5

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Rubrique des problèmes de l'A.P.M.E.P.

par G. LETAC

Il est créé, dans le Bulletin, une rubrique des problèmes. Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Gérard LETAC
Rubrique des problèmes
I.U.T. de Clermont
B.P. 29 — 63 - Aubière

ENONCES

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 15/5/1972.

Enoncé n° 15 : (Jacques LEGRAND, Faculté des Sciences de Bordeaux).
Soit $n = a^p + (a+1)^p$, où a est un entier positif et p un nombre premier impair. Montrer que si $n \neq 9$, n possède au moins un diviseur premier q tel que $q \equiv 1$ (mod. 2p). En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $2pk + 1$ (avec k entier).

Enoncé n° 16 : (Jean LAGRANGE, Faculté des Sciences de Reims).
En utilisant seulement le premier livre d'Euclide, montrez l'existence d'un triangle non isocèle ayant deux bissectrices extérieures égales.

Enoncé n° 17 : (Louis COMTET, Faculté des Sciences d'Orsay).
Soit Z(n) l'entier $1^n + 2^n + \ldots + n^n$. Si p est premier impair, montrer que $Z(p) \equiv 0 \bmod p^2$.

Enoncé n° 18 : (Gérard LETAC, I.U.T. de Clermont-Ferrand).
Si S est un ensemble d'entiers relatifs, on note S_k l'ensemble des entiers de la forme $s_1 + s_2 + \ldots + s_k$, avec $s_i \in S$ pour tout $i = 1,2,..,k$.
Montrer que S a au moins 2n éléments lorsque $0 \notin \bigcup_{1 \leqslant k < nq} S_k$ et $S \subset S_{q+1}$, q et n étant des entiers positifs.

SOLUTIONS

Enoncé n° 4 : (E. EHRHART, Ecole Militaire de Strasbourg).
Dans la revue de Mathématiques Spéciales, Mai 1966, n° 10, on étudie les sections planes d'un cube de surface maximale. Trouver ici les sections de périmètre maximal.

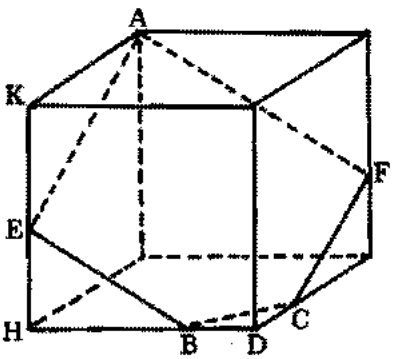
Solution : (Jean-Marie FAURE, Bruay-en-Arbois) (adaptée).

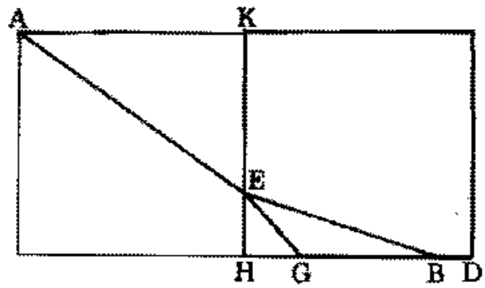
Soit 1 l'arête du cube. Montrons que la section de plus grand périmètre est celle passant par deux arêtes opposées. C'est le rectangle de périmètre $2(1 + \sqrt{2})$. Il y a quatre types de sections : triangles, hexagones, pentagones, quadrilatères.

a) *Triangle :* Un tel triangle a ses sommets sur trois arêtes concourantes en A ; son périmètre augmente quand ses sommets s'éloignent de A ; le périmètre maximum est donc $3\sqrt{2} < 2(1 + \sqrt{2})$.

b) *Hexagone :* On constate aisément que le périmètre de l'hexagone est invariant par translation du plan de section ; on peut donc ainsi se ramener au cas du :

c) *Pentagone* : Une telle section a quatre côtés parallèles deux à deux, et un cinquième côté isolé que je note BC. Si on fait une rotation autour de BC, l'angle du plan de section avec le plan de la face contenant BC augmentant, le périmètre de la section augmente. On se ramène au cas du pentagone passant par A, sommet du cube (Fig. 1)





On a : périmètre A E B C F $\leqslant$ A E + EB + BD + DC + CF + FA. Pour montrer que ce périmètre est $\leqslant 2(1+\sqrt{2})$, il suffit de vérifier que $AE + EB + BD \leqslant 1+\sqrt{2}$. L'angle $\widehat{HEB}$ est supérieur à 45°, sinon AF n'existe pas. Soit G le point de HD tel que HE = EG. Un simple calcul montre que AE + EG + GD atteint son maximum $1+\sqrt{2}$ si E est en H ou K, ce qui démontre l'inégalité annoncée (fig. 2)

d) *Quadrilatères* : Il y en a de deux types :

— Les sommets sont sur quatre arêtes parallèles. Le périmètre est invariant par translation et on se ramène au cas du quadrilatère ABCD passant par A, sommet du cube. Par rotation autour de AD, les segments CD et AD sont invariants : CD = AB est maximum quand C est le sommet du cube opposé à A.
Le périmètre est 2(AB + BC) où B décrit une arête du cube ne passant pas par A ou C. Un simple calcul montre que 2(AB + BC) atteint son maximum pour B aux sommets de l'arête.

— Les sommets sont sur quatre arêtes du cube deux à deux concourantes en E et F : le périmètre augmente quand le plan de section s'éloigne de EF et on se ramène au cas du quadrilatère ABCD passant par A, sommet du cube. Puis, par rotation autour de AB(B dans le plan AEF) le maximum de périmètre est obtenu quand D est sommet du cube. La position de ABCD ne dépend plus que d'un paramètre et on conclut, comme dans les cas précédents, par un calcul de maximum de fonction d'une variable.

Autre solution de l'auteur, basée sur un délicat théorème de Brunn : la variation des périmètres des sections planes parallèles d'un corps convexe comporte au plus 3 phases : croissance, constance, décroissance.

Enoncé n° 5 : (R. LAFRAMBOISE, Collège de Watawata, Québec).

Les n nombres $x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[-1, +1]$ sont tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Montrer que $|x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n|$ est inférieur ou égal à la partie entière de $n^2/4$.

Solution : (C. RODRIGUEZ, Faculté des Sciences St-Charles, Marseille).

Pour $q = 1, \ldots, n$, soit $S_q = \sum_{i=1}^{q} x_i$.

Pour $q = 2, \ldots, n$, on a $x_q = S_q - S_{q-1}$, d'où

$$S = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = S_1 + \sum_{q=2}^{n} q(S_q - S_{q-1})$$

$$= -(\sum_{i=1}^{n} S_i) = -(\sum_{i=1}^{n-1} S_i), \text{ puisque } S_n = 0.$$

Soit $p = E(\frac{n}{2})$. On peut écrire :

$$-S = \sum_{i=1}^{p} S_i + \sum_{i=p+1}^{n-1} S_i = [px_1 + (p-1)x_2 + \ldots + x_p]$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{n-1} S_i$$

Or, pour $i = 1, \ldots, n-1$: $S_i = -(x_{i+1} + \ldots + x_n)$ d'où

$|S_i| \leqslant n-i$, d'où

$|S| \leqslant [p + (p-1) + \ldots + 1] + [(n-p-1) + \ldots + 1]$

c'est-à-dire :

$|S| \leqslant \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = p^2 = E(\frac{1}{4}n^2)$ si $n = 2p$, et

$|S| \leqslant 2.\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1) = E(\frac{1}{4}n^2)$ si $n = 2p+1$.

Commentaire : (Georges VILHOSC, Nice).
Cette propriété est équivalente à un théorème de Ky Fan, O. Taussky et J. Todd, cité dans "Inequalities" de R. BELLMAN et E. BECKENBACH (Springer, third printing 1971) page 184.

Autres solutions de : M. BAUVAL (Lycée J. Ferry - Versailles) — J. GAYHEADER (Nantucket College) qui précisent les cas d'égalité — L. KIEFFER (Luxembourg) — B. OULERICH (C.P.R. Strasbourg) et l'auteur.

Enoncé n° *6 :* (E. EHRHART).
Soit $n = a^4 + b^4$, où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux.
1/ Montrer que n est égal à 1 ou à 2 modulo 16.
2/ Est-il exact qu'à l'éventuel facteur 2 près, tout diviseur premier de n est égal à 1, modulo 8 ?

Solution : (Pierre SAMUEL, Faculté des Sciences d'Orsay).
Soit $n = a^4 + b^4$ où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux.

1/ Modulo 16, les carrés sont congrus à 0, 1, 4 et 9, donc les puissances quatrièmes sont congrues à 0 ou 1. Comme a et b ne sont pas tous deux pairs, on en déduit que n est congru à 1 ou à 2 modulo 16.
2/ Soit p un diviseur premier impair de n, et soit G le groupe multiplicatif des éléments non nuls du corps Z/pZ. Comme a et b ne sont pas tous deux multiples de p, la congruence $a^4 + b^4 \equiv 0 \pmod{p}$ montre que -1 est la puissance quatrième d'un élément g de G. Donc, dans G on a $g^8 = 1$ mais $g^j \neq 1$ pour tout diviseur strict j de 8 (sinon $g^4 = 1 \neq -1$ car p est impair). Le sous-groupe de G engendré par g est donc d'ordre 8. Comme l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe, on voit que 8 divise card (G) = p — 1. Autrement dit, tout diviseur premier impair de n est congru à 1 modulo 8.

Autres solutions de : J.M. FAURE, J. LEGRAND, M. PRUDHOMME (Faculté des Sciences de Lille).

Enoncé n° *7 :* (R. LAFRAMBOISE).
Soit la fonction $f(x) = \mathrm{Log}(e^{x_1} + ... + e^{x_n})$ de R^n dans R. Si $k = (k_1, ..., k_n)$ et $h = (h_1, ..., h_n)$ dans R^n sont

fixés, avec $|h_i - h_j| \leq 1$ et $|h_i| \leq 1$ pour tous i et j, alors :

$$\max_{x \in R^n} |f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)| < 1$$

Solution : (G. VILHOSC et C. BROCA, Nice).

Convenant $h_0 = 0$, on définit pour $h = (h_1, ..., h_n)$ de R^n la norme $\|h\| = \max_{i,j=0,1,...n} |h_i - h_j|$.

Posant $g(x) = f(x+\alpha) - f(x-\alpha)$ où α est fixé dans R^n égal à $k/2$, il est clair que l'énoncé est une conséquence de l'affirmation :

Il existe une constante positive K inférieure à 1, ne dépendant que de α, telle que

$$|g(x+h) - g(x)| \leq K\|h\| .$$

Nous utilisons le lemme suivant, facile à démontrer :

Lemme : Si a et h sont dans R^n, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i h_i\right| \leq \|h\| \text{ si et seulement si}$$

$$\left|\sum_{i \in T} a_i\right| \leq 1 \quad \text{pour toute partie T de } \{1, 2, ..., n\}.$$

D'après la formule des accroissements finis, pour un $\theta \in (0, 1)$ on a :

$$g(x+h) - g(x) = \left[h_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial g}{\partial x_n}\right](x + \theta h)$$

Le lemme appliqué aux $a_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x + \theta h)$ entraîne :

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \|h\| \max_T \sup_x |F_T(x)| \text{ où}$$

$$F_T(x) = \sum_{i \in T} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \exp(-f(x+\alpha)) \times$$

$$\sum_{i \in T} \exp(x_i + \alpha_i) - \exp(-f(x-\alpha)) \sum_{i \in T} \exp(x_i - \alpha_i).$$

$F_T(x)$ est une fonction telle que $|F_T(x)| < 1$ car, si $T \neq \{1,...,n\}$,

$F_T(x)$ est différence de deux nombres de $[0,1)$, et si $T = \{1,...,n\}$,

$F_T(x)$ est nul. Il suffit de montrer que $K_T = \sup_x |F_T(x)| < 1$.

En effet, alors $K = \max_T K_T < 1$, car le maximum est pris sur un nombre fini de T. Posons :

$$A^+ = \sum_{i \in T} \exp(x_i + \alpha_i), \quad A^- = \sum_{i \in T} \exp(x_i - \alpha_i)$$

$$B^+ = \sum_{i \in \complement T} \exp(x_i + \alpha_i), \quad B^- = \sum_{i \in \complement T} \exp(x_i - \alpha_i)$$

($\complement T$ signifie : complémentaire de T dans $\{1,2,...,n\}$).

On constate immédiatement que :

$F_T(x) = (1 + \frac{B^+}{A^+})^{-1} - (1 + \frac{B^-}{A^-})^{-1}$ et que

$m \leqslant A^- / A^+ \leqslant 1/m$ et $m \leqslant B^- / B^+ \leqslant 1/m$, où $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \exp(-2|\alpha_i|)$.

C'est un simple calcul de vérifier alors que

$$|F_T(x)| \leqslant K = (1 - m) / (1 + m)$$

Autre solution de l'auteur.

Enoncé n° 10 : (J. LECOQ, Ecole Normale de Caen).

Une boîte cubique contient 27 cubes de fromage. Une souris grignote l'un des cubes, puis un second, à condition que ce second soit en contact avec le premier par l'une de ses faces, et ainsi de suite. (On supposera que, malgré les trous, les piles ne s'effrondreront pas). La souris peut-elle grignoter tous les cubes de fromage, en terminant par celui qui se trouve au centre de la boîte ?

Solution : (Bernard CORNU, Institut de Mathématiques pures, Grenoble).

Colorions les cubes de fromage en damier : le cube central en noir, chacun de ceux qui ont une face commune avec lui en blanc, etc... On obtient 13 cubes noirs et 14 cubes blancs. La souris devrait manger alternativement un cube de chaque couleur, en terminant par un cube noir : ceci est impossible puisqu'il y a plus de cubes blancs que de cubes noirs.

Autres solutions de : J. BARBOTTE (Montpellier) — Ch. BLANCHARD (Faculté des Sciences de Marseille) — J. BOUTILLON (I.P.E.S. Paris) — M. DECREUX (Besançon) — M. DRUCKER (Draveil) — M. GAGNAIRE — P. JACQUEMIER (I.D.E.N. Grenoble) — M. MANDON (C.E.S. Berre-l'Etang) — L. SEMAH (Spéciales A' Bordeaux) et l'auteur.