment, et uniquement par le raisonnement, il doit déterminer la disposition des cartes après le pointage du trou n° 1, du trou n° 2, du trou n° 3 et du trou n° 4.

Il vérifiera, ensuite, par la manipulation que son travail a été correct.

Prenons un exemple :

1011	0110	0100	0000	0000
0110	0100	0000	1000	0001
0100	1010	1000	0001	0010
1010	0010	1100	1001	0011
0101	0000	0101	1010	0100
0001	1000	0001	0010	0101
0111	1110	1001	1011	0110
0010	1100	1101	0011	0111
0011	1011	0110	0100	1000
0000	0101	1010	1100	1001
1000	0001	0010	0101	1010
1001	0111	1110	1101	1011
1110	0011	1011	0110	1100
1101	1001	0111	1110	1101
1111	1101	0011	0111	1110
1100	1111	1111	1111	1111
au départ	après le	après le	après le	après le
ordre	pointage	pointage	pointage	pointage
quelconque	du trou n° 1	du trou n° 2	du trou n° 3	du trou n° 4

## 6 - La réunion

Il faut déterminer des sous-ensembles de l'ensemble des 16 cartes.

On peut choisir :

A = { a | a carte dont le trou n° 1 est représenté par 0 }

B = { b | b carte dont le trou n° 2 est représenté par 0 }

C = { c | c carte dont le trou n° 3 est représenté par 0 }

D = { d | d carte dont le trou n° 4 est représenté par 0 }

La réunion étant étudiée et définie précédemment, (on peut, même, l'étudier et la définir à partir des cartes perforées), on demande d'extraire quelques ensembles :

L'ensemble A, l'ensemble B, l'ensemble  $E = A \cup B$ , l'ensemble  $F = B \cup C$  ... etc...

Les élèves n'éprouvent pas de difficultés dans ces exercices.

### *Etude des propriétés de la réunion*

La commutativité :

Extraire  $E = A \cup B$ . On réunit l'ensemble A avec les cartes de l'ensemble B restant dans le tas.

Extraire  $E' = B \cup A$ . On réunit l'ensemble B avec les cartes de l'ensemble A restant dans le tas.

Ces deux manipulations sont différentes, mais on obtient le même résultat :

$$A \cup B = B \cup A$$

L'associativité :

Extraire  $H = A \cup (B \cup C)$ . On réunit à l'ensemble  $(B \cup C)$  les cartes de l'ensemble A restant dans le tas.

Extraire  $H' = (A \cup B) \cup C$ . On réunit à l'ensemble  $(A \cup B)$  les cartes de C restant dans le tas.

Extraire  $H'' = A \cup B \cup C$ . Le pointeur est mis successivement dans les trous N° 1, 2 et 3. On recueille l'ensemble des cartes restées sur le pointeur.

Conclusion ?

### 7 — L'intersection

On prend la même méthode que pour l'étude de la réunion.

Extraire  $I = A \cap B$ . Le pointeur est mis dans le trou n° 1, on conserve les cartes restant sur le pointeur. On obtient  $A \cap B$  en pointant le trou n° 2 de ces cartes et en éliminant celles qui tombent.

Les élèves doivent trouver cette méthode, sans aide. Ils la trouvent mais il leur faut réfléchir.

A titre de contrôle, on leur fait sortir  $J = B \cap C$ ,  $K = C \cap D$  ... etc ...

### *Etude des propriétés de l'intersection*

La commutativité :

Extraire  $J = B \cap C$ , puis  $J' = C \cap B$ . Les deux manipulations sont différentes et on obtient le même résultat. Conclusion ?

L'associativité :

Extraire  $L = A \cap (B \cap C)$ . Dans l'ensemble  $(B \cap C)$ , on pointe le trou n° 1. Les cartes qui restent sur le pointeur nous donnent la réponse.



Extraire  $L' = (A \cap B) \cap C$ . Dans l'ensemble  $(A \cap B)$ , on pointe le trou n° 3. L'ensemble  $L$  est formé des cartes qui restent sur le pointeur.

Extraire  $L'' = A \cap B \cap C$ . On pointe le trou n° 1. Dans les cartes qui restent sur le pointeur, on pointe le trou n° 2. Puis dans les cartes qui restent à nouveau, on pointe le trou n° 3. Comparons  $L$ ,  $L'$  et  $L''$ . Conclusion ?

Il est nécessaire, ensuite, de mélanger les exercices de réunion et d'intersection. On constate quelques confusions entre ces deux notions, mais moins que j'ai pu en constater dans une classe de sixième n'utilisant pas les cartes perforées.

### 8 — *En conclusion*

Nous venons de voir quelques utilisations des cartes perforées en sixième :

- étude de la numération binaire et transformation d'un naturel exprimé en base dix, en base deux (et réciproquement).
- étude de la réunion et de quelques-unes de ses propriétés.
- étude de l'intersection et de quelques-unes de ses propriétés.
- repérage d'un point dans un plan.
- exercices de triage d'une carte et de rangement total de l'ensemble des cartes.

Mais il est possible d'utiliser ces cartes dans d'autres domaines :

- appartenance et inclusion.
- complémentaire d'un sous-ensemble.
- ordre partiel et ordre total.
- partition d'un ensemble ... etc ...

L'avantage de ces manipulations réside surtout dans l'attrait qu'elles ont pour l'élève. Et à partir du moment où l'élève est intéressé et où il sent que le jeu n'est pas trop difficile, il va faire un effort et participer, donc réussir et progresser.

De toutes façons, il faut varier. Ne pas faire que des fiches, ne pas faire qu'un cours oral, ne pas faire que des exercices écrits ... L'élève se fatigue vite d'une méthode de travail uniforme. Les fiches apportent beaucoup de variété et par là, renouvellent sans cesse son intérêt, mais les cartes perforées sont considérées plus comme un jeu, comme une détente, que comme un travail. C'est un jeu instructif auquel l'élève participe très volontiers et qui lui permet de revoir et d'approfondir certaines notions.

## BIBLIOGRAPHIE

1. J. COLOMB et M. GLAYMANN, *Ensembles, logique et cartes perforées*, O.C.D.L., 1968.
2. J. COLOMB, *Numération en base négative*. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, n° 262, 1968.
3. T. J. FLETCHER, *0 and 1 Mathematical*, Pic, 1961.
4. T. J. FLETCHER, *Teaching aids and Logic*. Association of Teachers of Mathematics.
5. T. J. FLETCHER, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, O.C.D.L., 1966.
6. P. GAGNAIRE, *Encore la base moins deux*. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, n° 266, 1969.
7. E. GALION, *Mathématique 4*, O.C.D.L. - Hatier.