Sur une conception de la géométrie

par G. H. CLOPEAU

Les lecteurs du Bulletin ont pu trouver, n° 275/76 p. 442 puis n° 279 p. 399, l'exposé d'une certaine conception du cours de géométrie en classe de quatrième.

Rappelons que cette conception prend comme hypothèses :

1°) Qu'on se conforme au programme officiel — qu'il paraisse ou non raisonnable — et qu'on le considère comme "devant être suivi".

2°) Qu'une *axiomatique inspirée par des expériences concrètes* (en liaison éventuelle avec la technologie) permet de tenir compte des possibilités pratiques de l'esprit des enfants de quatrième.

A ceux qui, en suivant cette voie, craindraient de s'écarter du commentaire officiel (B. O. 22/11/71), rappelons que ce commentaire lui-même laisse la porte ouverte à la traditionnelle liberté d'initiative du professeur et indique que "*d'autres modes de présentation pourront faire l'objet de nouvelles annexes accompagnées de commentaires appropriés*".

L'idée directrice, en quatrième, était de mathématiser d'abord le groupe des translations, opérant sur la droite (technique) ou dans le plan (technique), afin de dégager, le plus rapidement possible, la structure d'espace vectoriel.

De même, en classe de troisième, il est possible de mathématiser d'abord le groupe des rotations de centre 0, opérant dans le plan.

Cette démarche nous a semblé présenter les avantages suivants :

1°) Au départ, une situation matérielle intéressante et conduisant à de nombreuses manipulations ;

2°) Le passage de la situation matérielle au modèle mathématique est dénué d'ambiguïté, ce qui n'est pas le cas lorsque, tentant de décrire en un minimum d'axiomes distillés un à un, les étapes d'une mathématisation, chaque axiome semble à l'élève être une "loi de la nature" ;

3°) Utilisation rapide, sans axiomatique intermédiaire propre aux classes de quatrième et de troisième, des meilleurs outils mathématiques (espaces vectoriels — angles de directions orientées) ;

4°) Pour les élèves que la mathématisation d'une situation aussi complexe que l'espace physique rebuterait, la partie "observations - manipulations" garderait toute sa valeur de formation pratique.

En résumé il s'agit : d'utiliser vite les outils mathématiques utiles pour l'avenir, sans complications préalables artificielles, et *surtout sans laisser croire à l'élève qu'on lui dévoile la "nature" des choses* *matérielles*, mais au contraire en l'habituant à *inventer, à agir, à confronter des expériences.* (1)

Examinons donc, avec plus de détail, la démarche proposée :

1 — Motivation : Pourquoi le modèle "plan affine" ne nous suffit pas.

L'étude faite en classe de quatrième — géométrie affine du plan — permet :

a) de définir les droites du plan ;

b) de définir sur chaque droite, et à condition de ne considérer que des points de cette droite, une distance, en choisissant un vecteur unitaire.

Nous trouvons même commode et "naturel" de conserver le même vecteur unitaire pour toutes les droites d'une même direction.

En revanche, *nous ne disposons d'aucun moyen à partir des définitions précédentes pour comparer des distances respectivement définies sur des droites non parallèles.* Nous sommes donc conduits à rechercher quels axiomes il conviendrait de poser en plus de ceux qui définissent la structure affine, pour construire un modèle mathématique plus conforme à l'expérience physique.

Par exemple, lorsqu'on utilise un pied à coulisse, on ne se soucie pas de la direction de l'arête de la règle pour lire le résultat de la mesure. De même, un compas étant réglé de façon que ses pointes soient respectivement en contact avec deux points donnés A, B du plan, si $\vec{AB}$ est unitaire, on admet que tout bipoint pouvant venir en contact des pointes du compas ainsi réglé (en particulier (B, A)) représente aussi un vecteur unitaire. Autrement dit, $\vec{AB}$ étant unitaire, le cercle de centre O, tracé avec le compas réglé sur A, B, coupe toute droite $\mathcal{D}$

---

(1) En relisant cette déjà trop longue introduction, je m'aperçois qu'elle est encore trop courte si elle ne dissipe pas un malentendu : admettre que certains élèves ne seront peut-être pas intéressés par la théorie mathématique de l'espace physique ne signifie nullement regretter les anciens programmes. Je pense au contraire qu'il ne peut y avoir que progrès par rapport à la situation antérieure, où l'immense majorité des élèves était partagée entre "ceux-qui-ne-comprenaient-pas-pourquoi-démontrer-ce-qu'on-voyait" et "ceux-qui-croyaient-si-fort-à-leur-démonstration-que-toute-vérification-expérimentale-leur-semblait-superflue".

Euclide avait-il bien compris que la "nature" pouvait n'être pas tout à fait décrite par son "modèle" ? C'est probable, compte tenu de son génie, mais ce n'est nullement évident à travers ce que les élèves recevaient du message d'Euclide. La nouvelle conception de l'enseignement de la géométrie devrait remédier à cet état de choses. Les élèves qui ne franchiront pas l'étape de la mathématisation sauront qu'ils ne l'ont pas encore franchie, et leur esprit restera ouvert au progrès.

Ces préoccupations épistémologiques pourront paraître hors de propos. Pourtant ce sont elles qui nous garantiront des travers que certains nous attribuent d'emblée (abstraction dogmatique — impérialisme mathématique etc...) parce que justement, ils se construisent un "modèle" périmé de l'enseignement des mathématiques au lieu de regarder ce que nous faisons.

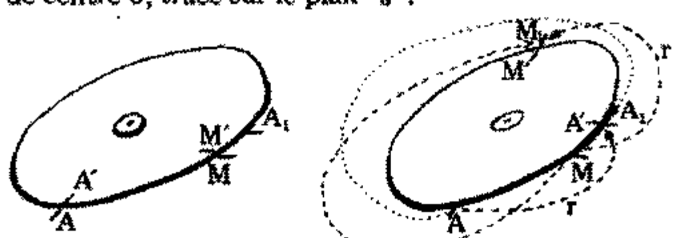
passant par O en deux points I et I' (appelés points diamétralement opposés sur le cercle) tels que les bipoints (O, I) et (O, I') représentent les deux vecteurs unitaires possibles pour la direction de la droite $\mathcal{D}$. *Nous devons donc chercher à construire le modèle de ce cercle, indicatrice des vecteurs unitaires du plan.*

2 — Mathématisation des rotations "techniques".

On constate d'abord que, de même que la droite technique peut glisser sur une autre en restant en contact (on dit qu'elle glisse sur elle-même), de même le cercle construit au compas peut "glisser sur lui-même". Dès lors, la démarche suivie en quatrième pour définir les translations de la droite peut être reprise en troisième pour définir les rotations du cercle unitaire C, bijections de C vers C entièrement déterminées par la donnée d'un couple de points de C.

En quatrième déjà nous avions bien distingué le *glissement* (mouvement physique) de la *translation* (bijection de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}$) — cependant on concevait que chaque translation était "matérialisée" par un glissement bien déterminé. De même en classe de troisième, nous distinguerons nettement la *rotation* (bijection de C vers C) des divers *pivotements* qui la réalisent.

Par exemple, on peut construire une maquette "technique" en découpant, dans une feuille de papier, un disque que l'on pose sur une feuille $\mathcal{P}$ fixée à la table. On fixe le centre O du disque à l'aide d'une punaise. Les mouvements du disque qui restent possibles sont des pivotements. Lorsque le disque pivote, son bord reste en contact avec le cercle C, de centre O, tracé sur le plan $\mathcal{P}$.



Quel que soit le pivotement, si A' vient sur A_1, M' vient sur M_1

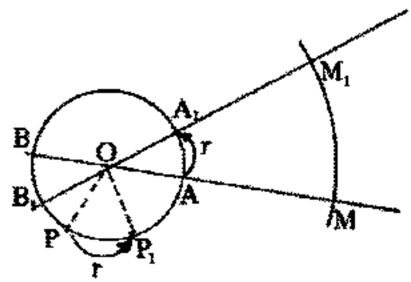
Soit (A, A_1) un couple de points de C et M un point quelconque de C. Le disque étant dans une certaine position, le point A' du bord du disque est au contact de A et le point M' du bord du disque est au contact de M. Faisons alors pivoter le disque (un tour, plusieurs tours, dans un sens ou dans l'autre, peu importe) et immobilisons-le dans une position telle que A' soit au contact de A_1. Alors M' est au contact d'un point M_1, bien déterminé, de C. *On contrôle que, A et A_1 étant donnés, ainsi que M, M_1 ne dépend pas du pivotement effectué (un* *tour, plusieurs tours, dans un sens ou dans l'autre).* On contrôle aussi que, si M_1 est image de M dans la rotation définie par le couple (A, A_1), alors A_1 est image de A dans la rotation définie par le couple (M, M_1).

Ces observations conduisent à énoncer l'axiome :

> "Si C est le cercle unitaire de centre 0, il existe des bijections de C vers C, appelées rotations du cercle, telles que :
>
> Tout couple (A, A_1) de points de C définit une rotation unique. Si dans cette rotation M_1 est image de M, alors A_1 sera image de A dans la rotation définie par le couple (M, M_1)".

On pourrait, à partir de là, définir des classes de couples de points de C, comme on a défini sur une droite des classes de bipoints appelées vecteurs. Mais, outre la difficulté de trouver un nom pour ces classes (arcs ? circovecteurs ? roteurs ? ? ...), leur étude n'est pas au programme. Il est donc préférable d'aborder tout de suite la rotation *plane*, bijection de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$, que l'on pourra définir ainsi :

La rotation r est définie par le couple (P, P_1)



"Au point 0, on fait correspondre le point 0 lui-même. Tout point M, distinct de 0, appartient à une droite unique, passant par 0 et qui coupe C en deux points A et B tels que $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont unitaires. Choisissons $\vec{OA}$ comme base ; alors il existe un réel k unique tel que $\vec{OM} = k\,\vec{OA}$.

Dans la rotation r de C, l'image de A est A_1, et il existe un point M_1 unique, tel que $\vec{OM_1} = k\,\vec{OA_1}$. C'est ce point M_1 bien déterminé, que nous appelons image de M dans la rotation r".

Remarquons d'ailleurs que cette image ne dépend pas du choix de $\vec{OA}$. En choisissant $\vec{OB}$, seul changerait le signe de k.

Ainsi à tout point $M \in \mathscr{P}$ est associé un point $M_1 \in \mathscr{P}$, unique. On peut admettre ou démontrer que l'application ainsi définie est une bijection qu'on appellera rotation du plan $\mathscr{P}$, de centre O, associée à la rotation r du cercle unitaire.

De même que toute translation du plan "conserve" toute droite parallèle à la "glissière" et transforme toute autre droite Δ en une droite

Δ_1 parallèle à Δ, de même, il est aisé de démontrer que toute rotation de centre O "conserve" tout cercle de centre O et transforme toute demi-droite d'origine O en une demi-droite d'origine O.

3 — Angles.

Suivant de nouveau la démarche du cours de quatrième, à chaque rotation de centre O (notion à rapprocher de celle de translation) nous faisons correspondre une classe de couples de demi-droites d'origine O, classe que nous appellerons "angle de sommet O" (notion à rapprocher de celle de vecteur).

On peut introduire ici les notations suivantes.

Si r désigne une rotation, $[Ox$ une demi-droite, $r([Ox)$ désigne l'image de $[Ox$ par la rotation r.

Si $[Oy = r([Ox)$, le couple de demi-droites $([Ox, [Oy)$ *représente* l'angle de sommet O noté $(\widehat{[Ox, [Oy})$.

La composition des rotations se définit comme composition d'applications (elle est donc associative). En outre (comme ce fut le cas lors de l'étude des translations), un retour à l'observation montre que, pour s'adapter à la situation matérielle, le modèle doit être enrichi d'un nouvel axiome : "la composition des rotations est commutative"*

La somme de deux angles de sommet O se définit, à partir de la composition des rotations de centre O, comme la somme de deux vecteurs à partir de la composition des translations. Et cette opération d'addition munit l'ensemble des angles de sommet O d'une structure de groupe commutatif. On retrouve aussi une "relation de Chasles" :

Quelles que soient les trois demi-droites $[Ox, [Oy, [Oz$,

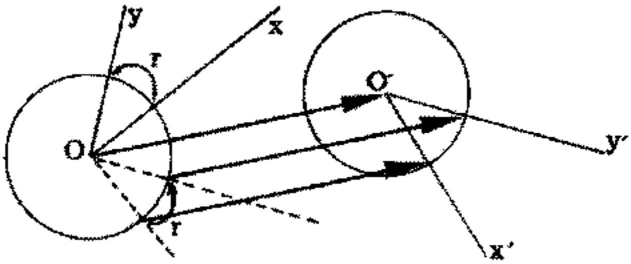
$$(\widehat{[Ox, [Oy}) + (\widehat{[Oy, [Oz}) = (\widehat{[Ox, [Oz})$$

En partant de cette première notion d'"angle", on peut définir l'angle de deux directions orientées, en associant à chaque demi-droite d'origine O, la direction orientée qu'elle représente. De même, on peut définir, si besoin est, l'angle de deux vecteurs.

A ces notions "abstraites" correspondent évidemment des dessins, suggérés par la manipulation de la maquette technique, et exécutés à la règle et au compas. En particulier, les demi-droites $[Ox$, $[Oy$, $[O'x'$ étant données, on saura construire $[O'y'$ telle que

$$(\widehat{[O'x', [O'y'}) = (\widehat{[Ox, [Oy}).$$

(*) L'axiome : "La composition des rotations est commutative" est équivalent à la proposition suivante, dont la vérification matérielle est peut-être plus immédiate : "Si $A = r(A_1)$ et $B = r(B_1)$, alors il existe une rotation r' telle que $B = r'(A)$ et $B_1 = r'(A_1)$". Cette proposition est à rapprocher de : "si $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$"



construction de $[0'y'$ telle que $(\widehat{[0'x', [0'y'}) = (\widehat{[0x, [0y})$

4 — Orthogonalité.

Cependant, une grande différence apparaît entre "angle de directions orientées" et "vecteur" : il existe en effet une rotation particulière (que l'on peut appeler demi-tour, parce que "réalisée" par des pivotements formés d'un nombre impair de demi-tours, dans un sens ou dans l'autre) telle que sa composée avec elle-même équivaut à l'identité — autrement dit, elle est sa propre opposée. Rien de semblable ne peut être observé dans l'ensemble des translations.

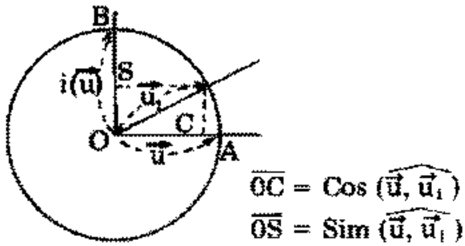
On désigne par $\hat{p}$ (angle plat) l'angle de directions orientées correspondant à cette rotation d'un demi-tour. D'une façon générale, si $\hat{\alpha}$ désigne l'angle de la rotation r, $2\,\hat{\alpha}$ désignera l'angle de la rotation (r o r). Alors $2(\hat{\alpha} + \hat{p}) = 2\,\hat{\alpha}$.

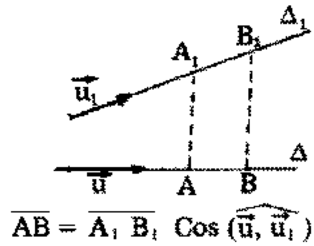
Si donc on pose le problème inverse de déterminer l'angle $\hat{x}$, tel que $2\,\hat{x} = \hat{\beta}$, $\hat{\beta}$ étant donné, on trouve *deux angles*, solutions de cette équation. Si l'un est $\hat{\alpha}$, l'autre est $(\hat{\alpha} + \hat{p})$.

Par suite, le couple de demi-droites de même origine ([Ox, [Oy) étant donné, il existe deux demi-droites [Oz, opposées l'une à l'autre, telles que $(\widehat{[Ox, [Oy}) = 2(\widehat{[Ox, [Oz})$. Ces deux demi-droites opposées constituent une droite Δ appelée *bissectrice* du couple ([Ox, [Oy).

Si [Ox et [Oy sont elles-mêmes opposées et ont pour support la droite $\mathcal{D}$, Δ est dite *perpendiculaire* à $\mathcal{D}$. Les directions de $\mathcal{D}$ et de Δ sont dites *orthogonales*. On est alors en mesure de préciser le sens des expressions : "la droite D est médiatrice du segment [AB]" ou "les points A et B sont symétriques par rapport à D".

D'autre part, choisir une des deux rotations dont le double est un demi-tour, c'est *orienter* le plan.
Soit i la rotation choisie ; *ce choix est* arbitraire *mais on convient généralement de* figurer *la rotation i* par un pivotement d'un quart de tour dans le "sens giratoire". L'angle $\hat{D}$, associé à cette rotation i, s'appelle angle droit direct. On a donc : $\hat{D} + \hat{p} = -\hat{D}$.





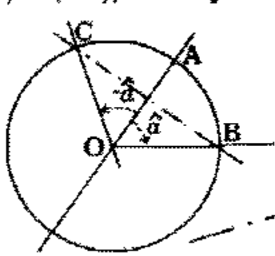
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est dite "orthonormée directe" si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et tels que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \hat{D}$. Dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont la base est orthonormée directe, si $\vec{u_1}$ est un vecteur unitaire défini par $(\widehat{\vec{u}, \vec{u_1}}) = \hat{\alpha}$, les coordonnées de A_1 tel que $\overrightarrow{OA_1} = \vec{u_1}$ sont respectivement "grand cosinus de l'angle $\hat{\alpha}$" et "grand sinus de l'angle $\hat{\alpha}$" (notations : Cos $\hat{\alpha}$, Sin $\hat{\alpha}$).

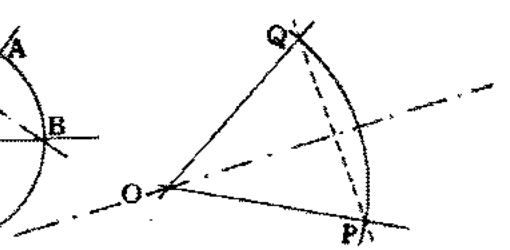
Ainsi le "rapport de projection orthogonale" d'un axe de base $\vec{u_1}$ sur un axe de base $\vec{u_2}$ est $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}})$. On distingue immédiatement les cas particuliers $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}}) = 1$, $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}}) = 0$, $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}}) = -1$.

5 — Achèvement du modèle euclidien.

Le modèle du cercle, étudié jusqu'ici, ne permet pas d'établir une relation entre $\mathrm{Cos}(\hat{\alpha})$ et $\mathrm{Cos}(-\hat{\alpha})$ sauf pour $\hat{\alpha} = \hat{D}$.
Or, il est intuitif qu'une telle relation existe pour la maquette technique, puisque la connaissance d'un pivotement qui réalise la rotation r d'angle $\hat{\alpha}$, entraîne la connaissance d'un pivotement réalisant la rotation r^{-1} d'angle $(-\hat{\alpha})$. Le modèle doit donc être encore complété pour le rendre apte à décrire la réalité matérielle.

Un retour à l'observation et à la manipulation conduit à adjoindre au modèle l'axiome suivant : "Quel que soit l'angle $\hat{\alpha}$ et le point A d'un cercle unitaire, les points B et C de ce cercle tels que $(\widehat{[OA, [OB}) = \hat{\alpha}$ et $(\widehat{[OA, [OC}) = (-\hat{\alpha})$, sont symétriques par rapport au diamètre passant par A".





On établit sans peine que, cette propriété étant posée pour un cercle unitaire, elle s'étend à tout cercle. Ainsi on retrouve un énoncé plus traditionnel : "dans tout triangle OPQ, isocèle en O, la médiatrice de [PQ] et la bissectrice de ([OP, [OQ) sont confondues".

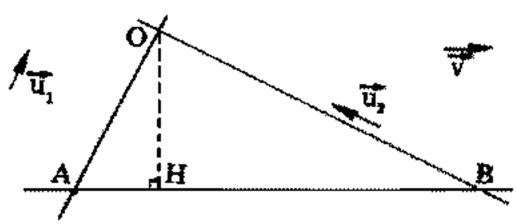
L'axiome "de symétrie" posé ci-dessus entraîne que $\mathrm{Cos}(\hat{\alpha}) = \mathrm{Cos}(-\hat{\alpha})$, ce qui équivaut aussi à dire que le rapport de projection orthogonale d'un axe Δ_1 sur un axe Δ_2 est égal au rapport de projection orthogonale de l'axe Δ_2 sur l'axe Δ_1.

6 — Premiers développements de géométrie euclidienne plane.

Tous les axiomes nécessaires sont alors posés pour permettre les développements désormais classiques : "produit scalaire, norme, distance euclidienne". Mais le produit scalaire ne figurant pas au programme, on peut chercher à l'éviter. Beaucoup d'entre vous regretteront sans doute qu'on passe aussi près d'un outil aussi puissant sans s'en saisir, d'autant plus que l'efficacité de l'outil s'éprouverait aussitôt dans la suite du cours. Mais d'autres penseront au contraire qu'il est de bonne politique, au moins dans l'immédiat, de ne pas effaroucher avec des notions qui autrefois, s'enseignaient à un niveau supérieur. Voici alors ce que l'on peut faire :

a) *Etablir le théorème T_1 suivant :*

"$\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{v}$ étant trois vecteurs deux à deux linéairement indépendants et tels que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ soient orthogonaux,
$\mathrm{Cos}^2(\vec{v}, \vec{u_1}) + \mathrm{Cos}^2(\vec{v}, \vec{u_2}) = 1$".



La démonstration utilise un triangle OBA tel que $\vec{u_1}$ soit directeur pour (OA), $\vec{u_2}$ directeur pour (OB) et $\vec{v}$ directeur pour la droite (AB). Soit A la projection orthogonale de O sur (AB). On a :

$$\overline{AO} = \overline{AB}\ \mathrm{Cos}\,(\widehat{\vec{v}, \vec{u_1}})$$

$$\overline{AH} = \overline{AO}\ \mathrm{Cos}\,(\widehat{\vec{u_1}, \vec{v}})$$

Mais $\mathrm{Cos}(\widehat{\vec{v}, \vec{u_1}}) = \mathrm{Cos}(\widehat{\vec{u_1}, \vec{v}})$. Donc $\overline{AH} = \overline{AB}\ \mathrm{Cos}^2(\widehat{\vec{v}, \vec{u_1}})$.

On démontrerait de même que $\overline{HB} = \overline{AB}\ \mathrm{Cos}^2(\widehat{\vec{v}, \vec{u_2}})$.

En ajoutant membre à membre ces deux dernières égalités, et en divisant par $\overline{AB}$ les deux membres de l'égalité obtenue, on obtient la conclusion proposée.

b) *Définir la distance dans* $\mathcal{P}$:

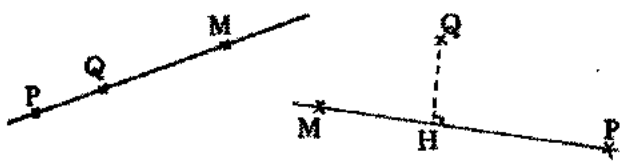
Du théorème T_1 découle d'abord que $|\cos \hat{\alpha}| \leqslant 1$

Cela permet d'établir que le nombre positif $|\overrightarrow{AB}|$ a toutes les propriétés d'une distance, définie sur l'ensemble des points du plan.
En effet :

1°) $|\overrightarrow{MP}| = 0$ si et seulement si $M = P$ (comme sur la droite)

2°) Quels que soient les points M et P : $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{PM}|$
(propriété établie sur la droite (MP))

3°) Quels que soient M, P, Q, $|\overrightarrow{MP}| \leqslant |\overrightarrow{MQ}| + |\overrightarrow{QP}|$



Ceci a été établi si Q appartient à la droite (MP).
Sinon Q est distinct de sa projection orthogonale H sur la droite (MP) et on a $|\overrightarrow{MP}| \leqslant |\overrightarrow{MH}| + |\overrightarrow{HP}|$. Or puisque $|\cos \hat{\alpha}| \leqslant 1$:

$$|\overrightarrow{MH}| = |\overrightarrow{MQ}| \cos\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})} \leqslant |\overrightarrow{MQ}|$$

$$|\overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{QP}| \cos\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{QP})} \leqslant |\overrightarrow{QP}|$$

$$\text{Donc } |\overrightarrow{MP}| < |\overrightarrow{MQ}| + |\overrightarrow{QP}|.$$

Ainsi, le nombre positif $|\overrightarrow{MP}|$, dont on avait reconnu en classe de quatrième qu'il avait toutes les propriétés d'une distance pour l'ensemble des points de la droite (MP), a aussi toutes les propriétés d'une distance pour l'ensemble des points du plan.

On pourra donc l'écrire d(MP).

c) *Etudier le cas où $d(MP) = d(MQ) + d(QP)$:*

Il résulte de la démonstration précédente que l'égalité
$d(MP) = d(MQ) + d(QP)$ suppose :

d'une part : $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MH}| + |\overrightarrow{HP}|$ c'est-à-dire que $H \in [MP]$

d'autre part : $|\cos\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})}| = 1$ c'est-à-dire que :

$$\widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})} = \hat{0} \text{ ou que : } \widehat{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})} = \hat{p}.$$

ce qui signifie que Q appartient à la droite (MP) ; Q est alors confondu avec sa projection H.
Ainsi $d(MP) = d(MQ) + d(QP)$ si et seulement si $Q \in [MP]$

d) *Définir la norme d'un vecteur :*

Si (A, B) et (C, D) sont deux représentants distincts du même vecteur $\vec{V}$, il résulte de ce qui précède que d(AB) = d(CD). Le nombre d(AB) n'est donc pas seulement lié aux deux points A et B mais au vecteur $\vec{AB}$. Pour cette raison on l'appelle aussi norme du vecteur $\vec{AB}$ ou norme de $\vec{V}$. On note d(AB) = $\|\vec{V}\|$. L'usage de ce mot "norme" est immédiatement justifié par les propriétés de $\|\vec{V}\|$ qui sont bien celles d'une norme :

1°) $\|\vec{V}\| = 0$ équivaut à $\vec{V} = \vec{0}$.

2°) Pour tout réel r, et tout vecteur $\vec{V}$: $\|r.\vec{V}\| = |r| . \|\vec{V}\|$

3°) Quels que soient les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\| \leqslant \|\vec{V}_1\| + \|\vec{V}_2\|$$

e) *Revenir sur la notion de longueur*

Avant de terminer cette construction des éléments sur lesquels il sera possible, dans une seconde partie du cours, de développer la géométrie euclidienne du plan, il est souhaitable de revenir sur la notion de longueur. Il s'agit d'une notion ... "physique", déjà utilisée en sixième et cinquième et que les élèves risquent de ne pas bien situer si on n'y revient pas.

On remarque que, si on multiplie les vecteurs unitaires par le nombre réel k, et que l'on prenne ces vecteurs produits comme nouveaux vecteurs unitaires, la distance de toute paire de points est divisée par $|k|$. Par suite, la relation d(AB) = d(CD) est indépendante du cercle unitaire. Appelons donc *segment libre A, B* (noté AB), la classe des segments liés [MP] (chaque segment lié est un ensemble de points) tels que d(MP) = d(AB).

Si $\vec{u}$ est unitaire et si $\vec{AB} = \vec{u}$, nous dirons que le segment libre AB est *l'unité de longueur*. Par exemple AB sera appelé *le centimètre*. Si $\vec{CD} = k\,\vec{u}$, d(CD) = $|k|$; le nombre $|k|$ est la *mesure* du segment libre CD avec l'unité AB. Par exemple, si $|k| = 3{,}2$, on écrira :
"en cm : (mes CD) = 3,2".

Mais on peut aussi écrire : CD = 3,2 cm.

L'expression "3,2 cm" est la *longueur* de CD. Ainsi il est équivalent de dire : "la mesure de CD, en centimètres, est 3,2" ou de dire : "la longueur de CD est 3,2 cm".

Bien que le mot "longueur" soit généralement associé à une expression numérique, la longueur *est* un segment libre. Ainsi on peut écrire 3,2 cm = 32 mm. Par suite, il est peut-être possible de faire l'économie de l'expression "segment libre" (mais alors, la notation AB devrait être lue "longueur A, B" et on s'écarterait d'un usage répandu qui associe longueur et expression numérique).

Si la relation d(AB) $\leqslant$ d(CD) est vraie, elle ne dépend pas de l'unité de longueur (manière de dire qu'elle reste vraie lors de tout changement de l'unité de longueur). On peut donc écrire AB $\leqslant$ CD et on définit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble des segments libres.

Si la relation d(AB) = d(CD) + d(EF) est vraie, elle ne dépend pas non plus de l'unité de longueur. L'écriture AB = CD + EF a donc une signification et on définit ainsi la somme de deux segments libres.

Mais la différence de deux segments libres (AB — CD) n'existe que si CD $\leqslant$ AB. Lorsqu'on ignore si AB $\leqslant$ CD ou si CD $\leqslant$ AB, on peut désigner par "différence absolue" (notée |AB — CD|) celle des deux différences (AB — CD) ou (CD — AB) qui existe certainement. Avec ces définitions, la "relation triangulaire" devient exprimable, indépendamment de tout choix de l'unité de longueur :

$$\text{quels que soient A, B, C : } |AB - AC| \leqslant BC \leqslant AB + BC$$

Ainsi la notation AB n'est pas abandonnée. Elle a un sens précis. Il n'en est pas de même pour la notation AB^2 qu'on trouvait dans des livres anciens. Il s'agit là d'un abus d'écriture, propre à semer la

Résumé : divers "objets mathématiques" définis par deux points

		dépendant de l'ordre (A,B) le couple (A, B)	ne dépendant pas de l'ordre : la paire {A, B}
indépendants du choix de l'unité de longueur	classe de bipoints équipollents	$\overrightarrow{AB}$	
	ensembles de points	les demi-droites : [AB et [BA les intervalles : [AB[et]BA]	la droite : (AB) l'intervalle :]A, B[le segment (lié) : [AB]
	classe des segments liés		le segment (libre) AB
dépendants du choix de l'unité	classe de segments liés		longueur de AB : $\|k\|$. U
	nombre réel	$\overline{AB}$	distance A, B : d(AB) ou mesure de la longueur de AB : (mes AB)

confusion dans les esprits, car "le carré d'un segment libre" est une expression dénuée de sens. C'est du carré d'un nombre qu'il s'agit, soit : $(\text{mes } AB)^2$, ou $d(AB)^2$.*

7 — Indications sur la suite du cours

La suite du développement de la géométrie euclidienne peut se faire sans originalité, tous les axiomes et définitions ayant été posés. En particulier le théorème de Pythagore sera une conséquence immédiate de T_1.

Il convient cependant de préciser comment les notions précédentes se raccordent avec d'autres, introduites par l'usage ou le programme et qui ne sont peut-être pas toutes logiquement indispensables.

Ainsi, dans les classes précédentes, on avait parlé de secteurs angulaires. Il s'agissait d'ensembles de points (comme segments liés). A chaque secteur saillant on peut associer deux angles opposés, définis par les couples de demi-droites qui constituent ses côtés (de même, à chaque segment lié $[AB]$, on peut associer deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$).

De même qu'à chaque vecteur d'une droite on associe sa composante, une base étant choisie, de même à chaque angle on associera une classe de nombres réels, le nombre associé à l'angle $\hat{p}$ étant choisi. (Dans cette classe un nombre particulier sera distingué : la détermination principale de l'angle).

De même que la valeur absolue de la composante de $\vec{AB}$ devient la distance de (A, B), de même la valeur absolue de la détermination principale de $([\overline{Ox}, [\overline{Oy})$ sera *l'écart* du saillant $(\widehat{x\,O\,y})$.

De même que la classe des bipoints ayant même distance que (A, B) est le segment libre AB, de même la classe des saillants ayant même écart que $(\widehat{x\,O\,y})$ est l'"angle géométrique" $\widehat{xOy}$.

(*) Remarquons que pour les Grecs cependant AB^2 pouvait avoir la signification du carré construit sur le côté $[AB]$ ou de la classe des carrés de côté AB. Mais alors, c'est l'addition dans l'ensemble de ces carrés qui pose des difficultés non négligeables.

Le tableau suivant résume ces analogies !

(1)	Ensemble de points	segment lié	saillant
(2)	"bords" pour (1)	bipoint	couple de demi-droites
(3)	bijections dans (1)	translation	rotation
(4)	classes de (2) définies par (3)	vecteur	angle
(5)	nombre réel associé à (4)	composante	détermination principale
(6)	valeur absolue de (5)	distance	écart angulaire
(7)	classe de (1) pour (6)	segment libre	angle géométrique

En conclusion, non seulement le départ concret (glissements - pivotements) nous conduit rapidement et simplement aux notions qui seront les meilleurs outils mathématiques dans la suite (espaces vectoriels - angles de directions orientées ...) mais cette démarche n'introduit aucune difficulté de raccordement avec les autres notions du programme.