Sur le renforcement de l'inégalité de Bernoulli

par G. B. LINKOVSKI, Moscou

Soit $h > 0$ et un rationnel quelconque $r > 1$ qui satisfait à l'inégalité de Bernoulli (1) :

$$(1 + h)^r > 1 + r h \tag{1}$$

Cette inégalité peut être renforcée de la façon suivante :

Lemme

Pour $h \geqslant \dfrac{1}{[r] - 1}$, où $[r]$ est la partie entière du réel quelconque $r \geqslant 2$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(1 + h)^r > 1 + r h + h^{[r]} + \frac{\{r\} \quad h\,(h^{[r]} + 1)}{(1 + h)^{1 - \{r\}}}, \tag{2}$$

où $\{r\}$ est la partie fractionnaire de r.

Démonstration

Du binôme de Newton résulte :

$(1+h)^{[r]} \geqslant 1 + [r]\,h + h^{[r]}$, relation dans laquelle le signe d'égalité est valable si et seulement si $[r] = 2$.

Nous obtenons alors :

$$(1+h)^r > (1+h)^{[r]}(1+h)^{\{r\}} > (1+[r]\,h+h^{[r]})(1+h)^{\{r\}} \qquad (3)$$

D'après la formule des accroissements finis nous avons :

$$(1+h)^{\{r\}} = 1 + \{r\}(1+\theta)^{\{r\}-1}\,h \quad , \quad 0 < \theta < h \qquad (4)$$

d'où :

$$(1+h)^{\{r\}} > 1 + \frac{\{r\}\ h}{(1+h)^{1-\{r\}}} \qquad (5)$$

En conséquence [voir (3)] nous trouvons :

$$(1+h)^r > (1+[r]\,h+h^{[r]})\left(1+\frac{\{r\}\quad h}{(1+h)^{1-\{r\}}}\right)$$

$$= 1 + [r]\,h + \ldots + h^{[r]} + \frac{\{r\}\quad h}{(1+h)^{1-\{r\}}} + \frac{\{r\}\ \ [r]\,h^2}{(1+h)^{1-\{r\}}} + $$

$$+ \frac{\{r\}\,h^{[r]+1}}{(1+h)^{1-\{r\}}} \qquad (6)$$

Nous allons établir

$$\frac{\{r\}\ \ [r]\,h^2}{(1+h)^{1-\{r\}}} \geqslant \{r\}\ \ h \qquad \text{pour} \quad h \geqslant \frac{1}{[r]-1} \qquad (7)$$

soit $[r]\,h \geqslant (1+h)^{1-\{r\}}$ pour $h \geqslant \dfrac{1}{[r]-1}$ (8)

or nous savons que pour $h > 0$ et $0 < \beta \leqslant 1$

nous avons $(1+h)^{\beta} \leqslant 1 + \beta\,h$ (9)

En effet, d'après la formule des accroissements finis vue ci-dessus (4), il s'ensuit l'inégalité (9). Nous avons alors ($0 \leqslant \{r\} < 1$) :

$$(1+h)^{1-\{r\}} \leqslant 1 + (1-\{r\})\,h \qquad (10)$$

L'inégalité $1 + (1-\{r\})^h \leqslant [r]\,h$ (11)

résultera de l'inégalité plus forte : $1 + h \leqslant [r]\,h$, (12)

ou bien $([r]-1)\,h \geqslant 1$, c'est-à-dire $h \geqslant \dfrac{1}{[r]-1}$ (13)

Réciproquement : dans ce cas l'inégalité (11) est satisfaite à fortiori, et par conséquent l'inégalité (8) est aussi réalisée. En utilisant l'inégalité (7) établie, de l'inégalité (6), nous déduisons :

$$(1+h)^r > 1 + [r]\,h + h^{[r]} + \frac{\{r\}\ h}{(1+h)^{1-\{r\}}} + \{r\}\,h + \frac{\{r\}\ h^{[r]+1}}{(1+h)^{1-\{r\}}}$$

$$= 1 + r\,h + h^{[r]} + \frac{\{r\}\ h}{(1+h)^{1-\{r\}}} + \frac{\{r\}\ h^{[r]+1}}{(1+h)^{1-\{r\}}} \qquad (14)$$

De ceci résulte (2). Le lemme est démontré.

Nous remarquons que $\dfrac{1}{(1+h)^{1-\{r\}}} > \dfrac{1}{1+h}$,

puisqu'alors $(1+h) > (1+h)^{1-\{r\}}$ ou bien $(1+h)^{\{r\}} > 1$

A partir de (2), nous obtenons aussi :

$$(1+h)^r > 1 + r\,h + h^{[r]} + \frac{\{r\}\ h\,(h^{[r]}+1)}{h+1} \qquad (15)$$

Dans le quotient, si $r \geqslant 2$ est un entier, $r = [r] = k \geqslant 2$ et $\{r\} = 0$, et nous avons l'inégalité $(1+h)^k > 1 + k\,h + h^k$, qui résulte, comme il était indiqué, du binôme de Newton, mais est vraie pour tout $h > 0$.

Bibliographie

1. S.I. Novoselov. Cours spécial d'algèbre élémentaire, Moscou, 1953, page 212.