Enveloppes de droites

M. BERGER

0. *Introduction.*

Le but de cet article est de suggérer un plan pour une leçon sur l'enveloppe d'une famille de droites. Ceci en sorte que, d'abord le problème apparaisse naturel, ensuite que ce problème ait une solution et une seule, enfin que le traitement théorique ait lieu sans coordonnées.

Ceci conduit, comme l'article le montre, à se placer d'abord, non dans un plan affine mais dans un plan projectif, ensuite à ne considérer que des courbes localement convexes (c'est-à-dire dont la dérivée seconde est linéairement indépendante de la vitesse). Que la théorie marché bien dans ce cadre — plan projectif et courbes birégulières — n'est pas un résultat nouveau ; c'est une petite partie du théorème 4 de [2]. La lecture de [2] est conseillée pour des résultats globaux sur les enveloppes de droites et une théorie des enveloppes pour des sous-variétés de dimension quelconque.

1. *Courbes d'un projectif réel.*

On désignera par E un espace vectoriel réel de dimension finie et P(E) l'espace projectif associé ; p : E ⟶ P(E) sera la projection canonique (voir par exemple : [1], chapitre 2).

(1.1) *On appelle courbe* a , *de classe* C^K (k

(1.1) *On appelle courbe* a , *de classe* C^k $(k \geqslant 0)$ *de* P(E), *la donnée d'un intervalle* I *de* $\mathbf{R}$ *et d'une explication* $a : I \longrightarrow P(E)$ *telle qu'il existe une application* $A : I \longrightarrow E - \{O\}$ *de classe* C^k *et telle que* $p \circ A = a$. *On dit que* A *est une représentation de* a.

(1.2) Toute autre représentation B de a , de classe C^k, est de la forme $B = f.A$, où $f : I \longrightarrow \mathbf{R}^*$ est de classe C^k ; pour le voir, on peut par exemple prendre une base quelconque de E ; si $A(t) = (A_1(t),\dots, A_n(t))$, $B(t) = (B_1(t),\dots,B_n(t))$, en t_0 donné $\in I$ il existe i tel que $A_i(t_0) \neq O$, on a donc

$$f(t) = \frac{B_i(t)}{A_i(t)}$$

qui est de classe C^k au voisinage de t_0 parce que A_i et B_i le sont et que $A_i(t)$ n'est pas nul au voisinage de t_0.

(1.3) Si l'on sait que P(E) a une structure canonique de variété C^∞, la définition (1.1) est équivalente à dire que a est une application C^k de I dans P(E).

Si A, B = f.A sont deux représentations de a, alors :

$k \geqslant 1 : B' = f.A' + f'.A$,

$k \geqslant 2 : B'' = f.A'' + 2\, f'.A' + f''.A$.

Il en résulte que si A(t) et A'(t) sont linéairement indépendants, il en est de même de B(t) et B'(t) ; de même pour A(t), A'(t), A''(t) et B(t), B'(t), B''(t) ; en outre le sous-espace vectoriel de E engendré par A(t) et A'(t) est le même que celui engendré par B(t) et B'(t), de même pour A(t), A'(t), A''(t) et B(t), B'(t), B''(t). Ceci justifie les définitions suivantes :

(1.4) *La courbe* a *de* P(E), *de classe* C^k, *est dite :*

$k \geqslant 1$: régulière *au point* t *s'il existe une représentation* A *de* a *telle que* A(t) et A'(t) *soient linéairement indépendants*, régulière *si elle est régulière en tous ses points* ;

$k \geqslant 2$: birégulière *au point* t *s'il existe une représentation* A *de* a *telle que* A(t), A'(t), A''(t) *soient linéairement indépendants*, birégulière *si elle est* birégulière *en chacun de ses points.*

(1.5) La tangente à a, *de classe* C^k, $k \geqslant 1$, *en un point régulier* t, *est la droite projective de* P(E), *image par* p *du sous-espace vectoriel engendré par* A(t) *et* A'(t), *où* A *est une représentation de* a.

On peut de même définir le plan osculateur à a en t, si $k \geqslant 2$ et si a est birégulière en t.

2. *Cas d'un plan projectif ; calcul et dualité.*

Dorénavant *dim* E = 3, i.e. *dim* P(E) = 2.

On sait alors ([1], chapitre 2, IV) que l'ensemble des droites projectives de P(E) s'identifie canoniquement au projectif P(E*) de l'espace vectoriel E* dual de E ; on fera désormais cette identification.

Pour faire les calculs, le plus plaisant est de munir E d'une structure euclidienne orientée, de produit scalaire noté $\bullet$; ceci fournit une identification entre E et E*, que l'on fera lorsque l'on calculera ci-dessous avec des vecteurs ou des coordonnées. Si par exemple $m \in P(E)$, avec $m = p(\overline{m})$, $\overline{m} \in E$ et $d \in P(E^*) \cong P(E)$ avec $d = p(\overline{d})$, $\overline{d} \in E^* \cong E$, alors dire que le point m appartient à la droite projective d s'écrit $\overline{d}.\overline{m} = 0$; pour des coordonnées orthonormées, si $\overline{m} = (x,y,z)$, $\overline{d} = (u,v,w)$, on trouve $ux + vy + wz = 0$.

De plus on a sur E ou E* le produit vectoriel $\wedge$ et le produit mixte (.,.,.) ; par exemple a sera régulière en t si $A(t) \wedge A'(t) \neq 0$, et birégulière si $(A(t), A'(t), A''(t)) \neq 0$. Rappelons les formules : $(u \wedge v) \wedge (u \wedge w) = (u,v,w).u$ et $(u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w) = (u,v,w)^2$, qui se déduisent de la formule classique du double produit vectoriel.

3. *Calcul de la tangente et applications.*

Soit $a : I \longrightarrow P(E)$ une courbe régulière de $P(E)$, notons $T_t a$ sa tangente en t ; l'application $Ta : I \longrightarrow P(E^*)$, définie par $(Ta)(t) = T_t a$, est-elle une courbe de $P(E^*)$? Pour le voir, il suffit de calculer comme dans le 2 ; soit A une représentation de a ($k \geqslant 1$), et soit $x \in E \cong E^*$ tel que $p(x) = T_t a$. Ceci est équivalent à $x.A(t) = 0$ et $x.A'(t) = 0$, d'où la solution $x = A(t) \wedge A'(t)$. Ce qui démontre le :

(3.1) *Soit* a *une courbe* C^k *régulière* ($k \geqslant 1$) *de* $P(E)$; *alors* Ta *est une courbe* C^{k-1} *de* $P(E^*)$. *En outre, si* A *est une représentation de* a, *une représentation de* Ta *est* $A \wedge A'$.

Par exemple, en coordonnées orthonormées, si A :

$$t \longmapsto (x(t), y(t), 1),$$

alors $A' : t \longmapsto (x'(t), y'(t), 0)$ d'où $A \wedge A' = (-y', x', -x'y)$, ce qui donne bien l'équation affine de la tangente :

$$-y'X + x'Y + xy' - x'y = 0.$$

Il est naturel de rechercher si, lorsque $k \geqslant 2$, Ta est régulière, c'est-à-dire si $(A \wedge A') \wedge (A \wedge A')' \neq 0$, soit encore

$(A \wedge A') \wedge (A \wedge A'') = (A, A', A'').A \neq 0$; d'où le théorème :

(3.2) *Soit* $k \geqslant 2$ *et* a *une courbe de* $P(E)$ *de classe* C^k ; *alors* Ta *régulière est équivalent à* a *birégulière.*

Si a est C^k, $k \geqslant 2$, et birégulière on en déduit d'abord Ta, courbe C^{k-1}, $k \geqslant 1$, de $P(E^*)$, puis ensuite $T(Ta)$, courbe C^{k-2} de $P(E^{**})$; comme $E = E^{**}$ est un isomorphisme canonique (contrairement aux isomorphismes entre E et E^* que l'on obtient par des structures euclidiennes), dans toute la suite on considérera TTa comme une courbe de $P(E)$. Le calcul fait juste avant (3.2) montre en fait que :

(3.3) *Si* $k \geqslant 2$ *et si* a *est une courbe* C^k *de* $P(E)$, *alors* $TTa = a$. Remarquer qu'ainsi TTa est en fait de classe C^k, et non pas seulement de classe C^{k-2} comme on pourrait s'y attendre.

(3.4) *Si* $k \geqslant 3$ *et si* a *est birégulière, alors* Ta *est aussi birégulière.*

En effet, on applique (3.2) à la courbe $c = Ta$ et on utilise (3.3). Cependant, on peut avoir envie de vérifier directement ce fait, qui résulte de $(C \wedge C')'' = C \wedge C''' + C' \wedge C''$, puis

$(C \wedge C',\ C \wedge C'',\ C \wedge C''' + C' \wedge C'')$
$= (C \wedge C',\ C \wedge C'',\ C' \wedge C'') = (C, C', C'')^2$.

(3.5) T *établit une dualité entre les courbes* C^∞ *birégulières de* $P(E)$ *et celles de* $P(E^*)$.

Exemple : les coniques non dégénérées.

4. *Le problême des enveloppes.*

Revenons au début de (3.1) ; une question naturelle est de rechercher réciproquement si, une courbe b de P(E*) étant donnée, il existe une courbe régulière a de P(E) telle que Ta = b.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & P(E) \\ I \arrow[ur, dashed, "a"] \arrow[dr, "Ta=b"'] & \\ & P(E^*) \end{tikzcd}$$

La réponse est donnée par le théorème :

4.1) *Soit* $b : I \to P(E^*)$ *une courbe* C^k*, avec* $k \geqslant 2$ *et birégulière. Alors il existe une courbe unique* a *de* P(E), *régulière et* C^{k-1}*, telle que* Ta = b, *et c'est* a = Tb.

Sauf l'unicité, ces affirmations résultent directement de (3.2) et (3.3) appliqués à la courbe b de P(E*). L'unicité (et aussi l'existence d'une deuxième manière) se voit par la méthode classique. Soient B une représentation de b et A une représentation inconnue de a ; on veut que $A.B = 0$ et $A'.B = 0$, d'où par dérivation, $A'.B + A.B' = 0$, soit $A.B = 0$ et $A.B' = 0$, d'où $A = f.(B \wedge B')$, $f : I \to \mathbb{R}^*$. Dans (3.4) comme dans (4.1), il semble que les hypothèses de différentiabilité soient trop fortes ; on pourrait croire par exemple que dans (4.1) la classe C^1, voire C^0, ou C^2 sans birégularité soit suffisante. C'est ce que laisse croire la dualité classique entre inflexion et rebroussement :
$B : t \mapsto (t, t^3, 1)$ et $A : t \mapsto (-3t^2, 1, 2t^3)$ où a = Tb ; ici b est C^∞, mais non birégulière en t = 0, cependant la courbe a, quoique non régulière, admet une tangente au sens géométrique, tangente qui est bien b(0). Or, même dans le cas C^∞, ce phénomène n'est pas général, voici pourquoi.

Une courbe régulière b de P(E*) pourra s'écrire, avec un choix convenable des coordonnées : $B : t \mapsto (t, f(t), 1)$, où f est une fonction numérique C^∞ ; on trouve $A = B \wedge B' = (-f', 1, f - tf')$. La courbe p o A n'a aucune raison d'admettre une tangente géométrique en t = 0, et qui soit en outre b(0). Car ceci est équivalent, si $f(0) = f'(0) = 0$, à :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f - tf'}{-f'} = 0$$

ce qui est faux en général ; par exemple si f est définie par :
$f(t) = e^{-1/t}.\sin(1/t)$ pour $t > 0$, $f(t) = e^{1/t}.\sin(1/t)$ pour $t < 0$ et $f(0) = 0$; alors déjà $f'(t) = 0$ et $f(t) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de t au voisinage de 0.

Ainsi une théorie des enveloppes avec singularités ne peut pas se faire dans la cadre C^∞ ; il n'en est pas de même dans le cas analytique réel, ou le cas algébrique, ou le cas C^∞ générique (ce qui est le cadre de [2]).

Bibliographie

1 P. MARTIN, Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie, Collection U, A. Colin.

2 R. THOM, Sur la théorie des enveloppes (Journal de mathématiques pures et appliquées, XLI, 1962, pp.177-192).