UN EXEMPLE DE CONCRETISATION : Vectoriel et application linéaire (1)

par Maurice GLAYMANN

L'art de persuader est plus aisé que celui de faire comprendre, et pourtant permettre de comprendre, d'agir, d'avoir son autonomie de pensée est tellement plus important et plus fécond. C'est là toute la différence entre, d'une part un enseignement dogmatique, fondé uniquement sur l'introduction axiomatique de concepts abstraits, puis sur leur utilisation par l'intermédiaire d'une théorie purement déductive, et d'autre part, un enseignement dynamique, fondé sur l'introduction de situations variées et riches, introduites par des règles de jeu précises, faisant un appel constant à l'imagination et à la créativité de l'enfant, qui doit à chaque instant développer de véritables stratégies pour résoudre les problèmes posés. Dans de telles conditions d'apprentissage, le pouvoir d'abstraction de l'enfant est considérable : il est capable de comprendre, de découvrir de nombreux concepts et de les utiliser avec efficacité. Il va de soi que si les situations sont justement des concrétisations de notions mathématiques, l'enfant découvrira à travers elles les idées importantes de la mathématique et saura maîtriser ces concepts ainsi mis en jeu.

Je me propose de présenter ici un exemple de concrétisation conduisant à la découverte des concepts de vectoriel et d'application linéaire. Il faut noter au passage qu'il est impossible de présenter d'emblée à des enfants de 12 à 13 ans *un vectoriel sur le corps des réels* ; par contre, des recherches récentes ont permis de montrer qu'il est possible d'initier les enfants de cet âge aux concepts suivants :

a) les groupes et les groupes opérant sur un ensemble

b) les congruences

c) des exemples d'anneaux et de corps finis.

Ces idées étant supposées acquises, voici une situation facile à introduire. Partons d'un alphabet de 27 lettres minuscules.

$$A = \{a, b, c, d, e, ..., u, v, w, x, y, z, \epsilon\}$$

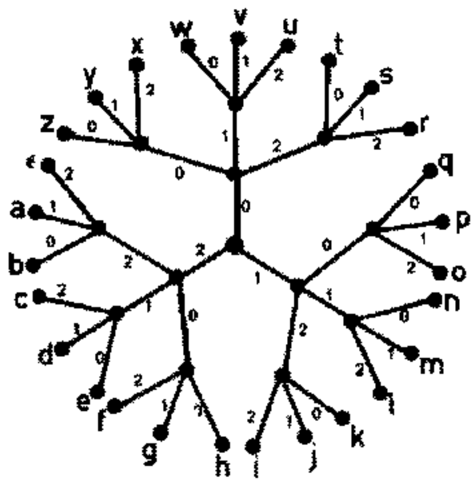
ϵ est un symbole que nous utiliserons plus loin.*

G désigne l'ensemble $\{0 \; ; \; 1 \; ; \; 2\}$; on le munit de l'addition et de la multiplication modulo 3 ; on obtient le corps $(G, +, \times)$.

(1) Ce texte a déjà été publié dans le "Second Séminaire E. GALION" : La concrétisation en mathématique, FRYKSAS (4 - 13 juillet 1971). - O.C.D.L. - Hatier.

* Notez que A n'est pas une lettre minuscule ! ...

ϕ est la bijection de G^3 vers A, définie par l'arbre suivant ** :



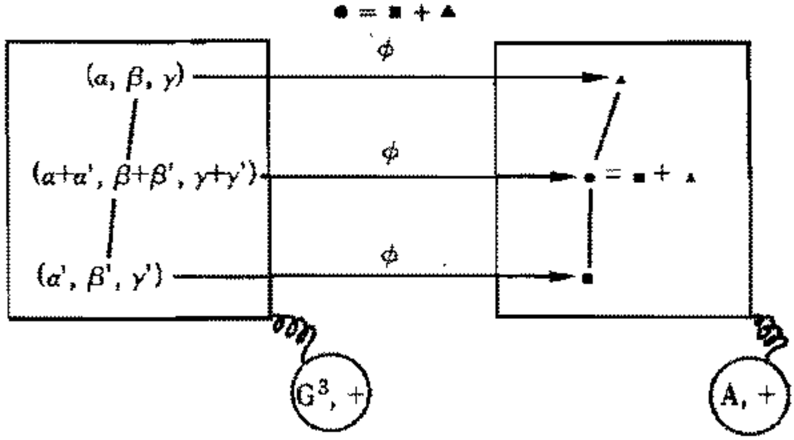
Exemples :

au triplet (2 ; 2 ; 1) , ϕ associe la lettre a,

au triplet (1 ; 2 ; 0) , ϕ associe la lettre k.

L'ensemble G muni de l'addition modulo 3 est le groupe cyclique d'ordre 3, noté (G, +) . (G^3, +), produit direct de trois groupes (G, +), est un groupe d'ordre 27. La bijection ϕ permet alors d'induire une addition sur A, notée encore + : ■ et ▲ désignent deux éléments quelconques de A, respectivement associés aux triplets (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$; posons

● = ■ + ▲



** ϕ est une bijection "codage"

$$\phi : G^3 \longrightarrow A$$

qui permet de structurer *mécaniquement* A.

où $\bullet$ est l'élément de A associé au triplet $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ tel que

$$\begin{cases} \alpha'' = \alpha + \alpha' \\ \beta'' = \beta + \beta' \\ \gamma'' = \gamma + \gamma' \end{cases} \qquad \text{(addition dans G)}$$

Exemples :

o + m = e

car $(1 ; 0 ; 2) + (1 ; 1 ; 1) = (2 ; 1 ; 0)$

a + a = l

car $(2 ; 2 ; 1) + (2 ; 2 ; 1) = (1 ; 1 ; 2)$

Il est alors clair que la bijection ϕ est un *isomorphisme* de $(G^3, +)$ vers $(A, +)$.
$(A, +)$ est un groupe d'ordre 27, isomorphe à $(G^3, +)$.

Cependant, avec de jeunes élèves, il est intéressant de leur faire découvrir que $(A, +)$ est un groupe, sans passer par le concept d'isomorphisme. En particulier, ils trouveront que la lettre z, associée à $(0 ; 0 ; 0)$, est l'*élément neutre* de $(A, +)$; que chaque élément de A possède un *symétrique* ; ainsi par exemple, pour trouver le symétrique de la lettre k, ils sont conduits à rechercher le triplet (α, β, γ) tel que

$$(1 ; 2 ; 0) + (\alpha, \beta, \gamma) = (0 ; 0 ; 0)$$

donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 + \alpha = 0 \\ 2 + \beta = 0 \\ 0 + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{(addition dans G)}$$

et obtiennent

$$\alpha = 2, \beta = 1 \text{ et } \gamma = 0$$

Le triplet $(2 ; 1 ; 0)$ est associé à la lettre e.
k et e sont symétriques :

$$k + e = e + k = z$$

Au passage, ils trouveront peut-être la propriété suivante :
Si $\blacktriangle$ et $\blacksquare$ sont deux éléments symétriques de $(A, +)$,
alors $\blacktriangle = \blacksquare + \blacksquare$ et $\blacksquare = \blacktriangle + \blacktriangle$
Pourquoi avons-nous un tel résultat ?
Que dire, si de plus $\blacktriangle = \blacksquare$?

Après une étude *expérimentale* sur quelques exemples, nous pouvons tenter de démontrer avec les enfants que l'addition dans A est *associative*. De même, on tentera de démontrer que l'addition est *commutative*.

Reprenons alors la lettre a ; on constate :

$$a + a = 1 \quad , \quad 1 + a = z$$

donc

$$a + a + a = z$$

De même, pour la lettre b :

$$b + b = n \quad , \quad n + b = z$$

donc

$$b + b + b = z$$

En est-il de même pour les autres lettres ? Pourquoi ?

Cette étude conduit tout naturellement à introduire une *loi de composition externe*, notée . , et définie comme suit :
■ est un élément de A, associé au triplet (α, β, γ) ;
μ est un élément de G ;

$$\left| \begin{array}{l} G \times A \longrightarrow A \\ (\mu, \blacksquare) \longmapsto \mu.\blacksquare \end{array} \right.$$

$\mu.\blacksquare$ est élément de A, associé au triplet $(\alpha', \beta', \gamma')$ tel que

$$\begin{cases} \alpha' = \mu \times \alpha \\ \beta' = \mu \times \beta \\ \gamma' = \mu \times \gamma \end{cases} \qquad \text{(multiplication dans G)}$$

Exemples :

$$0.a = z$$

car

$$(0 \times 2 ; 0 \times 2 ; 0 \times 1) = (0 ; 0 ; 0)$$

$$1.a = a$$

car

$$(1 \times 2 ; 1 \times 2 ; 1 \times 1) = (2 ; 2 ; 1)$$

$$2.a = 1$$

car

$$(2 \times 2 ; 2 \times 2 ; 2 \times 1) = (1 ; 1 ; 2)$$

Et plus généralement, quel que soit l'élément ■ de A :

$$(1) \qquad 0.\blacksquare = z$$

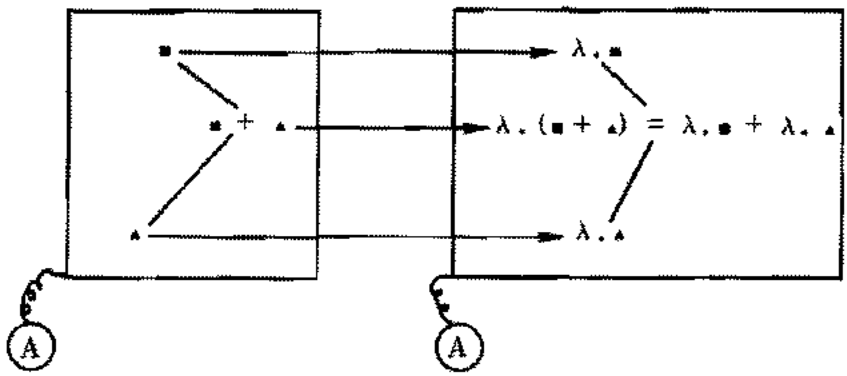
$$(2) \qquad 1.\blacksquare = \blacksquare$$

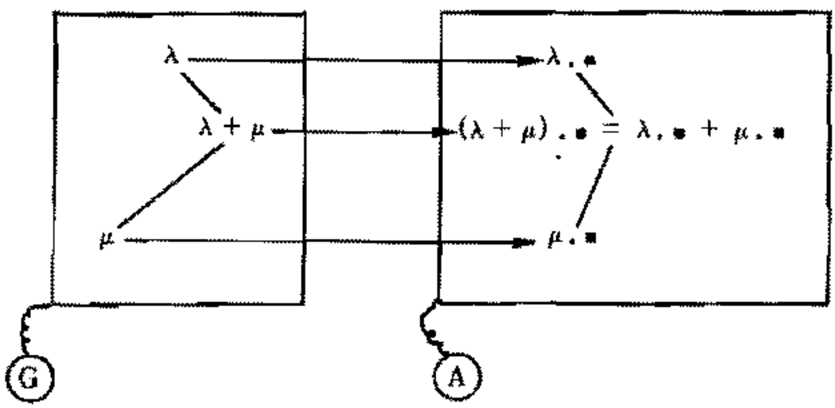
En outre, si ■ et ▲ sont symétriques l'un de l'autre,

$$2.\blacksquare = \blacktriangle \qquad \text{et} \qquad 2.\blacktriangle = \blacksquare$$

Il est aisé de *contrôler* que, quels que soient les éléments ■ et ▲ de A et quels que soient les éléments λ et μ de G,

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda.(\blacksquare + \blacktriangle) = \lambda.\blacksquare + \lambda.\blacktriangle \\ (\lambda + \mu).\blacksquare = \lambda.\blacksquare + \mu.\blacksquare \\ \lambda.(\mu.\blacksquare) = (\lambda \times \mu).\blacksquare \end{cases}$$



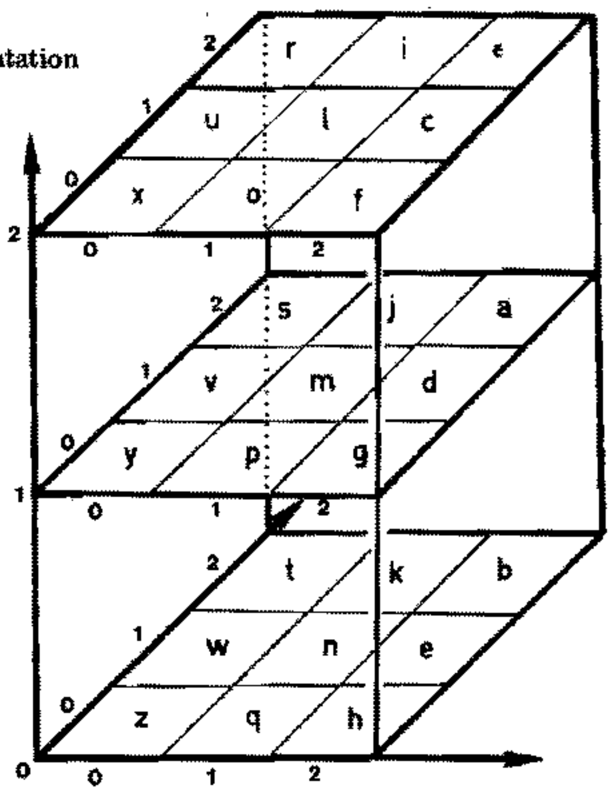


Faisons le point :

(A, +) est un *groupe commutatif*
(G, + , ×) est un *corps*
les propriétés (2) et (3) font de la structure (A, +, .)
un *vectoriel* sur le corps (G, + , ×).

Nous avons ainsi obtenu une concrétisation du concept de vectoriel. Ce vectoriel prend une "forme plus classique" si nous nous

donnons
la représentation
suivante :



Nous appellerons désormais vecteurs les éléments de A.
Prenons un vecteur ■ et son symétrique ▲ :

0 . ■ = z
1 . ■ = ■
2 . ■ = ▲

Nous dirons que le vecteur ■ *engendre* l'ensemble U :

U = { z, ■, ▲ }

Il est clair que le vecteur ▲ *engendre* le même ensemble U ;
en outre, les deux tables :

+	z	■	▲
z	z	■	▲
■	■	▲	z
▲	▲	z	■

	z	■	▲
0	z	z	z
1	z	■	▲
2	z	▲	■

montrent que, quels que soient les éléments μ et λ de G, le vecteur

$$\lambda . \blacksquare + \mu . \blacktriangle$$

est élément de U.

On peut contrôler que (U, +, .) a la structure de vectoriel : c'est un sous-vectoriel de (A, + , .). Etant engendré par un vecteur, il est dit de dimension 1.

Le vectoriel (A, +, .) possède *treize* sous-vectoriels de dimension 1 :

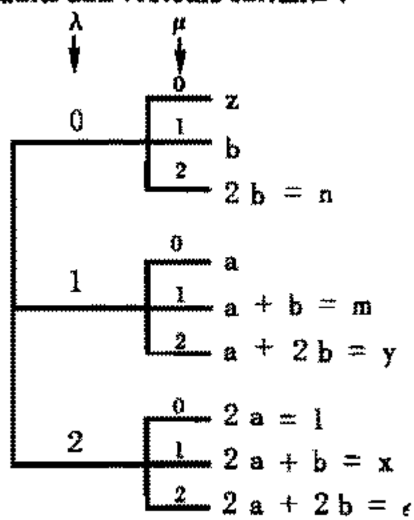
$\{a, l, z\}$, $\{b, n, z\}$, $\{c, j, z\}$
$\{d, i, z\}$, $\{e, k, z\}$, $\{f, p, z\}$
$\{g, o, z\}$, $\{h, q, z\}$, $\{m, \epsilon, z\}$
$\{r, v, z\}$, $\{s, u, z\}$, $\{t, w, z\}$
$\{x, y, z\}$

Proposons-nous maintenant de rechercher l'ensemble de vecteurs de A engendré par deux vecteurs (différents de z) n'appartenant pas au même sous-vectoriel de dimension 1. Ainsi, par exemple, l'ensemble engendré par a et b est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\lambda . a + \mu . b$$

où λ et μ sont des éléments quelconques de G.

Nous sommes conduits aux vecteurs suivants :



Nous constatons au passage que le seul cas où

$$\lambda . a + \mu . b = z$$

est celui qui correspond à $\lambda = \mu = 0$

Les vecteurs a et b sont linéairement indépendants.

Par contre, les vecteurs a et l ne sont pas indépendants car nous pouvons trouver λ et μ, non tous deux nuls, tels que

$$\lambda . a + \mu . l = z$$

en effet

$$a + 1 = z$$

(ici $\lambda = \mu = 1$).

Quel est le sous-ensemble de A engendré par a et 1 ?

Les vecteurs a et b engendrent l'ensemble D :

$$D = \{z, a, b, l, n, m, y, x, \epsilon\}$$

On contrôle que (D, +, .) a encore la structure de vectoriel : c'est un sous-vectoriel de (A, +, .) ; comme il est engendré par deux vecteurs indépendants, on dit qu'il est de dimension 2.

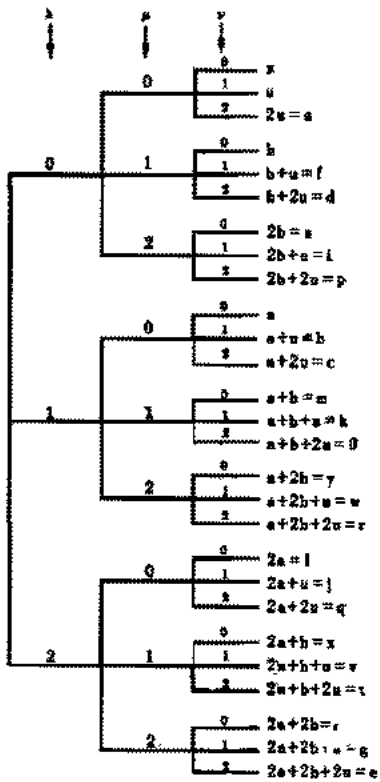
A titre d'exercice, le lecteur pourra rechercher tous les sous-vectoriels de dimension 2 (il y en a 13).

Il est alors naturel de se demander ce qui se passe si l'on prend trois vecteurs (différents de z) appartenant à trois sous-vectoriels de dimension 1 distincts et n'appartenant pas tous trois à un même vectoriel de dimension 2. Prenons, par exemple, les vecteurs a, b et u ; recherchons l'ensemble de vecteurs engendré par ces trois vecteurs.

Ses éléments sont de la forme :

$$\lambda . a + \mu . b + \nu . u$$

où λ, μ et ν décrivent G.



Le seul cas où

$$\lambda . a + \mu . b + \nu . u = z$$

est celui où

$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

Les vecteurs a, b, u sont linéairement indépendants. En outre, nous constatons ici qu'ils engendrent *tout* le vectoriel (A, +, .).

Le vectoriel (A, +, .) est dit de dimension 3, et $\{a, b, u\}$ est une base de ce vectoriel :

tout vecteur de (A, +, .) est de la forme

$$\lambda . a + \mu . b + \nu . u$$

et cela de façon unique.

A titre d'exercice, le lecteur pourra rechercher toutes les bases du vectoriel (A, +, .) ...

En particulier, $\{f, g, r\}$ est une autre base de ce vectoriel ; alors que $\{f, g, p\}$ n'en est pas une.

Reprenons la base $\{a, b, u\}$, notée $\mathcal{B}$. Par rapport à cette base, le vecteur w s'écrit :

$$w = a + 2b + u$$

Ce que nous pouvons encore exprimer sous la forme :

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Comment s'écrit w par rapport à la base $\{f, g, r\}$, notée $\mathcal{B}'$?
Vous trouverez sans peine :

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Maintenant que nous disposons d'un vectoriel, il faut s'en servir ! En effet, un vectoriel n'a aucun intérêt en lui-même ; ce qui est intéressant ce sont les applications linéaires * de ce vectoriel vers lui-même.
Plus précisément, une application ψ de A vers A est dite linéaire, si, quels que soient les éléments $\blacksquare$ et $\blacktriangle$ de A, et quels que soient les éléments λ et μ de G :

$$\psi(\lambda . \blacksquare + \mu . \blacktriangle) = \lambda . \psi(\blacksquare) + \mu . \psi(\blacktriangle)$$

Une application linéaire est entièrement définie par la donnée des *images* des vecteurs d'une base du vectoriel (A, +, .).

* Certains disent endomorphismes de A

Prenons, par exemple, la base $\{a, b, u\}$ et posons

$$\begin{cases} \psi(a) = f = b + u \\ \psi(b) = g = 2a + 2b + u \\ \psi(u) = r = a + 2b + 2u \end{cases}$$

Comment déterminer l'image par ψ d'un élément de A ? En particulier, quelle est l'image de v ?

$$\begin{aligned} v &= 2a + b + u \\ \psi(v) &= \psi(2a + b + u) \\ \psi(v) &= 2\psi(a) + \psi(b) + \psi(u) \\ &= 2(b + u) + 2a + 2b + u + a + 2b + 2u \\ &= 2u \end{aligned}$$

d'où

$$\psi(v) = s$$

Ainsi, connaissant les images par ψ des *trois* vecteurs a, b et u, nous pouvons déterminer l'image de n'importe quel élément de A. Nous pouvons constater que ψ est une bijection. En d'autres termes, l'application linéaire ψ permet de *coder* un message et c'est là une motivation pédagogique évidente pour de jeunes enfants ...

Codons par exemple le message suivant :

"Je fais des mathématiques, donc je suis logique".

Cependant, convenons de représenter un *intervalle* entre deux mots par la lettre ϵ, de supprimer les accents et la ponctuation. Dans ces conditions, le message à coder devient :

"Jeϵfaisdesϵmathématiquesϵdoncϵje ..."

et par l'application linéaire ψ, il devient :

"kdhbfjvhcdvhqfwadqfwjlrdvhcmoehkd ..."

Le problème qui se pose alors est celui de *décoder ce message. Il* est naturel de penser à utiliser la bijection réciproque ψ^{-1} de ψ qui est elle aussi une *application linéaire* :

$$\psi : \left| \begin{array}{l} a \longmapsto f \\ b \longmapsto g \\ u \longmapsto r \end{array} \right. \qquad \psi^{-1} : \left| \begin{array}{l} f \longmapsto a \\ g \longmapsto b \\ r \longmapsto u \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{cases} f = b + u \\ g = 2a + 2b + u \\ r = a + 2b + 2u \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} a = f + r \\ b = g + r \\ u = f + 2g + 2r \end{cases}$$

Ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned} k &= a + b + u \\ &= f + r + g + r + f + 2g + 2r \end{aligned}$$

donc

$$k = 2f + r$$

d'où

$$\psi^{-1}(k) = 2\psi^{-1}(f) + \psi^{-1}(r)$$
$$= 2a + u$$

Il en résulte :

$$\psi^{-1}(k) = j$$

De même,

$$\psi^{-1}(d) = e \quad , \quad \psi^{-1}(h) = \epsilon \quad , \ldots$$

Mais au fait pourquoi cela marche-t-il si bien ? Voilà une bonne occasion de faire une recherche avec les élèves et d'essayer de comprendre le fond des choses ...

Aurons-nous un résultat analogue, quelle que soit l'application linéaire choisie ? Prenons, par exemple, l'application linéaire ω définie par

$$\begin{cases} \omega(a) = f = b + u \\ \omega(b) = g = 2a + 2b + u \\ \omega(u) = x = 2a + b \end{cases}$$

Déterminons les images par ω des vecteurs m et p :

$$\omega(m) = \omega(a) + \omega(b)$$
$$\omega(m) = b + u + 2a + 2b + u$$
$$= 2a + 2u$$

$$\omega(m) = q$$
$$\omega(p) = 2\,\omega(b) + 2\,\omega(u)$$
$$= 2\,(2a + 2b + u) + 2\,(2a + b)$$
$$= 2a + 2u$$

Nous constatons ici que :

$$\omega(m) = \omega(p) = q$$

L'application linéaire ω permet de coder un message, mais il ne sera pas possible de *le décoder*. Pourquoi ?

Quelle différence y a-t-il entre les deux applications linéaires ψ et ω ?

En particulier, quelle est l'image de A par ω ? Quel est l'ensemble des vecteurs ▪ de A tels que $\omega(▪) = z$?

Arrivé à ce stade, l'introduction du *calcul matriciel* se révèle être un outil efficace et qui intéresse les enfants.

Revenons à l'application linéaire ψ ; pour la base $\{a, b, u\}$, nous pouvons lui associer la matrice :

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur j correspond à $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour cette base,

et son image ψ (j) correspond à la matrice produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\psi(j) = k$$

De même, l'application réciproque de ψ est associée à :

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ψ^{-1} (k) correspond à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\psi^{-1}(k) = j$$

Notons au passage que :

$$\phi \,.\, \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont *inverses* l'une de l'autre.
La matrice associée à l'application ω est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est aisé de vérifier qu'elle ne possède pas d'inverse ...

Les enfants déjà familiarisés avec les concepts modernes de la mathématique étudieront avec fruit cette concrétisation de vectoriel ; ils découvriront au passage les notions d'*indépendance linéaire*, de *base*, de *sous-vectoriel* ; ils comprendront l'importance des *applications linéaires*, le rôle des applications linéaires *régulières*, transformant un vectoriel en lui-même et les applications linéaires *singulières* transformant un vectoriel en un de ses sous-vectoriels propres ; enfin nous donnerons l'occasion aux enfants de représenter une application linéaire par une *matrice* et d'aborder ainsi le calcul matriciel.

Je remercie Louis DUVERT, Pierre GAGNAIRE et André MYX qui ont relu cet article et m'ont fait de précieuses critiques.