Présentation du plan euclidien en troisième

par H. DELAVAULT (Caen)

La solution satisfaisante du point de vue mathématique est celle de partir du plan vectoriel sur lequel on définit un *produit scalaire.* On peut juger cette présentation trop abstraite et lui préférer, pour le premier cycle, une définition moins satisfaisante pour l'esprit logique mais plus naturelle et permettant d'atteindre rapidement les résultats essentiels.

Le choix, parmi les propriétés de base du plan euclidien, de la symétrie du rapport de projection orthogonale de deux axes, satisfaisant du point de vue mathématique, ne me semble pas très naturel ; en outre, cette propriété ne résulte pas directement des manipulations mais s'en déduit par application de l'axiome de Thalès. Le lien entre les axiomes retenus pour le plan affine et les propriétés de base du plan euclidien n'est pas clairement mis en évidence ; il semble qu'il y ait un hiatus entre les deux points de vue adoptés.

Le problème posé peut se résumer ainsi :

Les axiomes définissant, en quatrième, le plan affine sont du type suivant :

— axiomes d'incidence ;

— structure affine sur chaque droite du plan ;

— axiome de Thalès reliant ces structures affines et permettant ainsi de définir une structure affine du plan.

On doit ajouter à ce plan affine des propriétés permettant de relier entre elles les structures euclidiennes des diverses droites, donc de définir une *distance* dans le plan.

Plus précisément :

Soit une droite affine $\Delta = (E, \Phi)$. La famille Φ de bijections de E sur R est caractérisée par l'invariance du rapport :

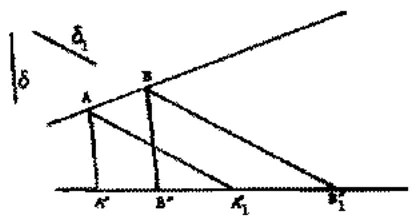
$$\frac{f(P) - f(Q)}{f(R) - f(S)}$$

P et Q deux points quelconques de E, R et S deux points distincts de E, f un élément quelconque de Φ.

L'axiome de Thalès permet de définir sur E' une famille Φ', $\Delta' = (E', \Phi')$ étant une droite affine.

A une droite affine $\Delta = (E, \Phi)$ sont associées une infinité de droites euclidiennes $D = (E, F)$, $F \subset \Phi$. A chaque droite euclidienne D, donc à chaque famille F extraite de Φ, correspond une distance sur E.

Si $f \in F$, $d(A, B) = |f(B) - f(A)|$, A et B deux points quelconques de E, invariante dans F. Par projection P_δ de E sur E', on fait correspondre à la famille F particulière, une famille F', D' = (E', F') étant une droite euclidienne. On définit donc ainsi une distance sur E', liée à F'.



Partant de la même famille F, par une projection P_{δ_1}, $\delta_1 \neq \delta$, on obtient une droite euclidienne $D'_1 = (E', F'_1)$ généralement distincte de D', et par conséquent sur E' une autre distance. Ceci est en accord avec les constatations physiques. Sur la figure 1, la distance physique des points A', B' est différente de celle des points A'_1 B'_1. Ce que l'on peut énoncer brièvement : la distance n'est généralement pas "conservée" par projection.

Ce que nous devons faire, c'est choisir une direction de projection permettant de faire correspondre à la sous-famille $F \subset \Phi$, une sous-famille $F' \subset \Phi'$ unique. De la structure euclidienne choisie sur E, donc de la distance définie sur E, nous déduirons donc une structure euclidienne donc une distance sur toutes les droites du plan.

Les manipulations préparatoires à cette introduction mathématique sont toutes centrées sur l'étude du "pliage" du plan le long d'une droite, c'est-à-dire sur la symétrie orthogonale par rapport à une droite.

En outre, dans l'étude mathématique des transformations du plan conservant sa structure euclidienne, une place prépondérante est donnée à la symétrie orthogonale (ou symétrie axiale).

Son introduction, qui semble naturelle après les manipulations, permet donc d'atteindre rapidement des résultats intéressants tant du point de vue mathématique que du point de vue pratique.

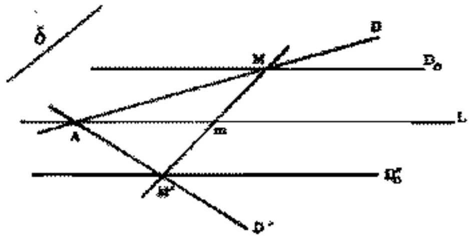
Il est évident que prendre pour propriété de base l'existence d'une symétrie axiale faisant correspondre une droite D et une droite D' du plan n'est pas du point de vue purement mathématique satisfaisant dans le sens que toutes les propriétés de base ne sont pas indépendantes. Mais le naturel et la puissance de l'outil ainsi mis entre les mains des enfants me semblent plus importants. Dans le second cycle, on pourra, à loisir, à partir du plan vectoriel et du produit scalaire revenir sur ces questions.

On peut procéder ainsi :

A — *Etude de la symétrie par rapport à une droite L suivant la direction* δ, $L \notin \delta$.

Cette étude peut se faire en exercice à la fin de la quatrième ou en révision au début de la troisième.

Définition : s_L : $M \longmapsto M'$, $MM' \in \delta$, m milieu de (M,M'), $m \in L$



Propriétés à mettre en évidence :

1) $s_L \circ s_L$ = identité, s_L bijection du plan.

2) Points invariants : tous les points de L.

3) La transformée de la droite D est une droite D', ayant les propriétés suivantes :

Si D est parallèle à L, alors D' est parallèle à L :

deux cas : $D = L$ alors $D' = L = D$

$D \neq L$ alors $D' \neq L$ et $D' \neq D$.

Si $D \cap L = \{A\}$ alors $D' \cap L = \{A\}$

deux cas : $D \in \delta$ alors $D' \in \delta$ et $D = D'$

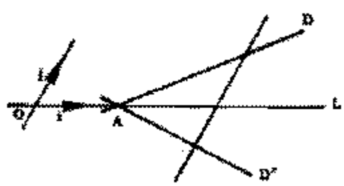
$D \notin \delta$ alors $D' \notin \delta$ et $D \neq D'$

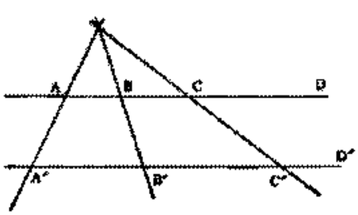
les deux droites sont sécantes.

Si D_1 et D_2 sont parallèles, leurs transformées D'_1 et D'_2 sont parallèles.

On peut donc définir une symétrie dans l'ensemble des directions ; deux directions sont invariantes : celle de L et δ.

Remarque : la démonstration de la propriété que la transformée d'une droite est une droite peut se faire de deux manières :





— on prend un repère dans le plan (O, i, j), $O \in L$, i de même direction que L, j de direction δ et on écrit les équations de D et de D'.

— on utilise la propriété déduite de l'axiome de Thalès : D et D' deux droites parallèles, (A,B,C) et (A',B',C') deux triplets respectivement de points de D et de points de D',

si $\left[\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right]_D = \left[\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}\right]_{D'}$, les droites AA', BB', CC' sont soit parallèles soit concourantes. (voir démonstration par IREM de Strasbourg).

B — *Manipulation sur le "pliage" le long d'une droite L*

On a ainsi une représentation physique d'une symétrie par rapport à une droite L suivant une direction δ_O.

Dans l'ensemble des directions, nous avons une symétrie par rapport à la direction λ de L, suivant la direction δ_0 et $s_\lambda(\delta_0) = \delta_0$

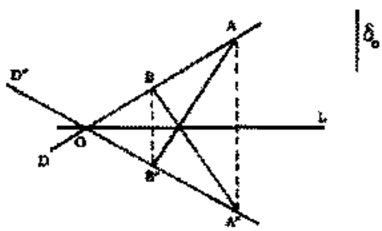
Dans ce cas particulier, on constate que $s_{\delta_0}(\lambda) = \lambda$.

Nous définissons donc une relation dans l'ensemble des directions appelée relation d'orthogonalité ; L et $D \in \delta_0$ sont dites perpendiculaires.

On constate en outre que dans ce cas particulier, par "pliage" si $A \longmapsto A'$ et $B \longmapsto B'$, distance physique d(A,B) est égale à d(A',B').

De plus, dans le pliage, deux droites perpendiculaires se transforment en deux droites perpendiculaires.

Considérons maintenant deux droites distinctes ; il existe toujours un "pliage" les faisant se correspondre. (Si les droites sont parallèles il en existe un seul, si les droites sont concourantes il en existe deux).



Nous pourrons donc choisir ce pliage pour définir sur D' une distance connaissant celle définie sur D, ou ce qui revient au même prendre δ_0 pour direction de projection permettant de déduire la structure euclidienne de D' de celle de D.

La figure 4 résume toutes ces propriétés.

C — *Propriétés de base du plan euclidien*

Soit P un plan affine. On suppose en outre :

1) il existe dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des directions de P une relation d'orthogonalité satisfaisant aux propriétés énoncées (voir programme).

Remarquons que le plan satisfaisant aux axiomes d'incidence a au moins trois directions distinctes ; l'existence d'une relation d'orthogonalité implique au moins quatre directions distinctes.

2) pour toute paire de droites $\{D, D'\}$, il existe une droite L telle que dans la symétrie orthogonale par rapport à L, D et D' se correspondent.

Les structures euclidiennes de D et D' sont telles que, A et B étant deux points quelconques de D, A' et B' leurs images par symétrie,

$$[d(A,B)]_D = [d(A',B')]_{D'}$$

3) toute symétrie orthogonale définie dans l'ensemble des directions du plan transforme deux directions orthogonales en deux directions orthogonales (il y a compatibilité avec la relation d'orthogonalité).

D — *Conséquence pour le rapport de projection orthogonale de deux axes*

— droites D et D' perpendiculaires : les deux rapports de projection sont nuls.

— droites D et D' parallèles, si les repères se correspondent dans la projection orthogonale, les deux rapports sont égaux à 1.

— droites ni perpendiculaires, ni parallèles. $\mathcal{A}$ axe défini par D et le repère (O,A), $\mathcal{A}'$ axe défini par D' et le repère (O,A') (voir fig. 4). Par symétrie, A'B perpendiculaire à D se transforme en AB' perpendiculaire à D'. Donc AA' et BB' sont parallèles (direction orthogonale à la direction de L) et d'après l'axiome de Thalès :

$$[\overline{OB}]_D = [\overline{OB'}]_{D'}$$

D'où $c(\mathcal{A},\mathcal{A}') = c(\mathcal{A}',\mathcal{A})$.

Conclusions : des discussions autour de ce point de vue ont eu lieu avec l'équipe du CRDP de Caen et avec l'équipe du CDPP de Ouagadougou (Haute-Volta). Cette dernière a mis au point des fiches pour élèves qu'elle expérimente actuellement. La symétrie orthogonale est introduite après les manipulations sur le "pliage" et sans travaux préliminaires sur la symétrie dite "oblique" ; mais l'étude n'en diffère absolument pas. Traiter d'abord la symétrie "oblique" permet de dégager les propriétés indépendamment de la représentation de l'angle droite à laquelle nous sommes si habitués.