2

LA MATHÉMATIQUE DANS LE PREMIER CYCLE

Structures et langage des applications dans le programme de quatrième et troisième

par André ROUMANET (Paris)

Les nouveaux programmes de quatrième et troisième peuvent être lus de deux manières :

1) Par gros morceaux, en s'attachant au contenu explicité de chacun ;

2) En essayant de voir quelles sont, dans ces programmes, les notions qui apparaissent (ou dont un exemple est à étudier) et quels sont les outils fondamentaux qui peuvent être utiles ; on peut alors regrouper les paragraphes en fonction de ces notions ou de ces outils.

Nous avons ici essayé d'adopter ce deuxième point de vue. Il nous est apparu que, dans ces programmes, on étudie des exemples de certaines structures : groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ordre, équivalence. Par ailleurs, un outil indispensable à la bonne compréhension de ce programme : c'est le langage des relations et surtout celui des applications, la composition de celles-ci et à certains moments plus particulièrement celui des applications linéaires ou affines de **R** dans **R**.

1 Les structures

Dans les exemples de structures apparaissant dans ces programmes, on peut distinguer deux sortes d'exemples : ceux qui sont explicitement au programme, ceux pour lesquels il faut mettre en évidence les propriétés ; ceux qui sont sous-jacents et dont la mise en évidence peut avoir un double intérêt : faciliter d'autres études explicitement inscrites dans le programme, montrer la richesse de la partie de la structure ainsi étudiée en montrant l'utilisation qu'on peut en faire.

1 *Groupe.*

Sont explicitement dans le programme les exemples suivants :

- groupe additif des entiers relatifs : $(\mathbf{Z}, +)$.
- groupe additif des décimaux.
- groupe multiplicatif des puissances de 10, isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$.
- groupe des puissances d'exposants entiers d'un nombre a différent de 0, isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$.
- groupe additif des réels : $(\mathbf{R}, +)$.
- groupe multiplicatif des réels non nuls ; $(\mathbf{R}^*, \times)$.
- groupe additif des rationnels ; $(\mathbf{Q}, +)$.
- groupe multiplicatif des rationnels non huls ; $(\mathbf{Q}^*, \times)$.
- groupe additif des vecteurs du plan (ou de la droite).
- groupe des translations du plan (de la droite), cet exemple étant isomorphe au précédent.
- groupe des isométries dans le plan euclidien.

A côté de ces groupes on peut signaler aussi :

— groupe multiplicatif des décimaux inversibles ; en recherchant, dans l'ensemble des décimaux, ceux qui sont inversibles on trouve tous les nombres de la forme

$$a = \epsilon 2^{\alpha} 5^{\beta} \text{ avec } \alpha \in \mathbf{Z}, \beta \in \mathbf{Z}, \quad \epsilon \in \{-1 ; 1\}$$

L'ensemble de ces nombres est alors un groupe pour la multiplication.

— groupe des homothéties vectorielles pour la loi de composition des applications ;

— groupe des isométries sur la droite (munie d'une métrique) ;

— groupe pour l'addition des applications affines de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ du type $x \longmapsto ax + b$ avec $a \neq 0$;

— groupe pour la composition des applications linéaires non nulles de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$;

— quelques sous-groupes du groupe des isométries du plan caractérisés par le fait qu'ils laissent une figure simple invariante : triangle équilatéral, carré, rectangle, cercle, etc...

Ces listes montrent l'importance de la notion de groupe dans ce programme. Deux attitudes sont possibles :

1/ Si les élèves ont déjà étudié quelques exemples de groupes (autres que $(\mathbf{Z}, +)$) en sixième et cinquième et en particulier quelques exemples de groupes finis, il est possible de reprendre ces études en début de quatrième, peut-être de rajouter quelques exemples et à partir de là de dégager la notion de groupe et d'établir quelques résultats généraux utilisables pour chacun des exemples qui apparaissent ensuite.

2/ Dans le cas où les élèves n'ont pas encore étudié d'exemples de groupes on peut aussi étudier séparément les premiers exemples qui se présentent et ne dégager la notion de groupe qu'à la fin de l'année de quatrième à partir des exemples étudiés et peut-être d'autres que le professeur aura pu rajouter. En particulier des exemples de groupes finis peuvent être utiles à la compréhension de la notion et présentent l'avantage de permettre une étude exhaustive des différents cas. Ensuite le passage à l'infini oblige à une formulation plus générale des énoncés des propriétés.

On peut remarquer que, pour le groupe des isométries du plan, le programme se limite à l'étude de quelques exemples simples d'isométries ; on n'a pas ici toutes les isométries du plan puisqu'on n'a pas étudié les rotations, mais on peut les engendrer toutes puisqu'on a une famille de générateurs : l'ensemble des symétries orthogonales par rapport à une droite.

2 *Anneaux - Corps*

Les propriétés de l'ensemble **Z** des entiers qui lui donnent une structure d'anneau sont supposées connues. En classe de cinquième on travaille dans l'anneau des entiers.

Au cours de l'année de quatrième, on introduit le corps des nombres réels, en troisième, on introduit le corps des rationnels et on travaille dans chacun de ces deux corps.

L'anneau des décimaux est étudié en quatrième, ou du moins on met en évidence certaines de ses propriétés afin de les étendre à l'ensemble des réels.

Enfin, il peut être utile et intéressant de mettre en évidence dans l'ensemble des fonctions polynomes de **R** dans **R** les propriétés qui lui donnent une structure d'anneau.

3 *Espace vectoriel*

Le programme de géométrie de quatrième permet de mettre en évidence deux exemples d'espace vectoriel : la droite vectorielle ; le plan vectoriel.

D'autres exemples peuvent apparaître dans le programme :
— l'espace vectoriel des fonctions polynomes de **R** sur **R** ;
— l'espace vectoriel des fonctions affines de **R** sur **R** ;
— l'espace vectoriel des fonctions linéaires de **R** sur **R** ;
— l'espace vectoriel des fonctions polynômes et de degré inférieur à p, pour p donné (c'est un espace de dimension p + 1).

4 *Ordre.*

On étudie et on met en évidence les propriétés de l'ordre sur **Z**, sur l'ensemble des décimaux, sur **R** et sur **Q** ; dans chacun de ces cas le problème de la compatibilité de l'ordre et des opérations est étudié. Nous verrons plus loin comment aborder ces questions de compatibilité avec les applications linéaires.

Les ordres cités ici sont tous des exemples d'ordre total.

5 *Distance*

On définit une distance sur la droite en quatrième. Pour cela on peut procéder de la manière suivante :

On définit la droite affine comme étant une droite sur laquelle on a choisi une famille $\mathcal{F}$ de graduations telles que :

1/ Une graduation g est une application bijective de l'ensemble des points de la droite dans l'ensemble des nombres réels ; à un point M de D est associé un réel g(M).

2/ La famille $\mathcal{F}$ est telle que si g et g' sont deux graduations de la famille, on passe de l'une à l'autre par une transformation du type :

$$g'(M) = a \cdot g(M) + b$$

où a et b sont deux nombres réels, $a \neq 0$. On peut, à partir de là, retrouver les propriétés de la famille de graduations :

— toute la famille est parfaitement définie par la donnée d'une graduation g_0 de la famille, les autres étant toutes du type :

$$M \longmapsto a \cdot g_0(M) + b$$

— la donnée de deux points distincts et de leurs images suffit à déterminer une graduation et une seule dans la famille ; par exemple si on se donne le point qui a pour image 0 et celui qui a pour image 1, la graduation est parfaitement déterminée.

Définir une distance sur une telle droite revient alors à choisir une sous-famille F de $\mathcal{F}$, telle que si g et g' sont deux graduations de la famille F, on passe de l'une à l'autre par une transformation du type :

$$g' = \varepsilon g + b \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\})$$

La distance de deux points A et B de la droite est alors : $|g(B) - g(A)|$ qui ne dépend pas de la graduation g choisie dans la famille F mais seulement du choix de la famille F elle-même.

Les propriétés de la distance sont alors des conséquences des propriétés des valeurs absolues des réels.

Dans le plan, la situation est un peu plus complexe. On a des droites, sur chaque droite on peut définir une infinité de familles $\mathcal{F}$, chacune de ces familles définissant une droite affine. Le théorème de Thalès, érigé en axiome, est là pour nous dire qu'à partir du moment où on a choisi une famille de graduations $\mathcal{F}$ sur une droite D, sur les autres droites du plan, le choix de la famille nous est imposé. La famille $\mathcal{F}'$ associée à une autre droite D' se déduit de $\mathcal{F}$ par projection.

En classe de troisième, on procède de manière analogue avec les distances. Une cohérence étant établie entre les droites affines il faut maintenant choisir les distances sur chacune des droites de manière à ce qu'il y ait une certaine cohérence.

On définit alors une distance dans le plan et on vérifie toutes les propriétés des distances.

Ce sont les deux seuls exemples qui sont dans le programme. Il peut être intéressant pour étendre un peu la notion de distance de donner d'autres exemples soit sur le même ensemble, soit dans d'autres situations.

6 *Morphismes*

L'étude des morphismes est entièrement associée à celle des structures. Le nom de "morphismes" n'est pas prononcé dans le programme et il n'est certainement pas à prononcer avec les élèves. On peut citer plusieurs exemples dans le programme :

- de $(\mathbf{Z}, +)$ dans l'ensemble des puissances d'exposants entiers d'un réel a non nul, muni de la multiplication (en particulier le cas $a = 10$ est à étudier) ;
- de $(\mathbf{R}, +)$ sur la droite vectorielle ;
- de $(\mathbf{R}, \times)$ sur l'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni de la loi de composition des applications ;
- de $(\mathbf{R}^+, \times)$ dans $(\mathbf{R}^+, \times)$ par l'application qui, à un nombre réel positif, associe sa racine carrée positive car :

$$a \longmapsto \sqrt{a}$$
$$b \longmapsto \sqrt{b}$$
$$\text{et} \qquad ab \longmapsto \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

- on peut signaler un contre exemple, c'est-à-dire une application qui ne transporte pas la structure : l'application qui à un réel positif associe sa racine carrée positive ne conserve pas l'addition :

$$a + b \longmapsto \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

7 *Quelques remarques et propositions — Approches et motivations*

a) sur quelles structures faut-il insister ?

Il semble que toutes ces structures soient importantes et qu'il soit nécessaire d'insister sur toutes. Cela veut dire que chaque fois que sur un exemple, on peut faire sentir et mettre en évidence les propriétés, il faut le faire. Une notion peut être mise au premier plan, c'est la notion de groupe. Il y a suffisamment d'exemples pour qu'on puisse dégager clairement cette notion.

La formulation des propriétés de l'ensemble des réels qui font que cet ensemble a une structure de corps est l'un des objectifs du programme de quatrième.

De même la mise en évidence des propriétés du plan vectoriel est un des objectifs de la classe de quatrième.

b) Il nous paraît nécessaire d'inister sur l'étude des lois de composition internes dans un ensemble. On peut, pour cela, exploiter, par exemple, des études sur des ensembles finis — on peut se rappeler qu'en sixième et cinquième on a étudié des groupes finis.

Pour préciser les concepts il est intéressant et indispensable d'étudier des contre-exemples (ainsi pour l'associativité, un contre-exemple peut être formé par la loi "milieu" qui à deux points associe leur milieu).

Certains expérimentateurs signalent l'intérêt des exercices de parenthésages sur une suite d'éléments envisagés comme des règles d'écriture.

c) Une bonne étude de l'ordre dans Z et de ses propriétés, compatibilité avec la somme et le produit, facilite l'étude de l'ordre sur les décimaux. Or l'ordre est une notion continuellement utilisée en quatrième dans l'étude des décimaux et dans l'approche des réels.

d) Dans certains cas il est possible de faire apparaître un système de générateurs :

— c'est le cas par exemple pour le groupe multiplicatif des décimaux positifs inversibles : 2 et 5 constituent un système de générateurs car tout nombre de cet ensemble peut se mettre sous la forme $2^{\alpha} \times 5^{\beta}$ avec α et β entiers. De même 10 et 5 constituent un système de générateurs ainsi que 10 et 2.

— c'est le cas si l'on étudie l'ensemble des isométries laissant globalement invariant un triangle équilatéral.

— On peut noter au passage que dans le groupe des isométries du plan tel qu'il est défini en troisième,on ne connaît pas toutes les isométries puisqu'on n'a pas étudié les rotations. C'est là la raison qui nous oblige à nous limiter à des cas particuliers. Cependant,on a étudié des symétries orthogonales qui nous permettent d'engendrer les autres que l'on connaît déjà : translations et symétries centrales, et qui en réalité constituent un système de générateurs du groupe des isométries. Bien sûr il n'est pas question de démontrer cela ici.

Mettre en évidence chaque fois que cela est possible un ou des systèmes de générateurs peut servir de préparation à la notion de base d'un espace vectoriel.

e) Pour montrer la richesse de la notion d'espace vectoriel, il est bon d'en présenter d'autres exemples. On peut utiliser pour cela l'espace des polynomes, l'espace des fonctions affines. On peut aussi étudier des exemples d'espaces finis tels que :

$(\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z})^3$ ou $(\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z})^4$

f) Pour la notion de distance, il est important de pouvoir donner d'autres exemples de distances, et aussi des contre-exemples.

Pour terminer, on peut dire que les parties du programme, relatives aux structures, qui sont bien "passées" dans les classes sont :

— les groupes (plus particulièrement) ;

— le plan vectoriel, qui permet de se donner un outil "algébrique" simple pour des démonstrations "géométriques".

L'un des objectifs à se fixer peut être *le vectoriel*, car c'est un outil exploitable dans de nombreux domaines, en particulier en géométrie.

2 Applications

Une notion, qui est en même temps un outil, est constamment présentée tout au long des programmes de quatrième et troisième, c'est la notion d'application. Il y a des applications et il y a surtout des applications que l'on compose. Aussi une bonne maîtrise de cette notion peut faciliter l'approche des concepts à étudier en de nombreux points de ces programmes.

1 *Réels et Rationnels* (**R** *et* **Q**).

Les programmes comportent l'étude des propriétés et des exercices de calcul sur les réels écrits sous la forme $\frac{b}{a}$ où a et b sont eux-mêmes des réels, ainsi que l'étude des propriétés des rationnels. Notre propos ne sera pas ici de discuter l'ordre dans lequel ces différents thèmes de travail apparaissent, mais seulement de voir comment les applications linéaires de **R** dans **R** ou celles de **Q** dans **Q** peuvent faciliter ces études.

Nous nous plaçons dans **R**, le travail à faire dans **Q** est tout à fait analogue.

Dans **R**, une application linéaire est une applicafion f qui a les deux propriétés suivantes :

• $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout couple de réels x et y ; cela peut s'énoncer sous la forme : "l'image d'une somme par f est la somme des images", ou encore "f conserve l'addition".

• $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ quels que soient le réel x et le réel λ ; cela peut s'énoncer sour la forme : "l'image de λx est égale à l'image de x multipliée par λ".

Première conséquence :

$$f(0) = 0 \text{ car } f(0 \times x) = 0 \times f(x).$$

Il est facile de trouver dans **Z**, dans l'ensemble des décimaux, dans **R** ou dans **Q** des applications ayant cette propriété ; il suffit pour cela de considérer des applications du type $f(x) = kx$. On peut démontrer que toutes les applications f qui répondent aux deux conditions ci-dessus sont de ce type-là.

En effet :

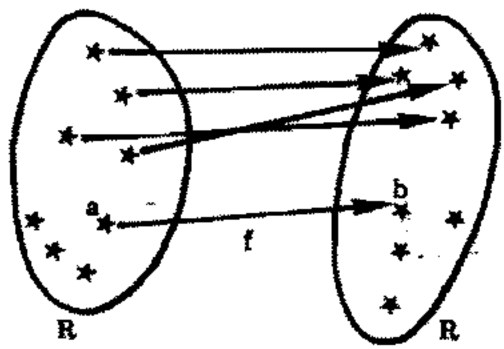
$$x = x \times 1$$

permet d'écrire : $f(x) = x\, f(1)$

et si on pose : $f(1) = k$

$$f(x) = x \times k$$

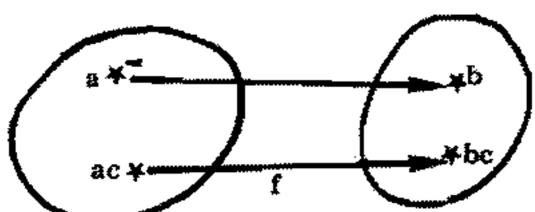
Une application linéaire de **R** dans **R** est donc parfaitement déterminée par la connaissance de l'image de 1. On peut généraliser ce résultat en montrant qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par la connaissance d'un nombre $a \neq 0$ et de son image $f(a)$. Cela peut s'énoncer : un couple de réels (a,b) avec $a \neq 0$ détermine une application linéaire et une seule de **R** dans **R**.



Le nombre k associé à f est alors tel que :

$$f(a) = k \times a = b$$

On le note $k = \frac{b}{a}$



1ère conséquence :

Si pour f on a :

$b = f(a)$

alors on aura :

$f(a\,c) = c\, f(a) = b\,c$

Si une application linéaire envoie a sur b, elle envoie a c sur b c ; on en déduit que :

$$\frac{b\,c}{a\,c} = \frac{b}{a}$$

2ème conséquence :

Si on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cela revient à dire que l'application linéaire f qui envoie a sur b envoie aussi c sur d :

$f(a) = b$

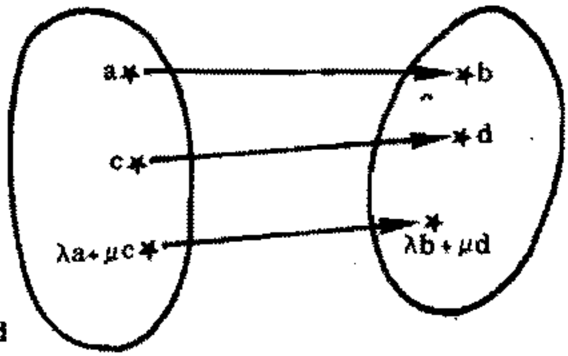
$f(c) = d$

On en déduit :

$f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda b$

$f(\mu c) = \mu f(c) = \mu d$

$f(\lambda a + \mu c) =$
$f(\lambda a) + f(\mu c) =$
$\lambda b + \mu d$



et la même application linéaire envoie $\lambda a + \mu c$ sur $\lambda b + \mu d$;
par suite on obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$$

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire, et on peut vérifier qu'il y a isomorphisme entre l'ensemble **R** muni de la multiplication et l'ensemble $\mathfrak{L}$ des applications linéaires de **R** dans **R** muni de la loi de composition des applications. Ainsi si f et g sont deux applications linéaires telles que :

$$f(x) = kx$$
$$\text{et} \quad g(x) = hx$$

on aura : $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(hx) = khx$

L'ensemble $\mathfrak{L}^*$ des applications linéaires de **R** dans **R** qui ne sont pas constantes (qui ne sont pas telles que quel que soit x, $f(x) = 0$) est un groupe commutatif pour la loi de composition des applications.

1ère conséquence : calcul de $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

Multiplier ces deux nombres revient à composer deux applications :

— l'application f qui envoie a sur b

$$a \xmapsto{f} b$$

$$\text{donc} \quad ac \xmapsto{f} bc$$

— l'application g qui envoie c sur d

$$c \xmapsto{g} d$$

$$bc \xmapsto{g} bd$$

Par l'application g o f,on aura :

$$ac \overset{f}{\longmapsto} bc \overset{g}{\longmapsto} bd.$$

L'application linéaire g o f envoie ac sur bd;on en déduit :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

2ème conséquence : Toute application linéaire non constante a une application réciproque linéaire f^{-1}.

Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

cela veut dire qu'il existe une application linéaire f qui envoie a sur b et c sur d. f^{-1} envoie b sur a et d sur c.

Cherchons :

$f^{-1} \circ f\,(a\,d) = f^{-1}\,(d\,f\,(a)) = f^{-1}\,(bd) = b\,f^{-1}\,(d) = b\,c\,;$

comme $f^{-1} \circ f$ est l'identité,

$$a\,d = b\,c$$

De la même manière on aurait :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

L'équivalence des deux égalités :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

revient à dire que si la même application linéaire f fait passer de a à b et de c à d, alors l'application linéaire qui fait passer de a à c fait passer aussi de b à d. C'est une conséquence de la commutativité f o g = g o f :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "g"'] & b \arrow[d, dashed, "g"] \\ c \arrow[r, "f"] & d \end{tikzcd}$$

f o g (a) = g o f (a)

Autre propriété $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

se déduit du fait que l'inverse d'une application linéaire est aussi une application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{f} & c \\ a & \longrightarrow & ac \\ \frac{a}{c} & \longrightarrow & a \\ \frac{b}{c} & \longrightarrow & b \\ \frac{a+b}{c} & \longrightarrow & a+b \end{array}$$

Pour les rationnels, la démarche peut être la même mais ici on a une situation un peu particulière due aux propriétés arithmétiques de **Z**. Dans la classe des expressions de la forme $\frac{b}{a}$ représentant le même rationnel il y a une "forme irréductible". Cela va entraîner des procédures particulières dans les calculs.

Toute cette étude et cette utilisation des applications linéaires de **R** dans **R** peut être préparée avant la classe de quatrième par l'étude des applications linéaires de *Z* dans **Z**, et par l'étude des applications linéaires d'un corps fini dans lui-même.

2 *Fonctions polynomes de* **R** *dans* **R**

Les opérations d'addition et de multiplication définies dans **R** permettent de définir des opérations d'addition et de multiplication pour l'ensemble des fonctions linéaires.

Si $x \xrightarrow{f} f(x)$

$x \xrightarrow{g} g(x)$

alors $x \xrightarrow{f+g} f(x) + g(x)$

et $x \xrightarrow{f \times g} f(x) \times g(x)$

Ainsi si $f(x) = kx$

$g(x) = hx$

alors $f(x) + g(x) = (k+h)x$ qui est une fonction linéaire,

et $f(x) \times g(x) = k \cdot h \cdot x^2$ qui n'est pas une fonction linéaire.

Pour des combinaisons de sommes et de produits, on obtient ainsi l'ensemble des fonctions polynomes n'ayant pas de terme constant.

Mais si au lieu de partir des fonctions linéaires on part des fonctions affines on obtient toutes les fonctions polynomes, comme combinaisons linéaires de sommes ou de produits de fonctions affines.

3 *Droite affine*

Nous avons vu plus haut que le passage d'une graduation g à une graduation g' de la famille $\mathcal{F}$ définissant une droite affine était une application affine de **R** dans **R** :

$$g' = a g + b$$

Une étude assez complète de l'ensemble des applications affines de **R** dans **R** avant l'étude des graduations de la droite peut permettre une meilleure compréhension de ce qu'est une droite affine.

On peut prendre comme définition d'une application affine de **R** dans **R** une application f telle que :

$$x \overset{f}{\longmapsto} a x + b \qquad \text{avec} \qquad a \neq 0$$

Dans l'ensemble des applications affines ainsi définies, la loi de composition des applications est une loi interne, en effet :

Si $f : x \longmapsto a x + b$

et $g : x \longmapsto a'x + b'$

alors $f \circ g : x \longmapsto a a' x + a b' + b$

— non commutative : $f \circ g \neq g \circ f$, en général ;

— associative ;

— pour laquelle il y a un élément neutre : $i : x \longmapsto x$;

— pour laquelle chaque élément a un symétrique :

$$f^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{a} x - \frac{b}{a}$$

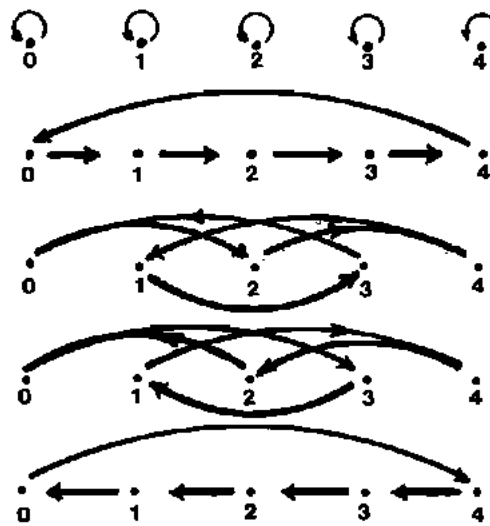
Contrairement à ce qui se passait pour les applications linéaires de **R** dans **R**, il ne suffit pas de connaître un nombre et son image, mais il faut connaître deux nombres distincts et leurs images pour définir parfaitement une application affine.

Les propriétés qu'on retrouve dans la famille des graduations $\mathcal{F}$ d'une droite affine sont les propriétés de l'ensemble des applications affines de **R** dans **R**.

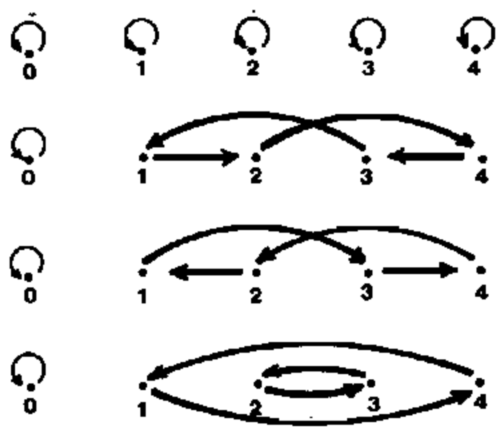
Prenons un exemple : désignons par K le corps $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ muni des opérations d'addition et de multiplication. Comptons toutes les applications affines de K dans K.

1er procédé :

— il y a cinq translations qui sont les permutations circulaires ci-dessous :



— il y a quatre homothéties laissant 0 invariant :



— toutes les autres applications affines de K dans K sont obtenues comme composées d'une homothétie et d'une translation, il y en a donc en tout 4 fois 5 : soit 20.

2ème procédé : Une application affine de K dans K est définie par la donnée de l'image de deux points (par exemple 0 et 1). Or il y a 5 × 4 façons de choisir des images, il y a dons 20 applications affines de K dans K.

Si maintenant, on se donne une droite D ayant 5 points, on peut la graduer avec K, une graduation étant une bijection de l'ensemble des points de D sur K. Il y a donc 120 graduations possibles pour D. Chaque famille $\mathcal{F}$ définissant une droite affine sur D contient 20 graduations. Il y a donc 6 familles possibles et donc le même "support" peut permettre de définir 6 droites affines différentes.

On peut donner une graduation de chacune des 6 familles :

1ère famille :	x	x	x	x	x
	0	1	2	3	4
2ème famille :	x	x	x	x	x
	0	1	2	4	3
3ème famille :	x	x	x	x	x
	0	1	3	2	4
4ème famille :	x	x	x	x	x
	0	1	3	4	2
5ème famille :	x	x	x	x	x
	0	1	4	2	3
6ème famille :	x	x	x	x	x
	0	1	4	3	2

On a ici un exemple de ce qui se passe pour la droite du plan "habituel", la même droite, le même ensemble de points peut porter une infinité de droites affines, une infinité de familles $\mathcal{F}$ de graduations (applications de D sur R).

4 *Plan affine*

Dans le plan, chaque droite pouvant porter une infinité de familles $\mathcal{F}$ de graduations, l'axiome de Thalès nous permet de dire que les choix que l'on peut faire sur chaque droite ne sont pas indépendants les uns des autres. A partir du moment où le choix est fait sur l'une des droites du plan, il n'est plus à faire sur les autres droites, mais il est imposé par le fait que les graduations de la 1ère droite doivent se projeter sur les autres droites selon les graduations de ces dernières par des projections suivant une direction donnée.

En d'autres termes : soit D et D' deux droites du plan, g une graduation de D et g' une graduation de D', p une projection de D sur D' selon une direction δ (ne contenant ni D ni D').

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dash, "p"] \arrow[d, "g"'] & D' \arrow[d, "g'"] \\ R & R \end{tikzcd}$$

L'axiome de Thalès peut alors s'énoncer de plusieurs manières équivalentes :

1 - $g' \circ p \circ g^{-1}$ est une application affine de **R** dans **R**.

2 - $g \circ p^{-1}$ est une graduation de D'.

3 - $g' \circ p$ est une graduation de D.

4 - Pour p donnée on obtient toute la famille de graduations de la droite D' en composant p^{-1} avec chacune des graduations de la famille D.

Remarque : Lorsqu'on choisit une graduation particulière g sur D et une graduation particulière g' sur D', alors et alors seulement on peut définir le rapport de projection. Mais ce rapport dépend du choix de g et de celui de g'.

5 *Plan métrique*

On peut alors définir une distance sur chacune des droites et cela d'une infinité de manières. Le problème est alors de choisir les distances sur chacune des droites de manière à ce qu'il y ait une certaine harmonisation.

Pour cela, on peut choisir sur une droite D quelconque une sous-famille F de graduations telle que si g et g_1 sont deux graduations de F on ait :

$$g_1 = \epsilon g + b \qquad (\epsilon \in \{-1, 1\})$$

On peut aussi choisir sur une droite D' une sous-famille F' de graduations ayant la même propriété, mais ces deux choix ne peuvent pas être indépendants ; ils doivent être tels que le rapport de projection orthogonale de D sur D' soit le même que celui de D' sur D, pour une graduation g sur D et une graduation g' sur D'. Cela permet alors de définir une distance sur le plan. Pour démontrer les propriétés essentielles on peut ici encore utiliser la composition d'applications.

Après cela l'étude des isométries revient à l'étude de certaines applications bijectives du plan. Le programme demande de voir que l'ensemble des isométries est un groupe pour la composition des applications.

6 *Plan vectoriel*

L'étude des translations et de leur composition est encore une étude d'applications et c'est à travers cette étude qu'apparaît le plan vectoriel.

On peut ensuite retrouver les applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même, en particulier les homothéties vectorielles.

7 *Quelques applications de* **R** *dans* **R**

L'application : $x \longmapsto x^2$ est une application surjective de **R** dans $\mathbf{R}^+$.

L'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$: $x \longmapsto x^2$ est une application bijective. Elle admet une application réciproque elle-même bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

cette dernière application conserve la multiplication :

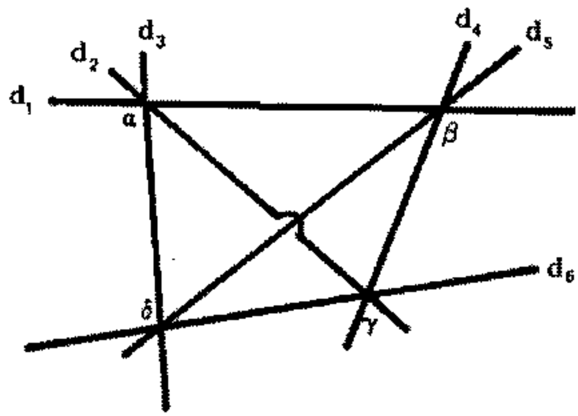
$$a \longmapsto \sqrt{a}$$
$$b \longmapsto \sqrt{b}$$
$$a \times b \longmapsto \sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

mais pas l'addition.

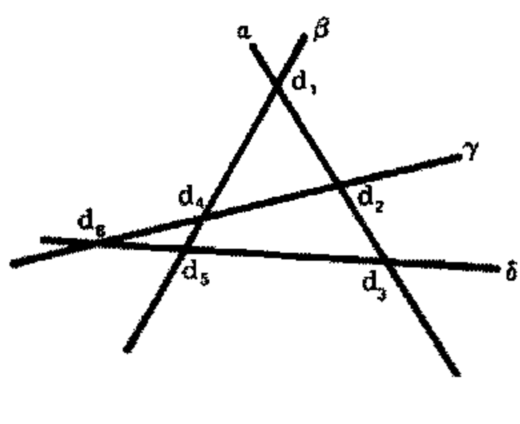
8 *Une remarque sur les relations d'incidence.*

Rien n'oblige dans l'énoncé des axiomes d'incidence à considérer les droites comme des ensembles de points. On peut très bien considérer que l'on a deux sortes d'objets, les droites, les points et que les objets sont liés par une relation. Ainsi on peut donner trois représentations de la relation d'incidence sur un ensemble de 4 points et de 6 droites :

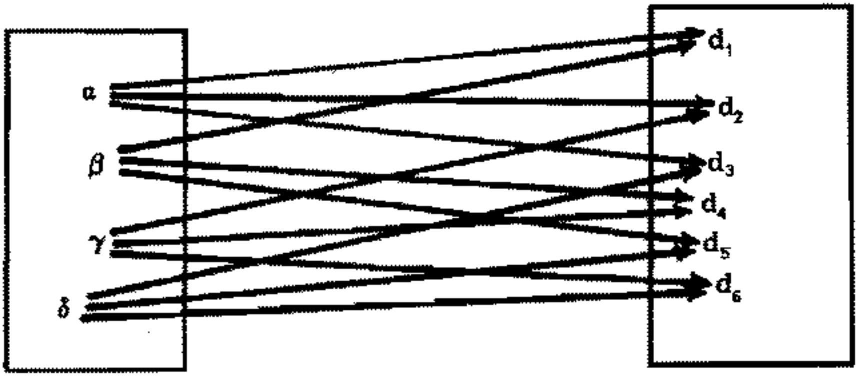
1er schéma :



2ème schéma :



3ème schéma :



9 *Quelques propositions*

Après ce tour d'horizon, il paraît fondamental d'étudier la notion d'application, à travers de nombreux exemples, les applications linéaires et affines à travers quelques exemples.

Pour cela, il paraît intéressant d'utiliser des situations finies qui permettent d'expliciter et de bien se rendre compte de ce qui se passe. Mais à côté des situations où l'on peut tout écrire, il est peut-être intéressant, avant de passer à des ensembles ayant une infinité d'éléments, de trouver des ensembles finis mais difficiles à expliciter car déjà nombreux. Les élèves seront amenés à remplacer l'explicitation par des énoncés de propriétés, ce qu'ils seront obligés de faire ensuite pour les cas non finis.

Certaines études préliminaires, bien que n'étant pas explicitement au programme, peuvent aider à la compréhension de la suite, et par conséquent faciliter le travail qui viendra ensuite. Ainsi l'étude des droites affines sur un ensemble de cinq points peut montrer combien le choix est arbitraire quand il n'y a pas de considérations physiques et expérimentales pour nous guider.