Géométrie métrique et produit scalaire

Rédigé par R. Gauthier, d'après les idées de l'équipe de l'IREM de Lyon, qui a travaillé sur la métrique en classe de troisième.

Les commentaires sur les programmes de géométrie de Troisième donnent une certaine présentation, à mon avis un peu lourde, des notions de métrique plane introduites dans cette classe.

Le professeur *"restant libre du choix des axiomes et de l'ordre de présentation"*, il est évident que le contenu de ces "commentaires" n'a pas de caractère impératif.

Certains professeurs des classes expérimentales de troisième ont, en 70-71, tenté une autre approche de la présentation du plan euclidien en utilisant un produit scolaire dans l'espace vectoriel associé.

L'expression "produit scalaire" ne figure certes pas au "programme" : mais il ne s'agit pas, dans cette classe, d'étudier une théorie de quelconques formes bilinéaires symétriques, mais d'utiliser un *outil* efficace et pratique, en vue de l'introduction claire et simple d'une métrique.

Cet outil, on pourrait sans doute éviter de l'appeler "produit scalaire", si les mots effraient certains : les mots n'ont que l'importance qu'on leur donne. Mais il est tout de même commode de disposer d'un vocable pour désigner un outil mathématique souvent utilisé.

Je n'insisterai pas outre mesure sur "avantages" et "inconvénients" : ils nous sont apparus à l'expérience, et les collègues pourront eux-mêmes juger *après expérience*.

Le produit scalaire passait pour être une chose arbitraire et théorique ; ce n'est pas du tout certain ; en tout cas il est évident que certains aspects théoriques seront accompagnés d'illustrations concrètes avec compas, double-décimètre, rapporteur et équerre.

N'utilise-t-on pas depuis longtemps, et dès la quatrième, des calculs sur les polynomes beaucoup plus "théoriques" que ceux qui seront mis en oeuvre ici ?

Avantages :

— Clarté et efficacité de la présentation des questions métriques ;

— Utilisation de l'"outil vectoriel" mis en place en fin de quatrième ;

— Traiter la trigonométrie avant l'étude des isométries ;

— Utilisation de calculs simples sur des polynomes ;

— Préparation de l'avenir pour les élèves qui iront dans le second cycle ;

— Mise à la disposition du physicien d'un outil utilisable dans d'autres domaines (travail) ;

— L'élève de quatrième a vu qu'il n'y a pas séparation étanche entre "algèbre" et "géométrie", bien au contraire (droite affine et $\mathbb{R}$, équation de droite).

Inconvénients

— Le produit scalaire utilisé est lié à une base du vectoriel (voir annexe) ;

— L'intérêt apparaît à l'enfant, seulement après coup lorsqu'il a assimilé certains résultats ;

— Présentation "parachutée", dans une certaine mesure.

Il n'est pas question ici de donner le développement complet d'un "cours" de troisième. J'indiquerai la démarche générale en insistant sur certains points particuliers.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$	Dans le plan affine associé P
① définition d'un produit scalaire	
② Norme d'un vecteur ...	... distance de deux points
③ Vecteurs orthogonaux ...	... droites perpendiculaires
④ Couples de vecteurs unitaires : ...	... cosinus d'un couple de demi-droites
Cosinus	Trigonométrie pratique
⑤	... Isométries affines

1 *Introduction d'un produit scalaire*

a) *Quelques activités préparatoires* (Aucune théorie ... Ne pas chercher ici d'espace vectoriel ...)

— Le marché de la ménagère :

2,5 kilos de pommes de terre à 1,20 F le kg
3 fromages à 0,80 F l'un
2 pains à 0,65 F l'un

$$\text{Prix à payer}\ \left.\begin{array}{l} 2{,}5 \times 1{,}20 \\ 3 \quad \times 0{,}80 \\ 2 \quad \times 0{,}65 \end{array}\right\} \longrightarrow (2{,}5 \times 1{,}20) + (3 \times 0{,}80) + (2 \times 0{,}65)$$

— La facture du gaz et de l'électricité :

Kwh : a ; prix unitaire : x
Thermies : b ; prix unitaire : y

Prix à payer : ax + by.

— Les translations sur un quadrillage ont déjà été étudiées en cinquième :

f est la translation associée au couple (2, 4)

g est la translation associée au couple (−2, 1)

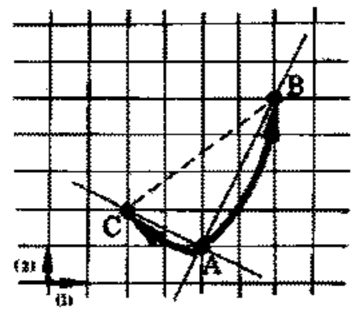
$$f : A \longmapsto B$$

$$g : A \longmapsto C$$

Au couple (f, g) associons la somme

$$(2 \times (-2)) + (4 \times 1)$$

$$[(2, 4) ; (-2, 1)] \longmapsto -4 + 4 = 0$$

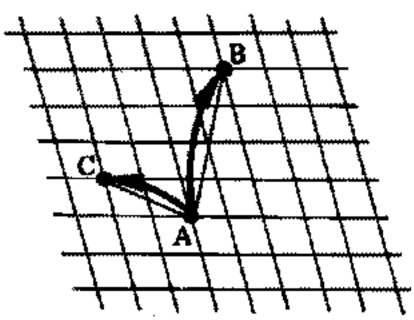


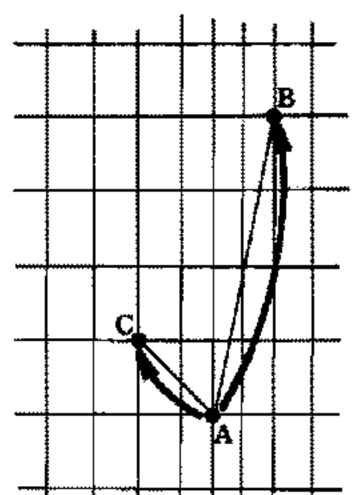
Si le quadrillage est à mailles "régulières" et construit à l'équerre, ou celui du cahier d'écolier, on pourra constater que les droites matérielles AB et AC sont "perpendiculaires" au sens de l'équerre du commerce.

On pourra d'ailleurs recommencer avec d'autres translations $t_{(a,b)}$ et $t'_{(a',b')}$ telles que

$$aa' + bb' = 0$$

Par contre, si le quadrillage est "non régulier", ou "oblique", on ne peut plus appliquer l'équerre sur les droites matérielles AB et AC.





On remarquera au passage que, ce qui nous intéresse, ce ne sont pas les coordonnées des points, mais bien les couples de réels associés aux *translations*, c'est-à-dire les couples associés aux couples de points.

— On trouvera sans peine d'autres activités pratiques dans lesquelles on met en jeu une "forme" bilinéaire et symétrique.

Ces exercices, qui ne prennent pas beaucoup de temps, n'ont d'autre ambition que d'amener l'élève à l'idée d'utiliser des couples, des triplets, des sommes de produits de réels pour rendre compte de certaines réalités physiques, économiques, etc ...

Elles semblent tout de même indispensables pour que l'introduction du produit scalaire dans $\mathbf{R}^2$ ne soit pas trop abrupte et surprenante.

b) *Un outil nouveau*

$\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des vecteurs, associé au plan affine P : $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur R ; $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base B de $\mathcal{V}$, choisie une fois pour toutes.

Si $\vec{u} \in \mathcal{V}$ s'écrit $a\vec{i} + b\vec{j}$, (a,b) est le couple de composantes de $\vec{u}$ relativement à B.

$$\text{Notation} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

Au couple $(\vec{u},\vec{v})$ associons le réel : aa' + bb'

On définit ainsi une application

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto aa' + bb' \end{array} \right.$$

Cette définition est, bien sûr, liée à la base B choisie, ce qui ne comporte aucune restriction mathématique (voir annexe).

Il est commode, mais non indispensable, de donner un *nom* à φ : application "produit scalaire".

Notation possible : $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$ (on lit : "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$")

$$(\text{ou} < \vec{u},\vec{v} >)$$

Les propriétés qui suivent ne seront pas démontrées : elles donnent l'occasion de calculs sur des polynomes simples dans R et fournissent matière à un entraînement intelligent sur ces calculs.

c) *Propriétés*

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ désignent des éléments quelconques de $\mathcal{V}$, dont on choisira les composantes ; γ désigne un réel quelconque.

Première notation (fonctionnelle)	Seconde notation
$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$	$\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$
$\varphi(\vec{u}, \gamma \vec{v}) = \gamma \times \varphi(\vec{u}, \vec{v})$	$\vec{u} . (\gamma \vec{v}) = \gamma \times (\vec{u} . \vec{v})$
$\varphi(\vec{u}, \vec{v} \oplus \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{u}, \vec{w})$	$\vec{u} . (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\vec{u} . \vec{v}) + (\vec{u} . \vec{w})$
$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) \geqslant 0$	$\vec{u} . \vec{u} \geqslant 0$
$\varphi(\vec{i}, \vec{i}) = \varphi(\vec{j}, \vec{j}) = 1$	$\vec{i} . \vec{i} = \vec{j} . \vec{j} = 1$
$\varphi(\vec{i}, \vec{j}) = 0$	$\vec{i} . \vec{j} = 0$
$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \longmapsto\!\dashv \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} . \vec{u} = 0 \longmapsto\!\dashv \vec{u} = \vec{0}$

Exercices possibles

— Discussion sur la signification des signes "d'addition" et de "multiplication" qui figurent dans les formules ci-dessus.

— Calculs divers, en particulier si $\vec{u}.\vec{v} = \alpha$, calculer $(m\,\vec{u}).(n\,\vec{v})$

— Calculs de $\vec{u}.(-\vec{u})$, $(-\vec{u}).(-\vec{u})$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$

— $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; trouver des composantes de $\vec{v}\,(\vec{v} \neq \vec{0})$ tel que $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Que dire alors de $(m\,\vec{u}).(n\,\vec{v})$?

— Le produit scalaire de deux vecteurs non égaux à $\vec{0}$ et de même direction n'est pas nul.

Tout cela utilise, au départ, essentiellement les couples de *composantes* : mais précisément, les composantes, si elles ne servent pas, à quoi bon les introduire en quatrième ? Pourquoi avoir fabriqué, dans cette classe, un espace vectoriel, parlé de base, pour ne plus l'utiliser en troisième ?

2 *Vers une distance mathématique dans le plan*

a) *Activités préparatoires*

Si on disposait de temps (hélas ! ...) il serait intéressant de présenter, sur des exemples simples, des distances diverses :

Distances de parties d'ensembles, distances sur quadrillage, écarts d'opinions, etc ...

On peut ici rappeler la notion de distance sur une droite euclidienne vue en quatrième. L'usage du "double-décimètre" est suffisamment connu pour qu'il ne soit pas nécessaire de s'y étendre.

On pourra tout de même faire remarquer que la "distance" définie en quatrième est liée à chaque droite graduée ; il n'y a pas compatibilité avec le transport du double-décimètre d'une droite sur une autre : en schématisant, *chaque* droite euclidienne est munie de son *propre* double-décimètre. D'où la nécessité d'une nouvelle définition : elle ne dépendra plus de chaque droite, mais du "repérage" même défini dans le plan.

b) *Norme et distance*

On a vu que :

$$\vec{u}.\vec{u} \in \mathbf{R}^{+} \qquad (-\vec{u}).(-\vec{u}) = \vec{u}.\vec{u}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = 0 \longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Le réel positif $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ est appelé *norme* du vecteur $\vec{u}$.

On le note : $\|\vec{u}\|$.

Si (A,B) est un couple de points, représentant de $\vec{u}$, le réel $\sqrt{\vec{AB}.\vec{AB}}$, norme de $\vec{AB}$, est doué des propriétés de la distance sur la droite.

Dans $\mathcal{V}$	Dans P
$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}.\vec{AB}}$
$\|\vec{u}\| = 0 \longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$	$\|\vec{AB}\| = 0 \longleftrightarrow A = B$
$\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{(-\vec{u}).(-\vec{u})}$	$\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\|$

La *distance* de deux points A et B dans le plan P est le réel $\sqrt{\vec{AB}.\vec{AB}}$

Notation : $d(A, B)$

L'inégalité $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$

pourrait être démontrée ici en utilisant une propriété de la norme d'une somme. La démonstration est un peu délicate : on a sans doute avantage à la reporter plus loin, après le théorème de Pythagore et la distance d'un point à une droite.

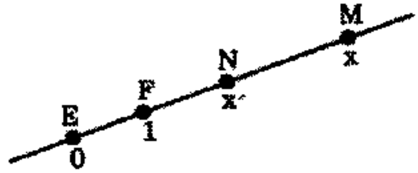
Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer :

— que cette distance est liée à la base choisie dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, donc au repère choisi dans le plan associé ; c'est bien ce qui se passait, après tout, lorsque l'on a défini une distance sur la droite.

— que les propriétés de d (A,B) rendent compte des propriétés observées dans les manipulations du double-décimètre.

— que cette "distance dans P" contient la "distance sur la droite" définie en quatrième, *à une condition :*

Si ($\dot{E}$, F) est le repère d'une graduation f sur la droite, désormais, pour toutes les droites, ce repère sera choisi de telle sorte que, pour la distance d du plan : d (E, F) = 1



$\vec{MN} = (f(N) - f(M)).\ \vec{EF}$

$\vec{MN}.\vec{MN} = (f(N) - f(M))^2 \times (\vec{EF}.\vec{EF})$

$d(M,N) = |f(N) - f(M)| \times d(E,F)$

$d(M,N) = |f(N) - f(M)|$

Ainsi est établi, de manière non artificielle, un lien entre les "distances" sur toutes les droites de P : le plan est un plan euclidien.

Si (I, J, K) est le repère de P : d(I,J) = d(I,K) = 1.

c) *Les applications*

— Milieu : si K est le milieu de (A,B), d(A,K) = d(K,B) ;

— Le cercle, le disque : usage du compas et distance physique ;

— Divers triangles, isocèle, équilatéral ;

— Côtés du parallélogramme et du losange ;

— Constructions en dessin géométrique.

3 *Perpendiculaires*

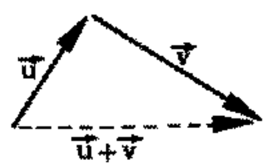
a) *Activités préparatoires*

. *Théorique*

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \times (\vec{u}.\vec{v})$

On notera la propriété suivante :

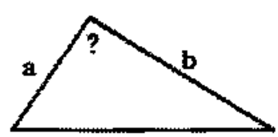
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \longmapsto \vec{u}.\vec{v} = 0$



. *Pratique*

a,b,c désignant trois distances, on pourra chercher des triplets (a,b,c) de réels tels que :

$$c^2 = a^2 + b^2$$



On trouvera sans peine (5,4,3) ; (50,40,30) et bien d'autres ...

On peut faire fabriquer, avec des fils métalliques de longueurs 50, 40 et 30 en cm, un triangle qui ressemble étrangement à une équerre du commerce. On fera ainsi faire prendre conscience du lien étroit existant entre :

un fait mathématique : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $a^2 + b^2 = c^2$;
un fait physique : perpendicularité "matérielle" de deux côtés.

b) *Droites perpendiculaires*

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ sont des vecteurs *orthogonaux*.

S'ils sont différents du vecteur $\vec{0}$, alors ils ne sont pas de même direction (voir plus haut).

Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, alors tout vecteur de même direction que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de même direction que $\vec{v}$ (voir plus haut).

La droite d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$,

la droite d' est une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, d et d' sont *perpendiculaires*.

Notation : d $\perp$ d'

Les propriétés de cette nouvelle relation notée $\perp$ dans l'ensemble des droites de P, les propriétés entre perpendicularité et parallélisme, découlent immédiatement de cette définition, en exploitant au mieux l'outil vectoriel.

c) *Les applications*

— Perpendiculaires et droites de même direction ;

— Droites perpendiculaires à une même droite ;

— Unicité de la perpendiculaire, contenant un point donné ;

— Hauteur ;

— Usage de l'équerre ;

— Médiatrice d'un segment ;

— Cercle contenant trois points donnés ;

— Constructions avec le compas.

d) *Pythagore*

De la propriété vectorielle $\vec{u}.\vec{v} = 0 \longmapsto \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ découle la propriété dans le plan

$$AB \perp AC \longmapsto (d(B,C))^2 = (d(A,B))^2 + (d(A,C))^2$$

On a, du même coup, le théorème de Pythagore et sa "réciproque".

Les applications immédiates sont bien connues :

— Rectangle, ses diagonales ;

— Triangle rectangle et cercle circonscrit ;

— Côté du carré et diagonale ;

— Distance d'un point à une droite ;

— Inégalités entre côtés du triangle rectangle ;

— Cercle et droite : position relative.

4 *Cosinus - Trigonométrie - Projections perpendiculaires.*

a) *Projection orthogonale*

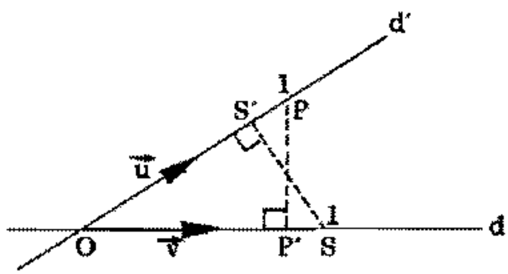
(d,f) et (d',f') étant deux droites graduées, l'élève de quatrième a étudié la projection, de direction donnée, de d sur d', et le rapport de projection associé.

Si on choisit des *graduations compatibles avec la structure euclidienne du plan* (vecteurs unitaires de normes égales dans ce plan) et si la direction choisie est perpendiculaire à d, alors on pourra parler de *projection orthogonale* de d sur d'.

(O,P) est un représentant du vecteur directeur *unitaire* $\vec{u}$ de d' (un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1).

(O, S) est un représentant du vecteur *unitaire* directeur $\vec{v}$ de d.

P' est le projeté orthogonal de P sur d et l'abscisse k de P' sur d est le rapport de projection orthogonale de (d',f') sur (d,f).



En utilisant les propriétés du produit scalaire, on démontrera que :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{OP}.\vec{OS} = k.$$

De même, si k' est le rapport de projection orthogonale de d sur d' :

$$\vec{v}.\vec{u} = \vec{OS}.\vec{OP} = k'$$

D'où les propriétés immédiates :

. $k = k'$. Dans le plan euclidien, le rapport de projection orthogonale de d sur d' est le même que le rapport de projection orthogonale de d' sur d.

. $|k| < 1$ (voir triangle rectangle OPP') donc

$$-1 \leqslant k \leqslant +1$$

. A tout couple de *vecteurs unitaires* de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{V}$, on peut associer le réel k, compris entre -1 et $+1$: c'est le cosinus du couple $(\vec{u},\vec{v})$ ou du couple $(\vec{v},\vec{u})$

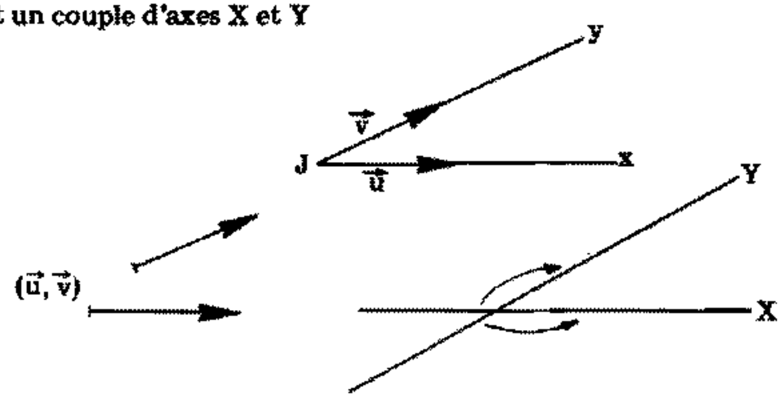
$$k = \cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$$

b) *Angle géométrique et cosinus*

Si $(\vec{u},\vec{v})$ est un couple de vecteurs *unitaires* de $\mathcal{V}$, à ce couple on peut associer, dans le plan euclidien où l'on a choisi un point J :

— soit un couple de demi-droites de même origine J (Jx, Jy), de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

— soit un couple d'axes X et Y



On pose

$\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = \cos(\mathrm{Jx}\,,\mathrm{Jy}) = \cos(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})$

Si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des couples de demi-droites tels que les demi-droites d'un même couple aient la même origine, on définit dans $\mathcal{D}$ la relation $\mathcal{C}$:

" ... *a même cosinus que* ... "

C'est évidemment une relation d'équivalence : une classe est un *angle géométrique de demi-droites* ;

$$(\mathrm{Jx},\mathrm{Jy})\ \mathcal{C}\ (\mathrm{Kx'},\mathrm{Ky'}) \text{ signifie } (\widehat{\mathrm{Jx},\mathrm{Jy}}) = (\widehat{\mathrm{Kx'},\mathrm{Ky'}})$$

Mêmes définitions pour un angle d'axes.

Certains angles géométriques reçoivent un nom particulier selon les valeurs du cosinus associé ; on en donnera une représentation physique par des croquis bien classiques :

$k = 0$	$\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$	$\mathrm{Jx} \perp \mathrm{Jy}$	angle droit
$k = 1$	$\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$	$\vec{u} = \vec{v}$	angle nul
$k = -1$	$\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$	$\vec{u} = -\vec{v}$	angle plat
$0 < k < +1$			angle aigu
$-1 < k < 0$			angle obtus

Exercices possibles :

— Jx étant donnée, construction d'un couple (Jx, Jy) de cosinus donné (2 solutions).

— Usage du rapporteur pour trouver une mesure physique pour un couple donné.

c) *Trigonométrie pratique*

On ne fera pas une théorie complète de la trigonométrie ; il suffit que l'élève, arrivant en seconde, possède les quelques connaissances nécessaires à la physique "concrète" étudiée au début de cette classe.

On étudiera les questions suivantes dans une optique résolument pratique :

— Couple de demi-droites d'origine J et repérage sur un demi-cercle.

— "Sinus" défini comme l'ordonnée d'un point.
Le cosinus est l'abscisse de ce point.

— Relation entre sinus et cosinus. Définition de la tangente comme un quotient de réels.

— Application au triangle rectangle.

— Usage des tables et mesure concrète d'un angle géométrique.

5 *Isométries du plan euclidien*

a) *Activités préparatoires*

L'élève a étudié en quatrième un certain nombre de bijections du plan :
— la symétrie centrale
— la translation

Sur quelques exemples, on pourra constater que, pour chacune de ces deux bijections, si A et B ont respectivement pour images A' et B',

$$d(A, B) = d(A', B')$$

Elles "conservent la distance" dans le plan euclidien.

De manière plus concrète, dans le plan physique, l'élève pourra constater que, dans un pliage, il y a aussi conservation de la distance du compas.

Par ailleurs, on notera aussi, à titre de contre-exemple, que, en général, pour une projection orthogonale sur une droite, la distance de deux points n'est pas conservée.

b) *Isométries*

Si f est une *bijection du plan euclidien* P, et si pour tout couple de points (M, N)

$$d(M, N) = d(f(M), f(N))$$

alors f est une *isométrie* de P.

La translation, la symétrie centrale sont des isométries.

On définira une nouvelle isométrie : la symétrie par rapport à une droite.

L'étude théorique se borne à montrer que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des isométries de P, muni de la composition des bijections, est un groupe non commutatif : cette démonstration ne présente aucun difficulté avec des enfants familiarisés avec les notions de groupe et de composition de bijections.

Applications possibles

— Conservation du produit scalaire ;

— Image d'un repère orthonormé par une isométrie ;

— Composition de symétries-points à titre d'exercice ;

— Le groupe des translations est un sous-groupe du groupe ($\mathfrak{J}$,o) ;

— Image d'une droite par une isométrie ;
Images de droites perpendiculaires, de droites parallèles ;

— Arcs isométriques ;

— Axes de symétrie d'une figure ; centre de symétrie ;

— Des couples de demi-droites d'un même angle géométrique sont isométriques ;

— Une isométrie est "déterminée" par la donnée d'un repère orthonormé (A,B,C) de P et de son image (A',B',C'), ou par la donnée d'un triplet de points non alignés et de son image.

Cette dernière question est certes intéressante : elle ouvre des perspectives théoriques importantes, mais on voit difficilement ce que peut en faire un élève de fin de troisième, alors qu'il a à sa disposition tous les résultats concernant le plan euclidien.

Pour une conclusion

Utiliser le vectoriel, puisqu'il existe ; obtenir avec élégance les résultats essentiels de la géométrie métrique plane en exploitant un outillage mathématique qui a fait ses preuves ; préparer l'avenir.

Tels sont les buts essentiels de cette présentation.

Hélas ! Il nous faut mettre en oeuvre ce fameux "produit scalaire" qui effraie, comme ont effrayé naguère les mots "vecteurs", "groupes" et quelques autres.

Aux collègues de juger après expérience, en usant de cette liberté qu'il leur reste : le choix de la méthode.

Je suis, pour ma part, convaincu, que le produit scalaire figurera au prochain "nouveau programme" de troisième, dans la mesure où la géométrie aura encore droit de cité.

ANNEXE

$\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur **R**.

$B(\vec{i},\vec{j})$ est une base.

φ est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$ tel que :

$\varphi(\vec{i},\vec{i}) = \alpha \ (\alpha > 0)$, $\varphi(\vec{j},\vec{j}) = \beta \ (\beta > 0)$, $\varphi(\vec{i},\vec{j}) = \gamma$

1 La connaissance des réels α, β, γ permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques à condition que l'on connaisse leurs composantes relativement à B.

Le démontrer.

2 $B'(\vec{r},\vec{s})$ est une autre base de $\mathcal{V}$.

Montrer que l'on peut trouver r et s tels que

$$\varphi(\vec{r},\vec{r}) = \varphi(\vec{s},\vec{s}) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{r},\vec{s}) = 0$$

On peut choisir $\vec{r} = \lambda\vec{i}$

$$\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$$

3 φ étant un produit scalaire quelconque sur $\mathcal{V}$, on peut donc toujours trouver une base B' de $\mathcal{V}$ telle que, si (x,y) et (x',y') sont les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans B', alors

$\varphi(\vec{u},\vec{v})$ s'exprime par xx' + yy'.

Ce résultat mathématique légitime pleinement la définition qui a été donnée du produit scalaire au début de l'exposé.

Il n'y a aucune restriction. Ce n'est, en rien, un cas particulier.

En tous cas, ce n'est pas plus particulier que d'étudier d'abord l'équation de la parabole sous la forme $y^2 = x$, celle du cercle sous la forme $x^2 + y^2 = \alpha^2$, etc ...