Matériaux pour un dictionnaire

par J. M. CHEVALLIER

Orientés...

Depuis bientôt 45 ans — depuis mon entrée en Seconde pour être précis — j'entends dire qu'il faut "harmoniser" les enseignements de mathématique et de physique. Ce qui est surprenant dans ces conditions, ce n'est pas que je sois sceptique, c'est que mon scepticisme ne soit pas plus radical.

Il serait vain par ailleurs de dissimuler les prodromes d'une offensive "physicienne" vers le premier cycle ; elle peut avoir des motivations corporatives (cela existe), nous lui avons fourni aussi d'autres justifications en consentant assez joyeusement l'abandon graduel de l'exploration descriptive du monde physique. J'y ai fait allusion à plusieurs reprises dans le *Bulletin*, je n'y reviens pas et ne me mêle surtout pas de juger si c'est un bien ou un mal. Une chose est sûre : on n'a pas fini d'"harmoniser" ; mais si l'on commençait à l'intérieur même de notre discipline ?

Il fut une époque, qui semble presque archaïque bien que nous l'ayons connue, à peu près tous comme élèves et beaucoup comme professeurs (ce qui ne nous gonfle pas de fierté), où les problèmes d'orientation se traitaient au niveau de la première au moyen de bonshommes, empalés sur une flèche et vraisemblablement atteints d'affections hépatiques et cardiaques graves qui leur donnaient une conscience aiguë de leur droite et de leur gauche. Nous n'en sommes plus là, mais où en sommes-nous ? On espère que nos élèves se sont "familiarisés avec l'espace physique", chez nous ou ailleurs, mais, quand sonne l'heure de la mathématisation, que leur offrons-nous ? On nous a bien assurés que nous allions être affranchis du joug de la métrique ; or, bien que la notion d'orientation soit aussi peu métrique que possible (rappelez-vous les déformations continues qu'on infligeait jadis aux pauvres trièdres), l'espace qui n'a pas le bon goût d'être euclidien n'est visiblement pas digne, d'après les programmes actuels, d'être orienté. Le tabou qui frappe les déterminants d'ordre 3 est sans doute pour une bonne part dans l'affaire, car, faute de les avoir sous la main, on se sent assez maladroit pour aborder l'orientation de façon sérieuse ; cela n'est pas le seul argument qui milite en leur faveur, mais il suffirait à lui seul pour qu'on s'interroge sur la validité de ce tabou.

Pourtant il y aurait bien des choses à dire, et certaines fort instructives, sur ce chapitre de l'orientation, négligé au point qu'on finirait par regretter le bonhomme empalé. Et cela commence de très bonne heure.

Jadis on introduisait la droite orientée en 4ème, mais on venait aussi d'y rencontrer les "nombres relatifs" : somme toute, c'était cohérent. A présent on construit Z dès la sixième — enfin, soyons réalistes, on en dispose utilement en cinquième. Or, quel que soit le mode de construction employé, dès qu'on essaie de donner des "illustrations", on tombe à peu près inévitablement sur la droite graduée dans les deux sens ; pour en faire quoi ? rien.

En revanche on semble bien pressé d'admettre à tous les niveaux cette convention tacite qu'une demi-droite est (plus ou moins) orientée. J'entends bien qu'un demi-droite — notée par exemple [AB) — est susceptible d'une orientation "naturelle", celle "de A vers B", mais cela n'autorise pas à confondre la demi-droite ainsi orientée — notée par exemple $[AB)^+$ — avec l'ensemble précédent, ou de moins cela n'autorise pas à le faire en camouflant l'abus de langage. Car avec le même ensemble sous-jacent on peut tout aussi bien construire $[AB)^-$ en le munissant de l'orientation contraire. De même à partir de la droite (AB) on fabrique les axes $(AB)^+$ et $(BA)^+$, ce dernier pouvant en cas de besoin être noté $(AB)^-$.

Notons (ABC) le plan déterminé par trois points non alignés A, B, C ; on peut alors noter $(ABC)^+$ le plan orienté par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ou, ce qui est équivalent, par le couple d'axes $((AB)^+,(AC)^+)$, ou par le "point-bipoint" A(B, C) ou le "point-axe" $A(BC)^+$. Il n'est pas sans intérêt de reconnaître autrement que par de simples "constatations" que $(ABC)^+ = (BCA)^+ = (CAB)^+$, tandis que $(ACB)^+ = (ABC)^-$. Dans le même ordre d'idées, cela permet encore d'associer au demi-plan [(AB)C), défini par sa frontière (AB) et le point C, le "drapeau" à bord orienté $[(AB)^+C)$, également de même orientation que $(ABC)^+$.

Fort évidemment, dans l'espace le problème s'enrichit. A, B, C, D désignant quatre points non coplanaires, notons encore $(ABCD)^+$ l'espace orienté par le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ ou, ce qui est équivalent, par le trièdre $([AB)^+, [AC)^+, [AD)^+)$ ou par le "point-tripoint" A(B, C, D) ou encore par le "point-plan orienté" $A(BCD)^+$. La recherche des douze permutations "positives" du quadruplet (A, B, C, D) est d'autant plus intéressante pour qui en est encore au stade de la découverte des propriétés de l'espace que le cas semble extrêmement différent de celui du plan : en effet $(ABCD)^+ = (BCDA)^-$. De là résulte en particulier que le demi-espace à bord orienté $[(BCD)^+ A)$ est *d'orientation contraire* au "point-plan orienté" $A(BCD)^+$, alors que le drapeau $[(BC)^+ A)$ et le "point-axe" $A(BC)^+$ étaient de même orientation.

Enfin, toujours sur la même lancée, on arrive au dièdre orienté de même orientation que $(ABCD)^+$: $([(AB)^+ C), [(AB)^+ D))$ qu'on

pourrait d'ailleurs noter plus simplement $(C(AB)^+ D)$; et la voie est immédiatement ouverte vers les orientations "axe-axe" (ou "axe-bipoint", etc.) $(AB)^+ (CD)^+$, avec la propriété
$(AB)^+ (CD)^+ = (CD)^+ (AB)^+$ qui est loin d'être triviale.

Chemin faisant, on aura découvert la clé qui ouvre toutes ces serrures d'un coup, à savoir la parité du nombre de transpositions. Qu'on parte de l'intuition pour parvenir au mécanisme, ou qu'on utilise le mécanisme pour aiguillonner l'intuition, peu importe au fond : au niveau élémentaire il ne faut pas se priver de l'aller et retour suivant les circonstances et les esprits. Mais on ne "verra" plus l'espace de la même façon après cette étude, et le physicien, s'il le désire, pourra trouver à notre éventaire autre chose que ses bonshommes, tire-bouchons et monstres tridactyles.

...ou désorientés ?

Certains sujets inépuisables sont la providence du chroniqueur ; parmi eux le fameux "ordre strict" et l'antisymétrie détiennent le pompon. C'est ainsi qu'on peut lire (collection *aleph*) que l'ordre strict n'est *pas tout-à-fait antisymétrique* (ce qui suggère que notre logique n'est "pas tout-à-fait" bivalente). Quant à Bréard, il est parvenu à donner une *troisième* définition de l'antisymétrie : entre ceux qui la veulent indépendante de la réflexivité et ceux qui souhaitaient en réserver la jouissance aux relations déjà nanties de la réflexivité, voici maintenant une antisymétrie dont seules sont capables les relations *qui ne sont pas antiréflexives*. Si nous continuons ainsi, il faudra faire suivre chaque mot mathématique de l'indication "au sens de X" ou "d'après l'évangile selon Saint Y". Mais les élèves, on ne les "désoriente" pas un peu ?