

DANS NOS CLASSES

La notion de continuité dans l'enseignement du second degré

par A. REVUZ, Directeur de l'I.R.E.M. de Paris

Compte rendu d'une expérience

I CONDITIONS DE L'EXPERIENCE

A la suite de réflexions de collègues sur les difficultés que présentait pour les élèves la compréhension de la notion de continuité, j'ai voulu aller me rendre compte sur place de la nature et de l'importance de ces difficultés. Grâce à l'obligeance de collègues et de leurs chefs d'établissement, je me suis rendu avec Melle J. Pichaud, assistante à l'I.R.E.M. de Paris, dans six classes du second cycle d'établissements de l'Académie de Paris (4 premières C, 1 première D, 1 terminale D). Dans chaque classe, nous avons travaillé 6 heures, à raison de 2 séances consécutives de 1 heure par semaine. Des révisions, des exercices, l'introduction de certaines notions auxiliaires ont été faites pendant la semaine séparant deux interventions sous la direction du professeur de la classe quand celle-ci en avait un, car deux des classes avec qui nous avons travaillé en étaient dépourvues temporairement au moment où nous les avons prises en charge.

II VERIFICATION DES CONNAISSANCES PREALABLES DES ELEVES

Avant d'aborder l'étude de la continuité elle-même, nous avons pris la précaution de vérifier les connaissances des élèves sur les propriétés de \mathbb{R} et la notion de fonction.

Les réactions furent pratiquement les mêmes dans les six classes et ont révélé :

- a) une très bonne connaissance des propriétés de corps de \mathbb{R} ;
- b) une assez bonne connaissance des propriétés de corps totalement ordonné de \mathbb{R} , avec la réserve qui suit ;
- c) une ignorance quasi-totale de ce qu'est la valeur absolue sur \mathbb{R} , une ignorance totale du fait que l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^+ définie par :

$(x, y) \mapsto |x - y|$ est une distance (c'est-à-dire en a les propriétés ; qu'on l'appelle distance au non, au début, n'a aucune importance).

A la question : "qu'est-ce que la valeur absolue d'un nombre réel ?" les réponses ont été, en majorité, le silence ou : "c'est ce qui reste quand on enlève le signe". J'ai recueilli une fois la réponse, correcte mais maladroite : "c'est x quand x est positif, et $-x$ quand x est négatif", mais jamais la réponse : "c'est le plus grand des deux nombres x et $-x$."

Cette ignorance nous a surpris, ainsi que les professeurs des classes concernées. La première fois, j'ai cru que la classe était un cas exceptionnel. Le phénomène s'étant reproduit dans toutes les classes, il est difficile de penser que nous n'avons rencontré que des cas exceptionnels. A posteriori, il est assez facilement explicable : les manuels d'algèbre du début du siècle ignoraient, eux aussi, la valeur absolue. Quand elle fut introduite dans l'enseignement du second degré, sa très grande importance ne fut pas tout de suite perçue, et la présentation qui en fut faite fut souvent très maladroite. C'est aux séquelles de cette situation que nous nous heurtons encore.

- d) une idée intuitive de la proposition des segments emboîtés dont la vérité pour eux ne fait pas de doute, mais dont le statut (axiome ou théorème) n'est pas clair, sans que les élèves en soient troublés. (Un seul et excellent élève a soulevé la question en disant ultérieurement à son professeur : "Il, (c'était moi), ne l'a pas démontré".

Devant cette situation, la seule politique possible était de reprendre la question à son début, et ce début, c'est la structure de corps ordonné de \mathbb{R} . On insista sur le fait que la compatibilité de la structure d'ordre et de la structure de corps est exprimée par les deux propositions :

$(O,)$. Pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

qui est équivalente à :

$$a < b \implies a + c < b + c$$

(O₂). Tout couple de réels positifs a un produit positif.

Toutes les propriétés relatives aux "inégalités" découlent de la structure de corps ordonné de \mathbb{R} ainsi exprimée. Ceci fait (et ce fut dans toutes les classes une révision et une consolidation et non une acquisition entièrement nouvelle), nous reprîmes la définition de la valeur absolue sous les deux formes équivalentes :

(V₁). $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

(V₂). $|x|$ est celui des nombres x et $-x$ qui est positif.

De cette définition se déduisent les propriétés suivantes de l'application $x \longmapsto |x|$:

1°) $|x| = 0$ est équivalent à $x = 0$. Evident.

2°) La démonstration de l'inégalité (ignorée de la quasi-totalité des élèves)

$|x + y| \leq |x| + |y|$ demande un peu plus de réflexion. Elle résulte cependant immédiatement de (V₁) et (O₁). En effet $|x + y|$ est le plus grand des deux nombres $x + y$ et $-x - y$; quant à $|x| + |y|$, c'est la somme du plus grand des deux nombres x et $-x$ et du plus grand des deux nombres y et $-y$. $|x| + |y|$ est donc le plus grand des quatre nombres $x + y$, $x - y$, $x + y$, $-x - y$, tandis que $|x + y|$ est le plus grand de deux d'entre eux, ce qui entraîne l'inégalité. Un bon exercice qui prolonge cette démonstration est de montrer que l'égalité $|x + y| = |x| + |y|$ est vraie si et seulement si x et y sont de même signe. (L'égalité est en effet équivalente à " $|x| + |y| = x + y$ ou $|x| + |y| = -x - y$ "; or, en vertu de ce que l'on a vu sur la valeur de $|x| + |y|$, on vérifie aisément que le cas $|x| + |y| = x + y$ est réalisé si et seulement si $|x| = x$ et $|y| = y$, c'est-à-dire si x et y sont positifs et le cas $|x| + |y| = -x - y$ si et seulement si $|x| = -x$ et $|y| = -y$, c'est-à-dire si x et y sont négatifs).

3°) la propriété $|xy| = |x| \cdot |y|$ se démontre très aisément, à partir de (V₂) par exemple : $|x|$ est celui des nombres x et $-x$ qui est positif, $|y|$ est celui des nombres y et $-y$ qui est positif, $|x| \cdot |y|$ est donc un des nombres xy , $x(-y)$, $(-x)y$, $(-x)(-y)$, c'est-à-dire un des nombres xy et $-xy$ et il est positif, c'est donc $|xy|$.

Ayant défini la valeur absolue et ayant établi ses propriétés, c'est à la fois un excellent exercice d'application de ce qui précède et l'introduction d'une notion d'importance capitale que d'étudier les propriétés de l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^+ définie par $(x, y) \longmapsto |x - y|$.

Des propriétés de la valeur absolue se déduit immédiatement l'équivalence $x = y \Leftrightarrow |x - y| = 0$, que pour tout couple (x, y) on ait $|x - y| = |y - x|$ et que pour tout triplet (x, y, z) on ait $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

L'intérêt des élèves est net lorsqu'on leur fait remarquer que les trois propriétés précédentes sont possédées par la distance usuelle définie dans le plan, et que $|x - y|$ est, très concrètement, la distance des points d'abscisses x et y sur une droite graduée, et qu'il est raisonnable d'appeler distance sur un ensemble quelconque E toute application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ qui possède ces trois propriétés.

Est-ce le moment de définir dans sa généralité la notion de boule ouverte de centre a et de rayon r ? Je l'ai fait dans certaines classes et pas dans d'autres, sans constater de différences significatives dans le comportement ultérieur des élèves. Ce qui est, en tout cas, indispensable, c'est de poser la question, à laquelle aucun élève n'a su répondre immédiatement : comment est fait l'ensemble des points d'une droite situés à une distance inférieure à r d'un point donné a ? Autrement dit, que peut-on dire de l'ensemble

$\{x \mid |x - a| < r\}$ où $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$ sont donnés? La définition (V_1) donne la réponse, si l'on fait la remarque très simple, mais très utile, que pour que le plus grand de deux nombres soit inférieur à un troisième, il faut et il suffit que chacun d'eux le soit. Par suite :

$|x - a| < r$ est, pour tout x , équivalent à " $x - a < r$ et $a - x < r$ " c'est-à-dire à " $x < a + r$ et $x > a - r$ ", que l'on écrit habituellement $a - r < x < a + r$.

Autrement dit, sur la droite, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'intervalle $]a - r, a + r[$ c'est-à-dire un ensemble décrit en termes d'ordre.

L'égalité $\{x \mid |x - a| < r\} = \{x \mid a - r < x < a + r\}$ qui n'est nullement évidente a priori pour les élèves, signifie qu'un intervalle ouvert de la droite peut être décrit indifféremment en utilisant le langage de la distance ou le langage de l'ordre, ce qui n'a rien de très surprenant étant donné que la distance définie comme valeur absolue de la différence fait intervenir la structure de groupe ordonné de \mathbb{R} . Que l'on ne croie pas que ce genre de considérations passe au-dessus de la tête des élèves, ou leur paraisse oiseux. Dans une classe, où nous travaillions en fin d'après-midi, et qui de ce fait était fatiguée et ne prêtait pas toujours l'attention que l'on aurait souhaitée, il s'est produit une brusque remontée de l'attention au moment où j'ai développé ces considérations. Le rapprochement fut fait évidemment avec le fait que la donnée d'un résultat approché peut être exprimé indifféremment par un encadrement ou par une valeur et une majoration de la valeur absolue de l'erreur.

Pour quelqu'un qui cherchait des causes de l'incompréhension de la notion de continuité, l'ignorance généralisée de ce qui précède fut l'objet d'une découverte inattendue, mais précieuse, car elle suffisait à

elle seule à expliquer cette incompréhension. Il se révéla par la suite que si elle n'en était pas la seule cause, elle en demeurait peut-être la plus importante.

III MOTIVATION ET FORMULATION DE LA DEFINITION DE LA CONTINUITE.

1. Motivation.

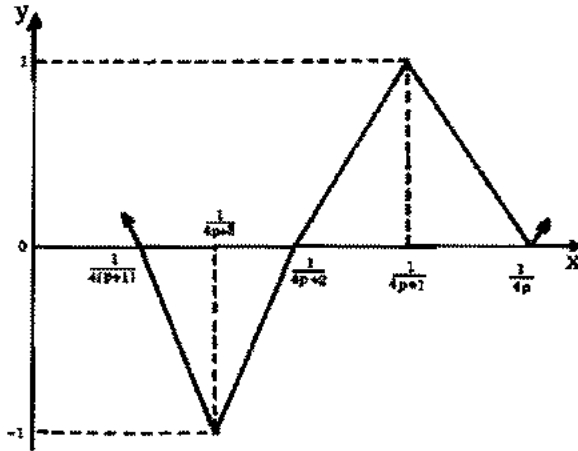
Motiver la définition de la continuité d'une application d'un intervalle de \mathbf{R} dans \mathbf{R} se heurte à deux difficultés :

— les élèves ne sont familiers qu'avec des fonctions continues. Ils savent très bien dire ce qu'est en général une application, mais lorsqu'on leur demande des exemples d'applications d'un intervalle de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , ils ne citent guère que des polynômes ou des fonctions homographiques.

— le mot "continu" dans la langue courante évoque des situations dont la description mathématique fait toujours intervenir la notion de connexité et plus rarement celle d'application continue, et le langage mathématique élémentaire est lui-même souvent contaminé par l'usage vulgaire : les élèves citent comme exemple de fonction discontinue $x \mapsto \frac{1}{x}$; or celle-ci est une application de $\mathbf{R}_* \text{ dans } \mathbf{R}_*$ qui est continue en tout point, tandis que son graphe est en effet une partie non connexe de $\mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_*$, et aussi une partie non connexe de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Pour motiver valablement la notion, il faut donc faire sentir d'abord la richesse de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, insister sur le fait que ce qui est exigé d'une application $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, c'est d'attribuer à tout réel x un réel $f(x)$, et rien de plus ; le choix de $f(x)$ pour un x donné ne donne aucun renseignement sur le choix de $f(y)$ pour $y \neq x$. Des exemples éveilleront l'intuition. Beaucoup d'entre eux n'étaient pas extrêmement nouveaux pour les élèves, mais, plus ou moins consciemment, ils les mettaient de côté comme ne correspondant pas à de "vraies" fonctions : $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(x^2)$, $x \mapsto x - E(x)$, ..., les fonctions en escalier, les fonctions caractéristiques de l'ensemble des décimaux, de l'ensemble des rationnels, ... Les très classiques applications définies par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = a$ où a est un réel que l'on peut choisir arbitrairement donnent des exemples très importants de fonctions discontinues. Si des élèves ne sont pas encore assez familiers avec les fonctions circulaires, on peut remplacer ces fonctions par des fonctions affines par morceaux qui ont le même comportement au voisinage de 0, et telles que, par exemple, $f(0) = a$,

$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et telle que pour tout x , $f(-x) = f(x)$:



La richesse de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la singularité du comportement de certains de ses éléments amène naturellement à penser qu'il y a lieu de s'intéresser à certaines de ses parties dont les éléments aient un comportement plus "régulier". Cette régularité peut être conçue de bien des manières différentes, et ce serait une erreur de laisser croire que la régularité cherchée ne peut être que la continuité (continuité en un point, continuité uniforme, condition de LIPSCHITZ, différentiabilité, analyticité... sont d'autres régularités très importantes).

Un objectif que l'on peut se proposer pour chercher à cerner une de ces régularités souhaitables, c'est de définir des fonctions qui puissent être utilisées pour représenter le lien entre les nombres réels par lesquels sont exprimées les mesures de deux "grandeurs", ou pour être plus modeste et plus prudent, d'écarter celles qui sont manifestement inutilisables à cet effet. La physique macroscopique ne connaît aucune mesure exacte, mais peut seulement indiquer un intervalle où se trouve la valeur de la mesure, intervalle dont elle s'efforce, par l'amélioration de sa technique, de diminuer l'amplitude, sachant qu'elle ne l'annulera jamais, et sachant en outre qu'à une "petite" amplitude de variation de l'une des mesures correspond une "petite" amplitude de variation de l'autre.

Il convient ici d'être très circonspect, car nous sommes exactement au passage d'une situation "concrète", bien que déjà très travaillée (le lien entre les mesures effectuées par un expérimentateur), à un modèle qui est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La situation et le modèle n'ont pas les mêmes propriétés : un exemple frappant est fourni par le mot

“petit”. Parler d'une petite variation ou d'une variation négligeable a un sens dans des conditions expérimentales données, cela n'en a aucun dans le modèle.

Le fait d'utiliser une application de \mathbb{R} (ou d'un intervalle de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} comme modèle n'est lui-même le fruit d'aucune nécessité.

Il serait parfaitement possible de représenter tous les résultats expérimentaux, à un stade donné de précision, par des nombres entiers. Ce système aurait le double inconvénient de devoir être remis en question lors d'une amélioration de la précision des expériences et d'être très mal commode (\mathbb{R} est un corps et \mathbb{Z} ne l'est pas, sans parler des très agréables propriétés topologiques de \mathbb{R}). La justification de l'utilisation de \mathbb{R} est ici sa commodité intrinsèque et le fait que les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} permettront de rendre compte de toutes les expériences de la physique macroscopique, quel que soit leur degré de précision.

Le physicien va donc utiliser des fonctions de \mathbb{R} (ou d'un intervalle de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} pour représenter le lien entre les mesures de deux grandeurs. Si l'une vaut x_0 , la fonction va donner la valeur $f(x_0)$ pour l'autre. Malheureusement on ne peut jamais garantir que la mesure vaudra exactement x_0 . On peut au plus garantir qu'elle appartient à un intervalle $|x_0 - \alpha, x_0 + \alpha|$, α étant l'indication de la précision. Dans ces conditions, f donnera-t-elle des renseignements exploitables? La question est encore assez vague, et peut être précisée de plusieurs manières différentes, et recevoir des réponses différentes.

On peut poser la question de la manière suivante : si la précision sur la donnée de x est α , peut-on savoir avec quelle précision f donnera $f(x)$? Une réponse est possible, si f est lipschitzienne c'est-à-dire s'il existe un nombre k positif tel que $\forall (x, y) \in U \times U$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

Dans ce cas, $f(x)$ est connu avec la précision $k\alpha$.

Bien que toutes les fonctions usuelles soient lipschitziennes dans leur domaine “pratique” d'utilisation, il y a d'autres manières de poser la question. En particulier, la suivante : peut-on espérer obtenir de $f(x_0)$ des valeurs aussi approchées que l'on veut, à condition d'avoir approché x_0 d'assez près?

Mais là encore, rien n'est définitivement joué et on se trouve devant une bifurcation :

- ou bien, on feint de s'intéresser spécialement à une valeur x_0 , et on est amené à la définition de la continuité en un point, et ultérieurement à celle de la continuité en tout point.
- ou bien, on pense que la précision avec laquelle est mesurée une valeur donnée ne lui est pas propre, mais est valable pour toutes celles

du domaine dans lequel on travaille, et on pose la question sous la forme : "x et y étant des valeurs auxquelles f fait correspondre f(x) et f(y), peut-on espérer que f(x) et f(y) aient une proximité donnée, si x et y sont assez proches ?" ce qui conduit à la continuité uniforme.

Il est important de remarquer qu'il n'y a aucune raison mathématique, physique ou pédagogique d'opter à ce stade pour la continuité en tout point plutôt que pour la continuité uniforme. Elles apparaissent tout aussi naturelles l'une que l'autre, et certains utilisateurs ont déjà proclamé que la continuité uniforme était pour eux plus naturelle, plus importante et plus utile que la continuité en tout point. La continuité en tout point est une notion plus fine que la continuité uniforme (la seconde implique la première et la réciproque est fautive). Cela peut faire penser que pédagogiquement il serait plus raisonnable de commencer par la continuité uniforme. (J'ai d'ailleurs de bonnes raisons de penser que beaucoup, parlant de la continuité en tout point, se réfèrent à la continuité uniforme).

Quoi qu'il en soit, pour respecter le programme et pour gagner du temps, nous avons arbitrairement (et à mes yeux, malhonnêtement) aiguillé les élèves sur la continuité en un point, mais il est clair que les classes étaient prêtes à accueillir aussi bien un concept que l'autre et que l'étude aurait été beaucoup plus satisfaisante si on avait introduit et comparé les deux notions.

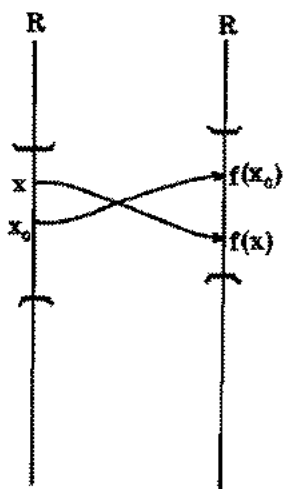
2. Formulation.

La phase de motivation achevée, la formulation mathématique de la notion n'a pas présenté de difficultés sérieuses.

En précisant le sens de l'énoncé intuitif : on peut obtenir une valeur f(x) aussi approchée que l'on veut de f(x₀) en prenant une valeur x assez proche de x₀, on est conduit à une première forme d'énoncé :

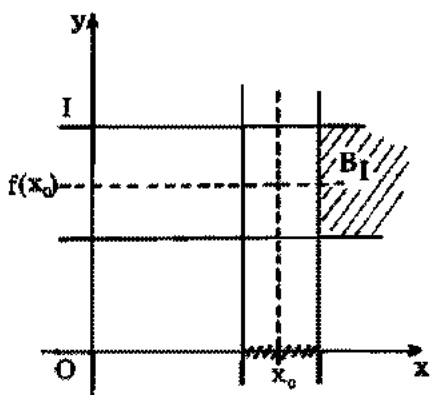
L'application f de l'intervalle U de R dans R est continue au point x₀, si et seulement si, quel que soit l'intervalle ouvert I de centre f(x₀), il existe un intervalle ouvert J de centre x₀, tel que l'image de tout élément de J appartienne à I, (ou encore tel que f(J) ⊂ I).

Des figures ont été faites pour illustrer cet énoncé. Celles qui se sont révélées les plus suggestives sont celles où on a représenté, au moyen de deux droites verticales, R comme ensemble de départ et R comme ensemble d'arrivée, la correspondance entre x et f(x) étant symbolisée par une flèche allant de x à f(x). Les intervalles I et J peuvent être, au tableau, marqués de traits forts de couleurs différentes.



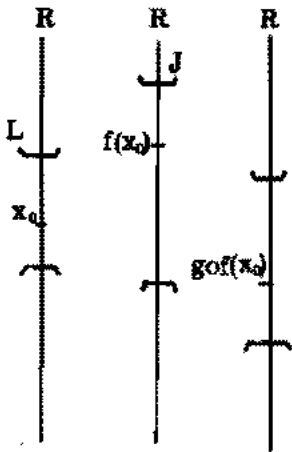
La relation $f(J) \subset I$ a été suggérée en prenant un point x dans J et en le joignant par une flèche à son image $f(x)$ dans I ; on n'a pas représenté $f(J)$ dont on ne sait pas à ce stade qu'il est un intervalle, qui au demeurant peut être ouvert, fermé ou semi-fermé.

Une autre figuration consistant à représenter $R \times R$ au moyen du plan a été utilisée aussi. Désignant par B_I la bande parallèle à Ox se projetant sur Oy selon I , elle conduit à l'énoncé : f est continue en x_0 si, quelle que soit la bande B_I , la projection sur Ox de l'intersection de B_I et du graphe de f contient un intervalle de centre x_0 .



Cette représentation a le mérite d'attirer l'attention sur la propriété des fonctions continues d'être localement bornées. (ce qui peut amener à la question : sont-elles bornées ? et fournir une motivation au théorème de Borel-Lebesgue). Elle s'est révélée peu suggestive pour les questions que nous avons abordées.

La définition d'une notion une fois donnée, il est indispensable de la faire fonctionner. La meilleure manière de le faire ici est de poser la question : " f est continue en x_0 ; g , application d'un intervalle V contenant $f(x_0)$ dans R , est continue en $f(x_0)$; que peut-on dire de $g \circ f$?" La réponse est devinée par tous les élèves, la démonstration trouvée par une partie importante d'entre eux est comprise par tous pratiquement. Le schéma ci-dessous y aide grandement, avec cette fois trois figurations de R . Pour tout intervalle I de centre $g \circ f(x_0)$ il existe un intervalle J de centre $f(x_0)$ tel que $g(J) \subset I$.



Mais pour tout intervalle de centre $f(x_0)$, donc en particulier pour J , il existe un intervalle L de centre x_0 tel que $f(L) \subset J$. Comme de $A \subset B$, on peut conclure $g(A) \subset g(B)$, il en résulte $g \circ f(L) \subset g(J) \subset I$.

On a ainsi mis en oeuvre la définition, ce qui permet à la fois de vérifier la compréhension par les élèves et de renforcer cette compréhension. On a en outre démontré un théorème tout à fait fondamental sur la continuité des applications, et assurément celui qu'il faut démontrer en premier.

Un autre genre d'exercices très utile consiste à faire vérifier que des fonctions données sont continues en un point donné. Comme il va s'agir de travailler directement sur des correspondances entre nombres, il est commode de recourir à l'énoncé de la continuité qui fait apparaître explicitement les nombres. Ces exercices auraient pu être l'occasion de présenter cette forme d'énoncé, mais nous l'avions fait auparavant pour deux raisons :

- On ne comprend vraiment le sens d'un énoncé que si on est capable de le reconnaître sous des formes d'apparences différentes et le fait de devoir comparer deux formes d'apparences différentes amène à les analyser avec soin et facilite la compréhension.
- La manipulation d'inégalités qu'il faut faire pour prouver la continuité d'une fonction donnée en un point donné est très instructive pour les élèves, mais les dérouté au premier abord. Il est donc plus prudent de disjoindre la difficulté relative à un nouvel énoncé et la difficulté relative à la manipulation d'inégalités.

L'autre énoncé de la continuité se déduit du premier en explicitant ce qu'est un intervalle de centre donné, et en remarquant que la donnée d'un tel intervalle est équivalente à celle de son rayon qui est un nombre réel strictement positif.

Appartenir à l'intervalle de centre a et de rayon r s'exprime pour le nombre réel x par $|x - a| < r$ ou $a - r < x < a + r$. Les deux formes ont été utilisées en classe. Nous n'utiliserons ici, pour abrégé, que la première.

Si l'on veut écrire l'énoncé entièrement en langage usuel, il est lourd et peu maniable. L'usage du symbolisme des quantificateurs, connu, et correctement connu, des élèves est ici très utile. (Les élèves

aient la précision qu'apporte l'explicitation des quantificateurs, et je me suis fait souvent rappeler à l'ordre lorsque je les sous-entendais).

Ce sont les élèves qui ont écrit, ou qui nous ont dicté l'énoncé qui est d'abord apparu sous la forme :

$$\forall r \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < r$$

ce qui fait apparaître un usage abusif du signe \implies (dont on pourrait dire qu'il est écrit avec quantificateur incorporé !).

Nous n'avons pas protesté, mais nous avons proposé d'écrire de la même manière la proposition : f n'est pas continue en x_0 .

Le mécanisme de l'échange des quantificateurs dans la négation, c'est-à-dire la règle

$$\text{non } [\forall x \in E, P(x)] \iff \exists x \in E, \text{ non } P(x)$$

était connu de la plupart des élèves et a été très vite compris par les autres. Mais la difficulté a été de nier

$$|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < r.$$

On nous a proposé de dire "n'implique pas", mais nous avons fait remarquer que cette solution était purement verbale, si on ne savait expliciter ce "n'implique pas". (Il faut remarquer que le terme "implique" n'avait certainement pas pour les élèves un sens tellement clair, mais s'ils croyaient savoir ce que veut dire "implique", ils admettaient en revanche facilement que "n'implique pas" était obscur).

Nous avons toujours attendu une réponse correcte, et il n'y a pas eu de classe où au moins un élève, et en général, plusieurs ne disent au bout de quelques minutes : cela veut dire qu'il y a des x qui vérifient $|x - x_0| < \alpha$ et ne vérifient pas $|f(x) - f(x_0)| < r$. Ils avaient retrouvé le quantificateur manquant !

Finalement, nous avons écrit :

" f n'est pas continue en x_0 " signifie :

$$\exists r \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists x \quad |x - x_0| < \alpha \text{ et non } (|f(x) - f(x_0)| < r)$$

ou encore

$$\exists r \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists x \quad |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq r.$$

et en niant cet énoncé, nous avons retrouvé que " f est continue en x_0 " signifie

$$\forall r \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall x \quad [\text{non } (|x - x_0| < \alpha) \text{ ou } |f(x) - f(x_0)| < r.$$

Nous avons gagné sur deux tableaux : on a retrouvé le quantificateur oublié et on a précisé le sens de $p(x) \implies q(x)$ en l'écrivant :

$$[\text{non } p(x)] \text{ ou } q(x).$$

Tout ce travail, qui a toujours été mené avec la collaboration très active de la classe, a été l'occasion de préciser ce qu'était une proposi-

tion et un prédicat à 1, 2, ou 3 places, ce que signifiait le mot "implique", ce qu'était une variable muette et une variable parlante, et le rôle mutifiant des quantificateurs. Dans l'énoncé qui exprime que f est continue en x_0 , f et x_0 sont les seules variables parlantes, les autres pourraient y être remplacées par des cases vides de formes différentes. Si l'on passe de l'énoncé " f est continue en x_0 " à " f est continue", abréviation pour " f est continue en tout point de son domaine de définition U ", on le fera en faisant précéder l'énoncé de $\forall x_0 \in U$, ce qui mutifiera x_0 .

A titre d'exercice, il a été proposé aux élèves de redonner, en utilisant l'énoncé précédent, une démonstration du théorème sur la composition des applications continues.

Ils ont spontanément écrit les hypothèses sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{I} - \forall r \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \quad |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < r \\ \text{II} - \forall r \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \quad |x - f(x_0)| < \alpha \implies |g(x) - g[f(x_0)]| < r \end{aligned}$$

Il n'y avait rien à dire a priori contre l'utilisation des mêmes lettres r , α , x dans les deux énoncés puisqu'elles y étaient muettes, et cette manière, parfaitement correcte, d'écrire les énoncés nous a paru pédagogiquement payante, car elle a mené les élèves tout droit sur la difficulté, au lieu de l'esquiver inconsciemment en utilisant des lettres différentes dans les divers énoncés.

En effet, après avoir écrit l'énoncé à prouver :

$$\text{III} - \forall r \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \quad |x - x_0| < \alpha \implies |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < r,$$

la première démarche a consisté à dire : "donnons-nous un nombre réel strictement positif r ...", c'est-à-dire que dans la suite immédiate, r est le nom d'un nombre choisi, ce n'est plus une variable muette. A ce nombre r , l'énoncé II permet d'associer au moins un nombre α tel que ... J'en choisis un que j'appelle α , et α est alors, au moins provisoirement, une variable parlante. L'énoncé III sera alors satisfait si je peux trouver une condition de la forme convenable pour que les valeurs de f soient distantes de $f(x_0)$ de moins de α . Or l'énoncé I donne une telle condition : puisque α est un réel strictement positif, on peut lui associer un nombre à qui il faut donner un nouveau nom, β par exemple, tel que pour tout x , $|x - x_0| < \beta \implies |f(x) - f(x_0)| < \alpha$, et comme de $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$ résulte $|g[f(x)] - g[f(x_0)]| < r$, on a bien obtenu ce que l'on cherchait, à condition de remarquer que r a été choisi arbitrairement, et que le raisonnement est valable pour tout nombre réel r . Autrement dit, r et β reprennent un statut de variable muette, grâce aux quantificateurs dont on les munit, et on trouve l'énoncé III. Dans l'exposé précédent on a laissé à x son statut de variable muette. Il est possible, et peut-être plus facile de le démutifier aussi, ce qui exige une lettre différente de x dans l'énoncé II.

A la suite de discussions, qui furent des dialogues animés et fructueux, on parvint à la conclusion que si les énoncés I et II étaient parfaitement corrects tels qu'ils étaient écrits, il était beaucoup plus commode, pour les utiliser dans un raisonnement où on aurait à "démutter" certaines variables, d'utiliser des lettres différentes et d'écrire, par exemple :

$$I - \forall r \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall x \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < r$$

$$II - \forall s \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \beta \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall y \quad |y - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(y) - g[f(x_0)]| < s.$$

Ce qui fut instructif, c'est que chaque fois qu'un élève se laissait aller à l'automatisme de l'écriture, il s'empêtrait dans des difficultés dont seule la réflexion sur la signification de ce qui était écrit pouvait le sortir, et dont elle sortait effectivement.

D'autre part aucune difficulté ne fut esquivée et le mécanisme de la mutification ou de la démutification temporaire des variables fut examiné avec minutie. Mon rôle fut de ne donner et de n'accepter que des réponses honnêtes aux questions soulevées par les difficultés rencontrées. Cela prit moins de temps qu'on aurait pu le croire à priori, et nous fûmes récompensés par le sentiment d'avoir approfondi notre compréhension de la question, moi compris, car je dus constater, à devoir l'expliquer, que je n'avais pas tellement réfléchi à ce que je faisais d'instinct, et je fus un bien meilleur meneur de jeu pour les dernières classes que pour les premières.

Les exercices consistant à démontrer la continuité en un point donné d'une fonction donnée (par exemple continuité, au point 3, des applications $x \mapsto 2x^2 - x + 1$, $x \mapsto \frac{3x+1}{4x+3}$) furent proposés comme devoirs à faire à la maison.

La difficulté rencontrée par les élèves vient de ce qu'ils avaient essentiellement manipulé des inégalités pour résoudre des inéquations, et que leur travail avait toujours consisté, partant d'un prédicat $P(x)$, à en trouver un autre $Q(x)$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x).$$

Or le travail à effectuer ici était, étant donné le prédicat $P(x)$, d'en trouver un autre $Q(x)$ (d'une forme particulière fixée à priori) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) \Rightarrow P(x)$$

(sans que l'on ait en outre, en général,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Par rapport à leurs habitudes, il fallait travailler à "l'envers" : au lieu de chercher des conditions nécessaires pour que $P(x)$ soit vrai, il fallait chercher des conditions suffisantes.

Les premières tentatives furent souvent catastrophiques, mais une explication détaillée de la cause des erreurs commises eut raison d'une bonne part d'entre elles. Ce n'était pas les mécanismes de calcul qui étaient en

cause, car la proportion d'erreurs techniques de calcul fut faible, mais l'abandon à un mécanisme inadéquat, et à l'habitude de considérer que ce que l'on a écrit est vrai, et que le travail consiste à en tirer des conséquences, alors que les raisonnements à faire étaient du type de l'exemple suivant : pour trouver une condition suffisante pour que $|a + b| < \alpha$ soit vraie, on peut utiliser l'inégalité toujours vraie $|a + b| < |a| + |b|$, et remarquer que si on a une condition suffisante pour que $|a| + |b| < \alpha$ soit vraie, c'est une condition suffisante pour que $|a + b| < \alpha$ soit vraie.

Ces exercices, dont il ne faudrait pas abuser, parce qu'ils deviendraient vite fastidieux, ont, utilisés à dose raisonnable, le double mérite d'aider à comprendre ce qu'est la continuité et de provoquer des calculs à qui une motivation externe épargne le caractère de gratuité décourageante de trop d'exercices de calcul, et surtout de montrer aux élèves que, contrairement à un préjugé dont ils sont victimes, calculer c'est raisonner et non s'abandonner à l'automatisme.

IV — EXTENSION DE LA NOTION. DISTANCE. DISTANCES SUR \mathbb{R}^2 . OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES A VALEURS REELLES

Cette troisième partie fut une phase d'exploitation et d'extension des idées et des résultats de la partie précédente.

La notion de distance, dont le rôle avait été souligné, fut redéfinie dans sa généralité et les élèves acceptèrent facilement, sinon même avec enthousiasme, de passer du cas d'applications de U , intervalle de \mathbb{R} , dans \mathbb{R} à celui d'applications d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) , où E et F sont des ensembles, et d, δ des distances définies sur ces ensembles, et transcrivirent d'eux-mêmes les définitions précédemment données, pour obtenir : l'application f de E dans F est continue en x_0 , pour les distances d et δ , si et seulement si l'une des conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite :

I — Pour toute boule ouverte B , relative à δ , de centre $f(x_0)$, il existe une boule ouverte C , relative à d , de centre x_0 et telle que $f(C) \subset B$.

II — $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_*^+ \quad \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \eta \implies \delta(f(x), f(x_0)) < \epsilon$
Démontrer, dans le cas le plus général, le théorème sur la composition des applications continues ne présente, évidemment, aucune difficulté.

La généralisation n'a d'intérêt que si elle permet de maîtriser effectivement d'autres cas que celui de \mathbb{R} . Un exemple simple et extrêmement utile est celui de \mathbb{R}^2 . Si on désigne par x, y, \dots les éléments de \mathbb{R}^2 avec $x = (x_1, x_2)$, on a présenté les trois distances usuelles :

$$d_1(x, y) = \sup \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

$$d_2(x, y) = \frac{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}{\sqrt{2}}$$

$$d_3(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Dans une des classes, rien n'a été défini à priori et il a été demandé aux élèves s'ils pouvaient imaginer des distances sur \mathbb{R}^2 . L'un d'eux, très vite, a proposé $(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$. On lui fit remarquer qu'il donnait là, non pas un nombre réel positif, mais un couple de tels nombres, que par suite sa réponse était inadéquate, bien qu'elle puisse être considérée comme une tentative intéressante pour satisfaire les deux premiers axiomes de la distance. Si avec ce couple, il pouvait calculer un nombre positif ayant les bonnes propriétés, il aurait la solution. Au fond, on pouvait interpréter sa réponse comme voulant en réalité dire :

$\varphi(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ où φ serait une application de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R}^+ , mais cette dernière remarque ne fut pas faite pour laisser plus longtemps la classe au pied du mur. Un silence dubitatif régna un assez long moment, jusqu'à ce qu'un élève déclare : "on ne va tout de même pas les ajouter !". La balle fut saisie au bond : "pourquoi pas ?" et nous obtînmes la distance d_2 .

Quelle que soit la manière dont on présente ces distances, on y trouve de nombreux avantages :

1°) la vérification du fait que ce soit des distances, la recherche de ce que sont les boules sont d'excellents exercices sur la valeur absolue, les inéquations, la représentation graphique des inéquations.

2°) le fait qu'on puisse définir au moins trois distances différentes sur le même ensemble \mathbb{R}^2 démystifie la notion : un ensemble ne porte pas "sa distance" avec lui. C'est par une décision dont nous sommes maîtres, que nous le munissons de telle ou telle distance.

3°) enfin, l'avantage décisif, c'est qu'il est alors possible de définir des applications continues, non plus seulement de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , mais de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Parmi les applications de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} dont la continuité mérite d'être examinée figurent en premier lieu, les opérations de \mathbb{R} :

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ et } (x, y) \mapsto xy.$$

La vérification de leur continuité en tout point fut traitée au tableau par des élèves, avec les différentes distances définies sur \mathbb{R}^2 (surtout avec d_1 et d_2 , la distance euclidienne d_3 étant ici la plus malcommode).

On y ajouta la vérification de la continuité des applications $x \mapsto -x$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x \mapsto \frac{1}{x}$ de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* , c'est-à-dire que l'on obtint tous les résultats permettant d'affirmer " \mathbb{R} est un corps topologique" (mot qu'il est sans intérêt de prononcer à ce niveau).

Un autre problème fut alors abordé. Se donner une application F de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 (ou d'une partie E de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , mais cette précision va de soi) est équivalent à se donner un couple d'applications (f, g) de E dans \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in E \quad F(x) = (f(x), g(x)).$$

Une notation commode pour rappeler le lien entre f, g et F consiste à écrire $F = f \times g$.

Cet énoncé demanda une discussion. Une fois réglé, on posa la question : quel lien y-a-t-il entre la continuité de F et celle de f et g ? Les élèves conjecturèrent la réponse et la démontrèrent : F est continue si et seulement si f et g le sont toutes les deux.

Dans toutes ces questions, on constata que les résultats étaient valables quelle que soit celle des distances d_1, d_2, d_3 que l'on utilise. (A vrai dire, on n'eut pas le temps de procéder en classe à l'étude de tous les cas. Pour chaque théorème, l'élève au tableau avait le choix de la distance sur \mathbb{R}^2 , et il fut souvent remarqué que la démonstration s'adaptait facilement au cas d'une autre distance).

Le problème se posa alors de savoir si c'était dû aux cas particuliers examinés, ou si, quel que soit l'espace métrique (E, d) , une application de E dans \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^2 dans E , continue pour une des distances, l'était pour les autres.

L'idée très simple qui règle immédiatement la question, mais que les élèves ne pouvaient avoir, parce qu'ils ne sont pas encore habitués à penser en termes d'applications et de composition d'applications, leur fut suggérée : il suffit de vérifier que l'application identique I de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est continue quelle que soit celle des distances d_1, d_2, d_3 dont on munit \mathbb{R}^2 comme ensemble de départ ou comme ensemble d'arrivée, en vertu du théorème sur la composition des applications et des égalités $f = f \circ I$ pour une application f de \mathbb{R}^2 dans E , et $f = I \circ f$ pour une application de E dans \mathbb{R}^2 . La continuité de I résulte immédiatement du fait que toute boule relative à une des distances contient une boule de même centre relative à n'importe laquelle des autres. Il est bon de poser un garde-fou pour éviter que les élèves croient que ce qui est vrai pour les distances d_1, d_2, d_3 l'est pour toute distance sur \mathbb{R}^2 : le contre exemple simple et amusant est fourni par la distance de la topologie discrète :

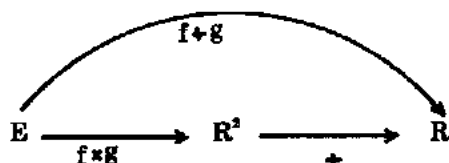
$$d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y \text{ et } d(x, x) = 0.$$

Le théorème sur la composition des applications continues, le fait que la continuité de $F = f \times g$ soit équivalente à celle de f et g et le fait que \mathbb{R} soit un corps topologique donnent alors, sans aucun effort, tous

les théorèmes sur les opérations sur les fonctions continues à valeurs réelles. Par exemple, si f et g sont deux applications continues de (E, d) dans \mathbb{R}^2 , $f + g$ définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

est aussi continue, car $f + g$ est la composée de $f \times g$ suivie de l'addition (application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}) suivant le schéma :



La démonstration est la même pour $f - g$, fg et $\frac{f}{g}$ (à condition que g prenne ses valeurs dans \mathbb{R}_*).

Nous n'avons pas abordé la question de limite, mais les professeurs qui l'ont fait, dans la foulée de ce qui avait été fait pour la continuité, nous ont assuré qu'aucune difficulté ne s'était levée.

V - CONCLUSION

Les réactions des classes avec qui ces questions ont été discutées ont été très voisines les unes des autres, les différences ne portant que sur des détails, ou venant de l'expérience acquise par les meneurs de jeu. La différence la plus significative a opposé les classes temporairement dépourvues de professeur à celles qui en avaient un : dans ces dernières le professeur pouvait compléter l'étude faite une semaine et préparer la suite ; les autres, même celles qui avaient réagi avec le plus de vivacité et de pertinence, semblaient avoir au début de chaque séance tout oublié de ce que l'on avait fait la semaine précédente. Il n'y a rien de surprenant à cela (combien de fois ai-je dû utiliser la notion d'idéal avant de m'en rappeler définitivement la définition ?), et leurs souvenirs revenaient vite, mais c'était une fâcheuse perte de temps pour quelqu'un qui n'en disposait pas de beaucoup.

Les difficultés essentielles sont en résumé :

— une difficulté accidentelle, mais très grave : l'ignorance de tout ce qui concerne la valeur absolue et la distance sur \mathbb{R} , qui devrait être parfaitement connu à l'issue du premier cycle, mais qui a pu, tout de même, être récupéré assez vite ;

— une difficulté intrinsèque qui est de motiver l'introduction de la notion et de bien faire comprendre le sens intuitif des énoncés, leur formulation mathématique et la manière de les utiliser.

Comparer des énoncés équivalents, suivant les cas faire intervenir l'un ou l'autre, fonder sur eux des démonstrations nous a paru le meilleur moyen de parvenir à une compréhension satisfaisante. Les réactions des élèves et l'impression de facilité qui a dominé les dernières séances nous font penser que cette politique est bien plus féconde que celle qui consisterait à se borner à un seul énoncé et à n'en tirer aucune conséquence. Les élèves ne peuvent s'intéresser aux mathématiques si ce qu'on leur présente n'en est pas. En revanche, il nous est apparu clairement qu'une étude honnête, en dépit de sa minutie et de quelques difficultés techniques, les intéressait et leur profitait.

— des difficultés techniques, qui sont réelles, mais qui sont l'occasion d'une reprise, motivée et raisonnée, de la manipulation des inégalités et des concepts logiques élémentaires, et qui mettent l'élève dans une situation saine : utiliser la technique non pas pour elle-même, mais au service d'une idée générale importante ;

— signalons enfin une difficulté matérielle : l'incroyable exigüité des tableaux installés dans les lycées. On perd un temps considérable à effacer et à récrire la même chose de nombreuses fois, on est contraint d'écrire très petit, voire trop petit, et on ne peut laisser en évidence l'énoncé fondamental auquel il faut sans cesse se référer.

M'étant ouvert de cette difficulté à un haut fonctionnaire de l'Education Nationale, je crains que la défense du tableau noir ne m'ait fait passer à ses yeux pour le tenant d'une pédagogie rétrograde. Toujours est-il qu'il me fut répondu que les proviseurs avaient des crédits pour ce genre d'équipement, ce que les proviseurs contestent. La taille des tableaux est une question beaucoup moins mineure qu'elle ne le paraît, et la régler n'exige tout de même pas un investissement énorme, mais cela demandera sans doute beaucoup d'efforts et de temps à qui voudra s'y attaquer !

L'amélioration de l'enseignement du premier cycle devrait supprimer ou atténuer la plupart de ces difficultés (sauf la taille des tableaux !), mais dès maintenant un enseignement sérieux de la continuité apparaît possible et profitable.

L'expérience relatée, faite en 70-71, gagnerait à être reprise, et aussi étendue à d'autres notions. L'excellent esprit de collaboration qui a régné entre l'équipe de l'IREM, les professeurs et les élèves, que nous tenons à remercier chaleureusement ici, nous fait souhaiter et espérer que 71-72 nous donnera l'occasion de continuer dans cette voie.