Une généralisation du problème des rencontres

par E. EHRHART, Strasbourg

Dans mon article "Sur les permutations strictes et les coïncidences" (il sera désigné par (A) dans la suite) paru en 1970 dans le Bulletin 273, il était question du problème classique des rencontres. La présente généralisation conduit à un résultat inattendu.

Soit d'une part n personnes matriculées de 1 à n et d'autre part n billets numérotés de 1 à n. Chaque personne tire au hasard un billet. Examinons la probabilité pour qu'il n'y ait aucune coïncidence entre le matricule d'une personne et le numéro du billet qu'elle tire dans les trois cas suivants :

1) Chaque billet tiré est remis de suite, de sorte que tout tirage porte sur l'ensemble plein.

On a vu dans (A) que la probabilité cherchée est alors

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

2) Aucun billet n'est remis, de sorte qu'après les n tirages il ne reste pas de billet disponible. (C'est le problème classique des rencontres). En ce cas la probabilité, calculée dans (A), est

$$p'_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

3) Chaque billet tiré est, au hasard, remis ou non.

Plus explicitement, on suppose dans ce dernier cas que les n personnes tirent leur billet dans un certain ordre, celui de leurs matricules par exemple, chacune au hasard, remettant son billet en jeu ou non avant le tirage fait par la personne suivante. Le sous-ensemble des personnes qui remettent ainsi leur billet peut être choisi de $\alpha = 2^n$ manières, ce qui conduit à α problèmes de rencontres, dont les probabilités pour qu'il ne se produise aucune coïncidence sont $p_{n,0}$, $p_{n,1}$, ..., $p_{n,\alpha-1}$.

(En particulier, $p_{n,0} = p'_n$ et $p_{n,\alpha-1} = p_n$).

Nous allons démontrer le résultat remarquable suivant :

Théorème

Quel que soit le nombre de personnes (pourvu toutefois qu'il y en ait plus de 23) *et quel que soit le libre choix de chacune d'elles de remettre ou non son billet en jeu, la probabilité, au centième près, pour qu'il n'y ait pas de coïncidence est de 37 %.*

(N'est-ce pas une belle occasion de méditer sur les relations entre la liberté, le hasard et le nécessité ?)

Grosso modo on peut donc parier à 2 contre 1, qu'il se produira au moins une coïncidence.

Dans (A) on a vu que si n tend vers l'infini, p_n et p'_n tendent vers $\frac{1}{e} \simeq 0,367\,88$, le premier en croissant, le second en oscillant (alternativement croissant et décroissant et l'écart entre deux p'_n consécutifs diminuant constamment). D'autre part,

$$p_{24} \simeq 0,360\,3\ , \quad p'_6 \simeq 0,368\,0 \quad \text{et } p'_7 \simeq 0,367\,8$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que chaque remise en jeu de billet diminue ou laisse constante la probabilité pour qu'il n'y ait pas de coïncidence, car cela entraîne

$$p_{24} < p_n \leqslant p_{n,i} \leqslant p'_n < p'_7$$

pour tout i, quand $n > 23$.

L'ordre des tirages étant toujours celui des matricules croissants, supposons que les tirages par les k premières personnes n'ont pas donné de coïncidence et que N des k −1 premières personnes n'ont pas remis leur billet. Si parmi les N billets ainsi sortis du jeu figure le numéro k+1, la probabilité que le (k+1)-ième tirage donne une coïncidence est nulle, que la k-ième soit resté en jeu après les k−1 premiers tirages, et calculons les probabilités Q, Q' pour que le (k+1)-ième tirage donne une coïncidence dans les deux cas possibles suivants :

1°) *la k ième personne remet son billet :*

$$Q = \frac{1}{n - N}$$

2°) *la k ième personne ne remet pas son billet*

Pour qu'il y ai coïncidence au (k+1)-ième tirage, il faut d'abord que le numéro k + 1 ne soit pas sorti au k-ième tirage ; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$P_1 = 1 - \frac{1}{n - N - 1}$$

car ce tirage ne porte ni sur les N billets sortis, ni sur le billet numéro k (puisqu'on a supposé que ce tirage ne donne pas de coïncidence). Il faut ensuite que le tirage suivant donne le numéro k+1 ; la probabilité de cet événement est

$$P_2 = \frac{1}{n - N - 1}$$

Donc

$$Q' = P_1 P_2 = \frac{n - N - 2}{(n-N-1)^2}$$

et $Q' < Q$, car en posant $n - N - 1 = a$, cette inégalité s'écrit

$$\frac{a-1}{a^2} < \frac{1}{a+1}$$

Par suite les probabilités q et q' pour qu'il n'y ait pas de coïncidence dans les cas 1) et 2) au (k+1)-ième tirage vérifient bien $q < q'$, puisqu'elles sont complémentaires de Q et Q'.