1

La Mathématique à l'École Élémentaire

Ce Bulletin est entièrement consacré à la **Mathématique à l'École élémentaire.** La rédaction a reçu un très grand nombre d'articles, mais devant une telle masse, il nous aurait fallu choisir. Le comité de rédaction a décidé de publier, au courant du premier trimestre de 1972, une **Brochure** regroupant ces articles.

Voici les grands chapitres de ce livre :

1. *Réflexions sur le programme rénové du 2-01-70.*
2. *La formation des maîtres.*
3. *Quelques thèmes du programme rénové.*
4. *Quelques thèmes au-delà du programme rénové.*

Pour le Bulletin 282, nous avons retenu quelques-uns de ces articles, qui seront d'ailleurs repris dans la Brochure.

Nous demandons, dès à présent, à tous les membres de l'A.P.M.E.P. de faire connaître cette Brochure; elle s'adressera en priorité aux instituteurs, mais aussi à tous les professeurs de mathématique qui s'intéressent à l'École Élémentaire, et nous notons qu'ils sont de plus en plus nombreux.

De son côté, l'A.P.M.E.P. a toujours affirmé le principe d'une réforme profonde à l'École Élémentaire : le programme du 2-01-70 n'est qu'une étape; il faut aller au-delà.

En effet, seule une réforme fondamentale, touchant à la fois les contenus et les méthodes, permettra une véritable démocratisation de notre enseignement, et tous ceux qui se sont penchés ces dernières années sur ce problème ont découvert d'énormes possibilités. Cependant, rien ne sera possible tant que la *formation permanente* de tous les instituteurs ne sera pas entreprise, et nous savons que c'est là un obstacle sérieux : il faut beaucoup d'argent et de nombreux formateurs qualifiés pour assurer l'encadrement des maîtres. Mais, faut-il pour autant attendre? Dès à présent, il nous faut convaincre, d'une part les instituteurs qu'ils ont tout à gagner à rénover profondément leur enseignement mathématique, et d'autre part les responsables de l'Éducation Nationale que s'ils ne s'engagent pas résolument vers cette réforme, tôt ou tard le mouvement sera devenu irréversible et qu'ils ne pourront plus le contrôler.

Maurice GLAYMANN.

Les Livres et les Brochures de l'A.P.M.E.P.

Bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique.

LES ANGLES, par Jean FRENKEL, 32 pages, 3 F.

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, par J. ADDA et W. FAIVRE, 52 pages, 4 F.

Rappel

LA CHARTE DE CHAMBÉRY, 32 pages, 2 F.

MATÉRIAUX POUR L'HISTOIRE DES NOMBRES COMPLEXES, par Jean ITARD, 32 pages, 3 F.

PREMIÈRE ÉTAPE... VERS UNE RÉFORME DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DANS LES CLASSES ÉLÉMENTAIRES, 48 pages, 3 F.

En préparation : (février 1972)

La Mathématique à l'École Élémentaire.

Bibliothèque d'enseignement mathématique.

LA MATHÉMATIQUE PARLÉE PAR CEUX QUI L'ENSEIGNENT, par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. :

Édition 1967 (A), 25 F.
Millésime 1968 (B), 4 F.
Édition 1968 (A, B), 27 F.
Millésime 1969 (C), 5 F.
Édition 1969 (A, B, C), 32 F.
Millésime 1970 (D), 5 F.
Édition 1970 (A, B, C, D), 37 F.

Ces ouvrages ne sont pas vendus en librairie.
Pour vous les procurer, consultez ce Bulletin à la page 8.

Comprenons-nous bien

Louis DUVERT

Lors de la mise en chantier de ce Bulletin consacré à l'École Élémentaire, la Rédaction souhaitait, pour faciliter la tâche des lecteurs, un effort d'unification du vocabulaire employé dans les divers articles qu'il contiendrait.

Mme Robert (1) a partagé ce souci; elle nous a écrit :

« Je crois, comme vous, qu'au sein d'un Bulletin, il faut adopter un même vocabulaire, en le précisant au début pour que ce soit clair. Le choix m'importe peu, pourvu qu'on sache bien de quoi on parle. Et je suis toute prête à employer celui de l'A.P.M. ».

Brousseau a adopté la même attitude.

Nous les remercions vivement d'avoir accepté de changer certains termes de leurs articles.

Nous précisons ci-dessous quelques-unes des positions adoptées par le Dictionnaire de l'A.P.M.; nous ajoutons quelques réflexions personnelles sur des mots dont il ne s'est pas encore occupé.

Nous espérons qu'ainsi les lecteurs de ce Bulletin ne seront pas rebutés par des difficultés de vocabulaire; leurs remarques à ce sujet seront bien entendu les bienvenues.

Nous nous proposons de poursuivre le même but dans les numéros suivants, grâce à la volonté de coopération de ceux qui y écriront.

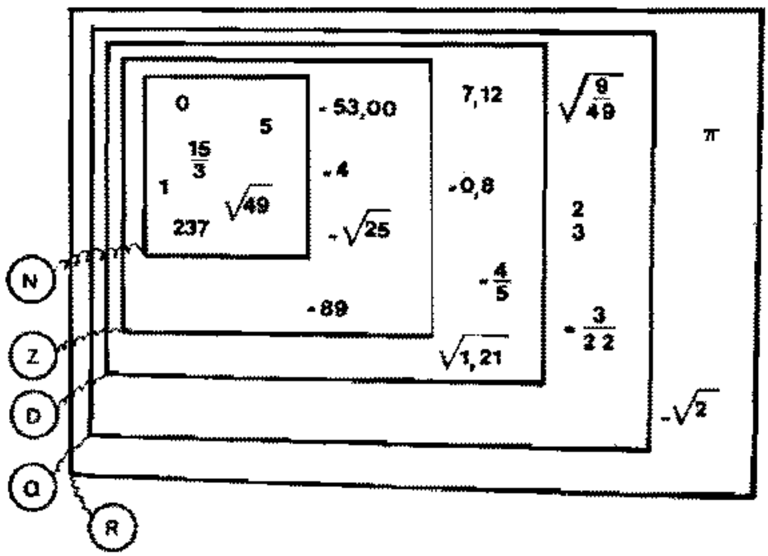
Dans le dictionnaire de l'A.P.M.

1° Ensemble des *naturels* (zéro compris) : **N**
Ensemble des *entiers :* **Z**
Ensemble des *décimaux :* **D**
Ensemble des *rationnels :* **Q**
Ensemble des *réels :* **R**
Ensemble des *complexes :* **C**

N est inclus dans **Z**; **Z** est inclus dans **D**; **D** est inclus dans **Q**; **Q** est inclus dans **R**; **R** est inclus dans **C**.

(1) L'article de Madame Robert paraîtra dans la Brochure.

Exemples :



2° Notice opération.

« *Loi de composition interne dans* **N** » signifie :

« *application* de **N** × **N** vers **N** »

« *Opération interne dans* **N** » signifie « *application d'une partie* de **N** × **N** (qui peut être éventuellement **N** × **N** lui-même) vers **N**. »

Toute loi de composition interne est une opération interne. Mais il existe des opérations internes qui ne sont pas des lois de composition internes.

Exemples, dans **N** :

L'addition, la soustraction, la multiplication, la division, sont quatre opérations internes dans **N**.

L'addition et la multiplication sont deux lois de composition internes dans **N**; ce n'est le cas ni de la soustraction, ni de la division dans **N**.

(La soustraction dans **Z**, elle, est une loi de composition interne dans **Z**.)

3° Opérateur.

A l'école élémentaire, ce mot signifie le plus souvent « application d'un ensemble vers lui-même », l'ensemble étant par exemple **N**, ou l'ensemble des blocs logiques...

Exemple : l'opérateur dans **N** « additionner 3 » est l'application de **N** vers **N** qui à tout naturel x fait correspondre le naturel $x+3$.

Ne pas confondre avec OPÉRATION (voir plus haut).

4° Quotient.

Soit a un naturel, b un naturel non nul.

a) S'il existe un naturel c tel que $a = bc$, c s'appelle « quotient de a par b » (de préférence à « quotient exact », qui présente l'inconvénient de laisser entendre qu'il existe un quotient inexact!...) et se note $a:b$ ou $\frac{a}{b}$.

b) Il existe toujours un et un seul couple de naturels (q, r) tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad r < b$$

q est le « *quotient euclidien* » de a par b (de préférence à « *quotient entier* » : $\frac{12,4}{3,1}$ est un quotient entier qui n'est pas euclidien).

r est le « *reste* » de a *par* b.

Déterminer le couple (q, r) connaissant le couple (a, b), c'est effectuer la « *division euclidienne de* a *par* b ».

q se note quelquefois $a \div b$.

Il n'existe pas de symbole spécial pour le reste.

Si $r = 0$, q est le quotient de a par b.

c) Exemples. $15 : 5 = 3$ $\quad \frac{15}{5} = 3$ $\quad 16 \div 5 = 3$ $\quad 15 \div 5 = 3$

$16 : 3$ n'est pas un naturel.

d) Le quotient de a par b, quand il existe, est le résultat de l'opération interne dans **N** dite « division », dont il est question dans le 1°. La division euclidienne, elle, n'est pas une opération interne dans **N**.

Autres remarques.

1° Représentations d'une relation binaire.

Les deux plus employées sont la représentation sagittale (ou « fléchée ») et la représentation cartésienne (à cases, ou à nœuds).

Dans les deux cas, au lieu de « représentation », on emploie aussi « schéma », « diagramme »... Certains auteurs spécialisent chacun de ces deux vocables :

« schéma » (sagittal, cartésien) pour représenter une relation binaire;

« diagramme » (de Venn, de Carroll...) pour représenter un ensemble et certaines de ses parties.

Le mot « graphe » pose un problème plus délicat.

a) Le graphe d'une relation binaire $\mathcal{R}$ de source A et de but B est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$. C'est une partie du produit cartésien $A \times B$. Voir aussi un emploi plus général dans l'article de J. Chevallier, p. 15.

b) « Graphe » est parfois employé au sens de « schéma sagittal » (exemple : PAPY, Mathématique moderne, I).

c) « Graphe » signifie parfois « représentation graphique » (autrement dit « courbe représentative ») d'une fonction de **R** vers **R**.

Les deux sens *b*) et *c*) ne sont que des extensions de *a*), abusives, où l'on passe de l'objet mathématique à ses représentations visuelles (une flèche, un point du plan, sont des représentations conventionnelles d'un couple). En revanche, le sens suivant est indépendant du sens *a*) ;

d) La « théorie des graphes », ou « analysis situs », est une partie de la topologie.

Pour éviter toute ambiguïté, nous avons supprimé, sans nuire à la compréhension du texte, le mot « graphe » quand il était employé dans un sens autre que le sens *a*); nous nous en excusons auprès des auteurs.

2° Dans une table, un tableau, les *rangées* sont de deux sortes : les *lignes* (rangées « horizontales ») et les *colonnes* (rangées « verticales »).

3° Le mot « *solution* », en mathématique, désigne un élément vérifiant une équation.

Exemple : les solutions de l'équation dans **Z** « $x^2 - 1 = 0$ » sont 1 et -1.

Il serait préférable de ne pas l'employer dans le sens de « résolution » d'un problème, ou de « rédaction de la réponse » à un problème, ou de « méthode » (« première, deuxième méthodes » plutôt que « première, deuxième solutions »).

Nous étions 800 à Toulouse.

Nous serons 1 000 à Caen.

Vous aussi venez aux Journées de l'A.P.M.E.P. :

LES FINALITÉS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

C'est votre problème.

Matériaux pour un dictionnaire

J. M. CHEVALLIER

Ayez donc de belles relations...

Dans le numéro spécial 269-270 consacré à la classe de Sixième, Mme TOUYAROT avait fait un recensement soigneux des sens donnés au mot *relation*. Elle n'avait pas cherché à épuiser un tel sujet; en le reprenant, je n'ai ni l'intention de « rewriter » son article, qui reste une excellente source, ni l'ambition assez vaine de conclure un tel débat — tout au plus celle de maintenir ouvertes des portes que Mme TOUYAROT jugeait déjà enfoncées! D'autre part, il s'agit à présent non de Sixième, mais du premier degré, ce qui rend le problème encore plus délicat, et mon incompétence encore plus profonde. Et pourtant il faudrait bien qu'on arrive à savoir à peu près ce qu'on met dans cette idée de « relation », obscurcie par tant d'usages divers et parfois contradictoires.

Je révère comme tout un chacun la grande construction bourbakiste qu'on peut — si on le souhaite — tenir pour purement syntaxique, à l'exclusion de toute interprétation « sémantique ». A un certain niveau, où les règles du jeu sont très bien définies et très bien appliquées, rien de plus légitime. Au niveau élémentaire (et l'élémentaire dure longtemps!), on ne saurait certes proscrire tout « jeu formel », car il peut avoir de l'attirance pour certains esprits, mais ce serait une gageure de s'y adonner constamment et totalement. Donc, même si la portée du mot *relation* doit s'en trouver réduite, la sagesse commande probablement de se borner au départ à un point de vue ensembliste, en convenant qu'on ne sortira pas d'un certain « univers ».

Cependant, même ainsi, il y a un cas où l'on ne peut éviter de faire du « formalisme » : sans le dire sans doute, voire sans s'en rendre compte, car c'est le cas qui passe pour le plus simple, j'ai nommé la « relation d'égalité ». Dans l'univers — ou dans n'importe quel ensemble — elle ne saurait être autre chose que la bijection identique, $x \mapsto x$, dont l'intérêt n'est pas niable, mais qui est loin d'épuiser le contenu du concept d'égalité. Cela parce que *l'égalité est une relation linguistique et non une relation mathématique*, qui porte sur des *noms* et non sur des « objets ». Écrire $a = a'$, cela signifie : syntaxiquement, que toute formule telle que « *abc...* » peut être valablement remplacée par « *a'bc...* »; sémantiquement, que « *a* » et « *a'* » sont des noms synonymes désignant le même objet sans être eux-mêmes l'objet. Mais, dira-t-on, c'est la même chose avec $a < b$, a et b n'y sont que des noms! Oui, mais les objets nommés a ou b pourraient être désignés dans la formule par n'importe quel autre de leurs noms a' ou b', donc finalement cette formule donne une information *sur les objets* par l'intermédiaire de leurs noms. Tandis que, si je dis que « l'égalité subsiste quand on y remplace le nom d'un objet — ou plutôt *de l'objet* — par un synonyme », j'énonce l'axiome de transitivité pour l'égalité, mais certainement pas une propriété de l'objet. Cela n'est pas une difficulté mineure, et il vaut mieux qu'on en soit conscient à tous les niveaux.

Revenons aux relations proprement mathématiques. Pour celles-ci, à vouloir aller trop loin et trop tôt dans l'abstraction, on arrive à peu près immanquablement à identifier « relation » et « lien verbal »; je pense que c'est grave pour la suite (à moins de chambarder une fois de plus le vocabulaire, bien sûr). Si l'on habitue les gens dès le jeune âge à dire que « ... est frère de... » est une relation, que pourront-ils répondre le jour où on leur demandera si cette relation est symétrique ou non? Rien, tant qu'on n'aura pas précisé s'il y a uniquement des garçons, ou à la rigueur des filles sans frère, ou si au contraire l'un des lascars a amené sa petite sœur. Autant dire que la prétendue relation *n'est pas définie*.

Apparemment plus « concrète » est la relation considérée comme ensemble de couples; {(Jean, Pierre), (Pierre, Jean), (Michel, Anne)} par exemple semble remplacer avantageusement le lien verbal «... est frère de... », du moins aussi longtemps qu'on ne pose pas de question indiscrète sur la relation complémentaire (celle qui aurait pour lien verbal « ... n'est pas frère de ... »). Assurément il est facile de former un ensemble de treize couples : (Michel, Jean), (Anne, Michel), (Pierre, Pierre)..., qui est *inclus* dans l'ensemble cherché, mais c'est tout; s'il y avait dans le tas un fils unique ou bien deux sœurs, comment le saurait-on? Comme on le voit, la critique n'est pas foncièrement autre que dans le premier cas; d'ailleurs la seule différence est qu'on a remplacé la définition « en compréhension » d'un certain ensemble, le *graphe*, par sa définition « en extension ». Assimiler la relation soit au « lien verbal », soit au « graphe » est toujours un danger si l'on n'a pas précisé de façon explicite sur quel ensemble (ou quels ensembles) on travaille.

Un autre écueil, moins grave dans sa nature, mais propre à créer de fâcheuses habitudes d'esprit, consiste à ne jamais parler que de couples, comme si toutes les relations étaient binaires! C'est un peu comme si l'on n'appelait équations que celles qui sont « à deux inconnues ». Incontestablement les relations binaires ont une importance qu'il ne faut pas sous-estimer : elle est d'ailleurs suffisante pour qu'on leur ait attribué le nom particulier de *correspondances;* mais à quoi bon, si c'est pour employer indifféremment les deux mots?

Je crois qu'il faudrait s'en tenir aux choses qui sont à la fois les plus simples et les plus fondamentales. Dans un ensemble *donné* d'adultes et d'enfants, « ... est frère de Paul » définit déjà une relation, plus simple que la relation « ... est frère de ... », laquelle à son tour est plus simple que la relation « ... a pour père ... et pour mère ... ». Mais toutes les trois sont des relations, et seule la seconde est une correspondance (la troisième en deviendrait une si l'on associait à l'enfant le *couple* de ses parents).

Il apparaît là-dessus que c'est le couple (E, G) formé par un ensemble E et un sous-ensemble G de E qui définit de la façon la plus naturelle la *relation de support* E *et de graphe* G, les éléments de G « vérifiant » la relation alors que ceux du sous-ensemble complémentaire « ne la vérifient pas ». Cet aspect est assez général pour englober tous les cas où l'on parle de relation au sens ensembliste : car rien n'oblige, mais rien n'empêche non plus E d'être un produit cartésien $E_1 \times E_2$; dans ce cas, la relation est binaire et il revient au même de parler de la correspondance (E_1, E_2, G) où E_1 est la source, E_2 le but, et G le graphe (naturellement, si $E_2 = E_1$, on retrouve les considérations habituelles de symétrie, réflexivité, etc.); si E est un produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, la relation est ternaire, comme c'est le cas pour les opérations (*), etc.

Parallèlement, dans le langage, il serait bon d'éviter le glissement de sens dû aux « relations avec » de la langue courante, lesquelles s'appliquent en fait aux correspondances; dire soit « le couple (x, y) satisfait à la relation $\mathcal{R}$ », soit « à x correspond y par la relation binaire $\mathcal{R}$ » semble préférable à « x est en relation avec y ».

Comme le « calcul des attributs » pourrait être abordé relativement tôt, le fait que les propositions « a appartient à un certain sous-ensemble », « a satisfait à une certaine relation », « a possède une certaine propriété (ou un certain attribut) » sont au fond des moyens équivalents d'exprimer la même chose, devrait être mis en lumière d'assez bonne heure. Si modestes soient-elles en apparence, ces acquisitions seraient d'un grand poids *pour l'avenir ;* car de jeunes esprits habitués à ce mode de pensée et d'expression ne seraient pas dépaysés quand, le jour venu, ils entreraient en contact avec le *prédicat*, qui n'est jamais qu'un nouvel avatar de la relation. De ce point de vue la relation (ou prédicat) de support E est une application de E dans {Vrai, Faux}, et son graphe G est l'image réciproque de {Vrai}. Un tel gain serait considérable, quand on constate les difficultés encore provoquées par ce que l'on continue d'appeler « la relation $y = x^2$ »; si l'une des lettres au moins est une variable muette (qu'en général on n'a pas pris la peine de mutifier!), la prétendue relation n'est rien de plus qu'un lien verbal, et est tout aussi peu signifiante que lui; d'où les questions sans fin qu'on se pose. Tandis que, si l'on considère les relations, de supports respectifs $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $x \mapsto (y = x^2)$, $y \mapsto (y = x^2)$, $(x, y) \mapsto (y = x^2)$, $(x, y, z) \mapsto (y = x^2)$, il est immédiat que leurs graphes respectifs sont : $\{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ (dans le cas $y > 0$), $\{x^2\}$, une parabole, un cylindre parabolique.

Quand on a de si belles relations, c'est pour s'en servir!

J. C.

(*) Une *opération*, au sens le plus général, est définie par le Dictionnaire de l'A.P.M. comme une application d'une partie de $E_1 \times E_2$ vers E_3.

Chercher pour se former
Mathématisation de situations

N. PICARD
I.R.E.M. de Paris

M. A. GIRODET
Université de Paris-V.

Le sujet de cet article ne concerne pas des notions explicitées dans le programme de 1970. Si la situation présentée ici a été introduite dans des classes élémentaires (CM 2), ce n'est pas dans le but d'apprendre des notions mathématiques, mais d'apprendre à utiliser des notions que l'on possède, apprendre à chercher. En fait, ce qui nous intéresse dans cet article, ce n'est pas tant les découvertes faites par les enfants que le travail fait à partir de la même situation par un groupe de travail de maîtres de l'Enseignement Élémentaire, groupe de travail qui est plus un club de mathématique qu'un centre de recyclage, ce qui n'empêche nullement que l'on apprenne des mathématiques. Il ne s'agit pas ici de donner un modèle, car ce qui est relaté ici n'est pas reproductible, mais de montrer comment s'est effectuée au sein de ce groupe une recherche qui au bout du compte a débouché sur des concepts mathématiques que l'on a pu expliciter. Les chercheurs (élèves comme maîtres) ne savaient pas très bien où leur recherche allait les conduire; cette recherche a évidemment conduit les maîtres beaucoup plus loin.

Ce qui suit n'est donc pas un exposé déductif d'une théorie mathématique; le parti choisi pour la rédaction a été de mettre en évidence le cheminement de la recherche avec ses méandres et éventuellement ses impasses.

La situation est présentée comme la recherche d'un mode de construction de carrés magiques sous la forme suivante :

« Un carré magique est un tableau de n lignes et n colonnes. Dans chaque case, on écrit un nombre. Si l'on fait la somme des nombres de chaque ligne et chaque colonne, on trouve le même résultat ».

Il existe un mode de construction de carrés magiques d'ordre impair tels que l'on utilise une et une seule fois chacun des nombres de 1 à n^2. Voici l'ébauche d'un carré magique d'ordre 5 et d'un carré magique d'ordre 7 construits en utilisant cette règle. Pouvez-vous utiliser cette ébauche pour trouver la règle de construction?

		1	8	
23				
4	6		20	22
			21	3
			2	9

			1			
		7	9			
		8				
						4
				2		

7 et 20 ont été entourés pour indiquer qu'ils jouent un rôle spécial.

1. Recherches au sein du groupe de travail des maîtres (35 participants).

Les suggestions sont les suivantes :

a) Pour trouver le total d'une ligne ou d'une colonne d'un carré d'ordre 5, on fait la somme des nombres jusqu'à 25 et on divise par 5 :

$$325/5 = 65$$

Le nombre manquant dans la quatrième colonne est 14 et le nombre manquant dans la troisième ligne est 13.

b) Quelqu'un émet l'hypothèse que le nombre qui est au centre du carré est :

$$\frac{1 + n^2}{2}$$

Plusieurs remarques qui conduisent à des impasses sont dues au fait que le problème a été posé comme l'écriture d'un carré magique, ce qui conduit à l'idée de calculer.

c) On remarque les configurations :
dans le carré d'ordre 7 :

7	9
8	

dans le carré d'ordre 5 :

20	22
21	

d) 1 et 2 sont placés *de la même façon* dans les deux carrés.

e) On peut passer de 9 à 10 *comme* de 3 à 4 (carré d'ordre 5).

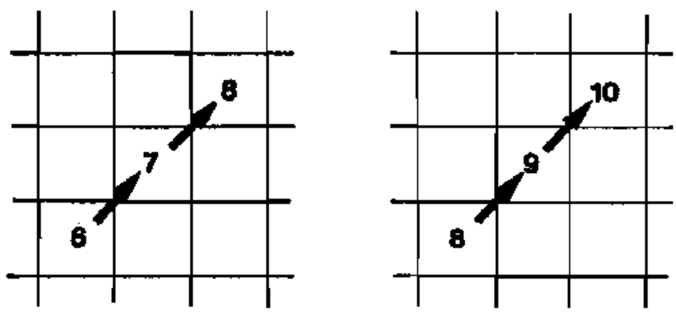
f) Le 5 dans le carré d'ordre 5 doit être placé par rapport au 1 *comme* le 7 par rapport au 1 dans le carré d'ordre 7.

On passe de 5 à 6 *comme* de 20 à 21 (carré d'ordre 5) et *comme* de 7 à 8 dans le carré d'ordre 7.

g) On doit entourer 10 et mettre 11 au-dessous car :

$$\begin{aligned} 5 &= 0 \quad \text{mod } 5 \\ 20 &= 0 \quad \text{mod } 5 \\ 10 &= 0 \quad \text{mod } 5 \\ 7 &= 0 \quad \text{mod } 7 \end{aligned}$$

h) Puisque l'on a 6, 7, 8 en diagonale dans le carré d'ordre 5, on a 8, 9, 10 en diagonale dans le carré d'ordre 7 et la personne propose de l'indiquer ainsi sur le schéma :



On voit se préciser un des « *comme* » énoncés précédemment. L'explicitation des « comme » va permettre la mathématisation de la situation.

A la fin de la séance de travail (une heure et demie), les participants ont explicité les règles suivantes :

1° 1 est placé au centre de la première ligne.

2° Quand c'est possible, le successeur d'un nombre est situé dans la colonne suivante et la ligne précédente.

3° Quand ce n'est pas possible, si le nombre est sur la première ligne, son successeur est dans la case inférieure de la colonne suivante, s'il est dans la dernière colonne, son successeur est dans la première case de la ligne précédente.

Les deux tableaux sont alors terminés; on construit alors le carré d'ordre 3.

On remarque que les règles sont indépendantes du fait que l'on a un carré magique et que l'on aurait pu trouver 13 et 14 (carré d'ordre 5) sans faire de calcul, les règles étant uniquement des règles de déplacements sur un quadrillage.

Aucun des participants ne cherche à savoir pourquoi ces règles permettent de construire un carré magique. Ils remarquent que l'information « *être un carré magique* » est perturbante. Ceux qui ont une classe de CM 2 décident d'essayer cet exercice avec leurs élèves.

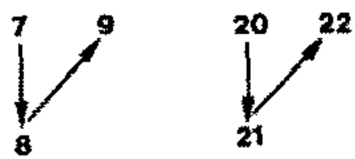
2. Recherche dans une classe de C.M.2 (28 élèves).

Le problème est posé de la façon suivante :

Écrire les nombres de 1 à 25 (ou de 1 à 49) dans les cases d'un carré en trouvant la règle qui a été utilisée pour écrire quelques-uns de ces nombres.

Les tableaux sont présentés exactement comme ils avaient été présentés aux maîtres.

Un enfant (Nathalie) remarque immédiatement que 7 8 9 *c'est comme* 20 21 22 et vient dessiner en vert des flèches indiquant ce qu'elle entend par « c'est comme ».



Un autre :

« 4-5 (carré d'ordre 7) cela doit être *comme* 3-4 et 22-23 sur l'autre carré (d'ordre 5). Il vient dessiner des flèches bleues allant de 3 à 4, de 22 à 23 (carré d'ordre 5), de 4 à 5 qu'il marque (carré d'ordre 7).

Un troisième remarque qu' « il doit y avoir une autre règle, celle qui fait passer de 1 à 2 dans les deux tableaux ». Il dessine des flèches rouges.

Quand on demande ce qui a été découvert, trois règles sont proposées :

« *la règle rouge* » : qualifiée de « verticale »
« *la règle bleue* » : qualifiée d' « horizontale »
« *la règle verte* » : en triangle.

Les choses se sont déroulées jusque-là beaucoup plus rapidement que dans l'équipe des maîtres. Les enfants ont immédiatement transformé le problème posé en un problème de déplacement sur un quadrillage.

Puis viennent les remarques suivantes :

« le 1 est à la même place dans le carré d'ordre 5 que dans le carré d'ordre 7, au milieu en haut ».

« Je peux mettre le 3 dans le carré d'ordre 7; 2, 3, 4 car les successeurs sont en diagonale. Ça c'est la règle jaune. »

« 10 est à côté de 1 dans le carré d'ordre 7. »

« Le 5 est au-dessus du 6. On peut faire la règle verte pour 5, 6, 7 » (dans le carré d'ordre 5).

« 10 obéit à la règle bleue. »

Un enfant remarque alors:

« Les règles, on ne peut pas les utiliser comme on veut, c'est la règle jaune la plus forte, si la règle jaune n'est pas possible on utilise les autres ».

Un autre remarque pour le carré d'ordre 5:

« Après 10 on ne peut faire ni jaune ni rouge ni bleu alors on fait vert ».

Alain entoure 10.

Benoît place 13, 14, 15, 16.

Valérie entoure 15.

Jean-Marie : « Maintenant on utilise la règle bleue ».

Nicolas : « Les règles sont dans cet ordre : jaune, rouge, bleu, vert ».

Les nombres entourés sont tous multiples de 5.

Le carré d'ordre 5 est achevé collectivement; la séance a duré une heure et demie.

En travail individuel, les enfants doivent compléter le carré d'ordre 7. Tous réussiront.

Dans le courant de la semaine, en travail spontané, des enfants se donnent des carrés et les remplissent suivant les règles découvertes.

L'un fera un carré d'ordre 15 (!)

Lors de la séance suivante plusieurs enfants d'une équipe viennent proposer d' « essayer de mettre le 1 ailleurs pour voir si les règles marchent encore ». Un autre suggère d'essayer avec un tableau qui n'a pas le même nombre de lignes et de colonnes.

On retient la première proposition. En travail individuel, chaque enfant doit utiliser les règles à partir du 1 placé comme il le désire. On constate expérimentalement que « les règles marchent ». Il faut expliquer pourquoi.

On fait numéroter les lignes et les colonnes de 0 à 4. On espère que les enfants, qui ont travaillé sur l'ensemble des entiers modulo 5, reconnaîtront une situation familière, mais il n'en est rien.

Lors de la séance de plein air suivant ce travail, on fera jouer les enfants à la « marelle modulo 5 ». Lorsque le travail sera repris sur les carrés, la correspondance entre les deux situations sera immédiate. Le problème est ainsi transposé en « déplacement sur un quadrillage modulo 5 ».

Les déplacements sont codés par des flèches → (augmenter de 1 le numéro de la colonne), ↓ augmenter de 1 le numéro de la ligne).

On s'aperçoit alors que les règles bleue, jaune, rouge sont, en fait, la même règle (1 → 4 ↓). Il ne reste donc plus que deux règles.

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Un enfant propose alors de changer les règles : on place 1 comme on veut, 2 comme on veut. Pour trouver 3 on passera de 2 à 3 comme on est passé de 1 à 2.

On trouve que l'on passe de 1 à 2 par (2 ↓ ; 2 →). On cherche 3, 4, 5 et on constate que le 6 vient sur le 1.

Un enfant propose de « passer de 5 à 6 comme on veut ». On continue et on constate que 11 vient sur 6.

On se donne alors la règle (verte):

$$1 \xrightarrow{v} 6$$

$$6 \xrightarrow{v} 11$$

Une fois le travail terminé, on a 5 classes de cases; les cases d'une classe étant reliées l'une à l'autre par des flèches jaunes.

Je demande alors pourquoi, en utilisant la règle jaune, le 6 vient sur le 1, puis quand on choisit une case pour le 6, le 11 vient sur la case du 6, etc.

Un enfant fait alors la remarque:

« C'est parce qu'on a fait 5 fois la même chose, c'est comme l'horloge » (référence à un travail fait sur les entiers modulo 4).

Remarque évidemment tout à fait pertinente.

En recherche individuelle des enfants chercheront à « répartir autrement les cases » c'est-à-dire à « se donner d'autres déplacements pour chacune des deux règles ».

Nous en resterons là dans cette classe. Le grand nombre d' « inventions » sur ce thème (recherche spontanée) met en évidence l'intérêt des enfants pour la situation proposée.

3. La suite du travail dans l'équipe des maîtres.

Au début de la deuxième séance, il est fait mention de ce qui avait été fait dans les classes où la situation avait été proposée et en particulier de l'idée des enfants de représenter les « règles » par des flèches de couleur.

Un participant remarque que « l'on a des translations »; il suggère de numéroter les colonnes de 0 à 4 de la gauche vers la droite et les lignes de 0 à 4 du haut vers le bas. On remarque alors que l'on a « même vecteur de translation pour passer de 1 à 2 ou de 2 à 3 » et qu'il faut faire un c lcul modulo 5 ce qui donne le tableau suivant :

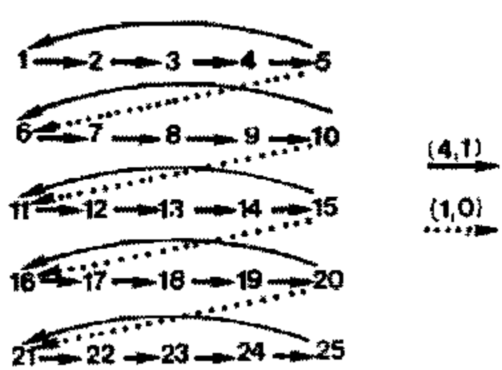
1	(0,2)	
		+(4,1)
2	(4,3)	
		+(4,1)
3	(3,4)	
		+(4,1)
4	(2,0)	
		+(4,1)
5	(1,1)	
		+(4,1)
	(0,2)	

Les participants remarquent que le 6 tombe dans la case du 1 parce que :

$$5.(4, 1) = (0, 0) \qquad (\text{mod } 5)$$

On remarque alors que dans la règle de construction précédente on passe de 5 à 6 par le vecteur (1, 0) qui de façon générale fait passer de $5k$ à $5k + 1$, k étant un entier inférieur à 5.

Quelqu'un propose alors le schéma suivant :



On remarque aussi que le vecteur (1, 0) fait correspondre 1 à 7, 2 à 8, etc...

Au point de la recherche, il apparaît préférable d'utiliser comme vecteur faisant passer d'un cycle au cycle suivant celui qui fait correspondre les nombres d'une même case modulo 5.

On obtient alors le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "+(4,1)"] \arrow[d, dashed, "+(2,4)"'] & 2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 3 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 4 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 5 \arrow[d, dashed] \\
6 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 7 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 8 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 9 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 10 \arrow[d, dashed] \\
11 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 12 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 13 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 14 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 15 \arrow[d, dashed] \\
16 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 17 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 18 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 19 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 20 \arrow[d, dashed] \\
21 \arrow[r] & 22 \arrow[r] & 23 \arrow[r] & 24 \arrow[r] & 25
\end{tikzcd}$$

Par convention :

On décide de nommer $\dashrightarrow$ vecteur de translation et $\rightarrow$ vecteur de décalage.

Il se pose alors une question :

Peut-on utiliser le même mode de construction en utilisant d'autres valeurs pour chacun des deux vecteurs?

On montre que :

1° toutes les cases jouent le même rôle : on peut donc placer 1 n'importe où

2° S'il s'agit uniquement de placer les 25 premiers nombres : le vecteur de translation peut être choisi arbitrairement, le vecteur de décalage doit être tel qu'il ne place pas le 6 dans une des cases déjà occupées.

— Si l'on veut obtenir un carré magique, il est nécessaire d'avoir un nombre de chaque « cycle » dans chaque ligne et chaque colonne.

En effet tout nombre peut être écrit sous la forme $5x + y$.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	$0 \times 5 + y$
1	6	7	8	9	10	$1 \times 5 + y$
2	11	12	13	14	15	$2 \times 5 + y$
3	16	17	18	19	20	$3 \times 5 + y$
4	21	22	23	24	25	$4 \times 5 + y$

$\rightarrow 5x + 1$

$\rightarrow 5x + 2$

Exemple :

6	19	2	15	23
22	10	18	1	14
13	21	9	17	5
4	12	25	8	16
20	3	11	24	7

tableau des x

1	3	0	2	4
4	1	3	0	2
2	4	1	3	0
0	2	4	1	3
3	0	2	4	1

tableau des y

1	4	2	5	3
2	5	3	1	4
3	1	4	2	5
4	2	5	3	1
5	3	1	4	2

Dans chaque ligne et chaque colonne, la somme est :

$$5 \times (0+1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) = 65$$

On cherche les vecteurs de décalage qui ne conviennent pas quand on choisit (4, 1) comme vecteur de translation.

En résumé :

On peut résoudre les deux problèmes suivants :

a) *Placer les nombres de 1 à 5 dans un carré de 5 × 5 en utilisant des règles du type précédent.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° Il n'y a pas de restriction pour le vecteur de translation $T = (m, n)$ à l'exception de (0, 0), donc 24 possibilités.

3° Le vecteur de décalage $D = (p, q)$ doit être tel que le 6 ne soit pas placé dans une des cases déjà numérotées (donc 20 possibilités).

Il y a donc $25 \times 24 \times 20 = 12\,000$ façons d'écrire les nombres de 1 à 25 dans un carré de 5×5 en utilisant les règles explicitées.

Explicitons la troisième condition :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "(m,n)"] \arrow[d, "(p,q)"'] & 2 \arrow[r, "(m,n)"] & 3 \arrow[r, "(m,n)"] & 4 \arrow[r, "(m,n)"] & 5 \\
6 & & & &
\end{tikzcd}$$

Il faut $(p, q) \neq \lambda(m, n)$, $\qquad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Dans notre façon de procéder, nous nous sommes d'abord intéressés à placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5, nous aurions pu tout aussi bien placer les nombres 1, 6, 11, 16, 21, c'est-à-dire utiliser *d'abord* le vecteur $D = (p, q)$.

De la même façon que précédemment, 2 ne doit pas être dans une case déjà numérotée :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{(p,q)}"] \arrow[d, "{(m,n)}"'] & 6 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 11 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 16 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 21 \\ 2 \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $(m, n) \neq \mu(p, q)$, $\quad \mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Les deux conditions précédentes peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

λ ou μ prenant l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

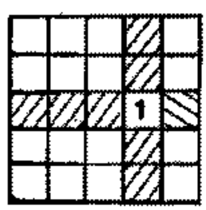
b) *Placer les nombres de 1 à 25 dans un carré de 5 × 5 de telle sorte que l'on trouve le même nombre pour la somme des nombres de chaque ligne et de chaque colonne.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° On choisit pour $T = (m, n)$ un couple qui ne place le 2 ni dans la ligne, ni dans la colonne du 1, c'est-à-dire :

$$m \neq 0 \quad \text{et} \quad n \neq 0$$

(16 possibilités)



3° D doit être tel que :

a) il n'y ait pas deux nombres dans la même case

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

b) le 6 ne doit être situé ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 c'est-à-dire :

$$p \neq 0 \quad \text{et} \quad q \neq 0$$

Les positions de 3, 4, 5 étant déterminées par le choix de la case du 1 et de T, il y a 12 possibilités de placer 6. Donc le nombre de carrés magiques est :

$$25 \times 16 \times 12 = 4\,800$$

4. Les participants vont alors soulever plusieurs problèmes.

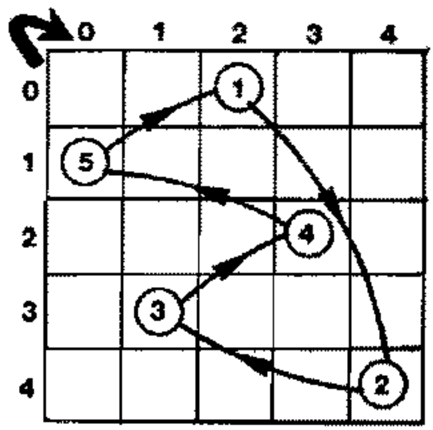
Premier problème :

Nous avons vu que le choix de T et de D engendre une partition des nombres de 1 à 25 en 5 classes : les nombres de 1 à 5, de 6 à 10, etc...

A chaque classe correspond un ensemble de 5 cases. Peut-on trouver d'autres couples (T, D) tels qu'à chaque ensemble de cases corresponde le même ensemble de nombres, mais ceux-ci étant répartis différemment?

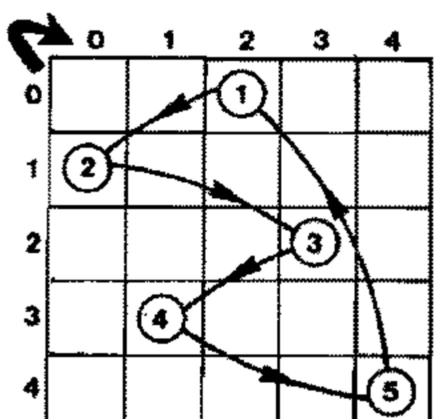
Le 1 est placé dans la case (0, 2), T = (4, 2) : on obtient pour la classe du 1 un certain ensemble A de cases :

A = {(0; 2), (1; 0), (2; 3), (3; 1), (4; 4)}.



Existe-t-il un autre vecteur de translation qui place les nombres de 1 à 5 dans l'ensemble A?

Un des participants propose la solution suivante :



On a la substitution :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Nous avons un vecteur de translation (m', n') tel que :

$$(m', n') + (m, n) = (0, 0)$$

ou

$$(m', n') = 4(m, n) \quad (\text{mod } 5)$$

On peut ainsi *calculer* le vecteur de translation de la solution 2 :

$$m' = 4m \quad (\text{mod } 5) \qquad n' = 4n \quad (\text{mod } 5)$$
$$m' = 1 \qquad\qquad n' = 3$$

Généralisation :

Elle revient à chercher s'il existe d'autres cycles qui permettent de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans l'ensemble A de cases.

Nous codons les cases comme précédemment.

1° Nous plaçons le 1 dans la case (0, 2).

Les multiples de (4, 2) permettent d'atteindre toutes les cases de A.

On peut ainsi placer 2, 3, 4, 5 de 4 façons différentes :

T	(0, 2)	(4, 4)	(3, 1)	(2, 3)	(1, 0)
(4, 2)	1	2	3	4	5
2. (4, 2)	1	4	2	5	3
3. (4, 2)	1	3	5	2	4
4. (4, 2)	1	5	4	3	2

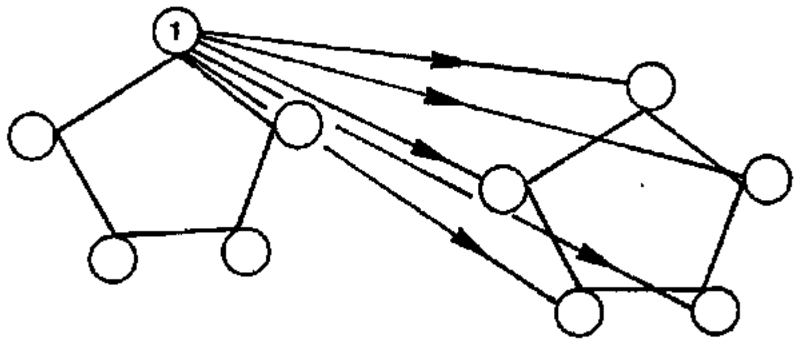
2° On aurait pu placer 1 dans n'importe laquelle des 5 cases.

Il y a donc (4×5) façons de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans les cases de A.

Les participants remarquent alors que si l'on choisit pour la solution 2 le même vecteur de décalage que pour la solution 1, on aura pour chaque cycle la substitution suivante :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 5x+1 & 5x+2 & 5x+3 & 5x+4 & 5x+5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 5x+1 & 5x+5 & 5x+4 & 5x+3 & 5x+2 \end{array}$$

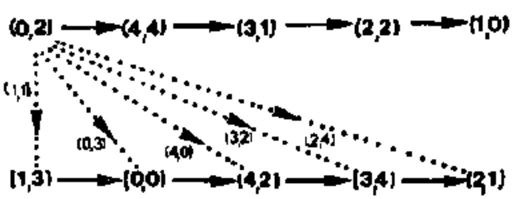
Il existe toutefois une solution plus générale : il suffit de placer le 6 dans l'une des cases affectées dans la solution 1 aux nombres de 6 à 10 (ensemble B); ce que nous schématisons de la façon suivante :



L'emplacement du 1 étant choisi parmi les cases de A, on peut choisir pour l'emplacement de 6 l'une des cases de B.

On a donc 5 vecteurs de décalage possibles.

Si l'on choisit de mettre 1 en (0, 2), T = (4, 2), D = (1, 1) pour la solution 1, nous aurons :



Si nous voulons obtenir un carré magique, il faut éliminer les vecteurs de décalage qui placent le 6 dans la ligne ou la colonne du 1, c'est-à-dire (4, 0) et (0, 3).

On peut généraliser.

On a obtenu une solution en choisissant 1 case de départ et deux couples $T = (m, n)$, $D = (p, q)$.

Les nombres de 1 à 5 sont répartis dans un ensemble A de cases, les nombres de 6 à 10 dans un ensemble B de cases.

Pour chaque répartition des nombres de la classe de 1 dans A on a un ensemble de vecteurs de décalage répartissant les nombres de la classe de 6 dans B :

$$\{D \mid D = (p, q) + \lambda(m, n)\} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Second problème :

Le mode de construction précédent convient-il pour la construction des carrés d'ordre pair?

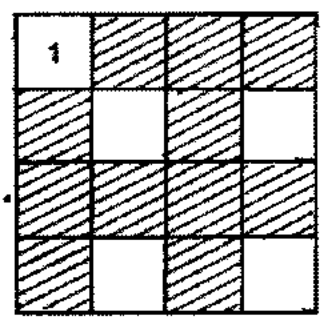
On fait un essai pour le carré d'ordre 4.

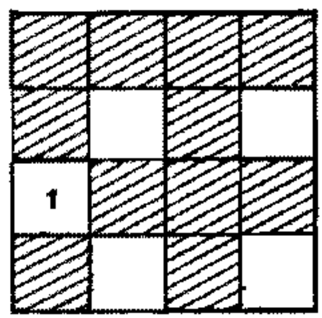
On choisit au hasard $T = (2, 1)$.

Cette solution est immédiatement rejetée car $(2, 1) \oplus (2, 1) = (0, 2)$; le 3 se trouvera donc placé dans la ligne du 1.

On remarque que pour tout vecteur de translation dont une des composantes est 2, il en sera de même car $2 \times 2 = 0 \pmod 4$.

Cela interdit de placer le 2 dans l'une des cases situées dans la ligne ou la colonne du 1 ou dans la ligne ou la colonne située à distance 2 de la ligne ou la colonne du 1.





Vecteur de décalage :

Le 5 ne doit se trouver ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 (0 dans une des composantes de D). Il doit en être de même pour 9, donc aucune des composantes de D ne doit être 2.

Les seules valeurs possibles pour D ou T sont donc :

$$(1, 1),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (3, 3)$$

Or

$$2(1, 1) = 2(1, 3) = 2(3, 1) = 2(3, 3)$$

La condition $\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq 0$ n'est donc pas réalisée pour $\lambda = \mu = 2$.

Il n'existe donc pas de possibilités de construire un carré magique d'ordre 4 avec les règles qui nous sont données. La raison en est que $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.

$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +, \times)$ est un corps si p est *premier ;* donc le mode de construction où l'on peut choisir T et D à volonté (à la condition que $\lambda(m, n) + \mu p(, q) \neq 0$) n'est donc valable que pour les carrés d'ordre *premier*.

Troisième problème :

Il existe des carrés magiques d'ordre non premier.

Exemples :

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

1	16	5	12
15	2	11	6
14	3	10	7
4	13	8	9

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Existe-t-il un mode de construction systématique?

Ce problème n'a pas été résolu au cours du travail dont le compte rendu est donné ici; une solution est proposée par Kordiemsky (Sur les sentiers des mathématiques II, page 40, Dunod); les participants s'y référeront.

Quatrième problème :

On reprend le problème tel qu'il était posé initialement. On peut construire un carré magique d'ordre impair en utilisant les règles suivantes :

1° la ligne 1 et la colonne 1 sont considérées comme suivantes de la ligne et de la colonne n.

2° On numérote 1 la case médiane de la ligne 1.

3° Pour toute case numérotée x ($x < n^2$), numérotez $x + 1$ la case de la ligne précédente et de la colonne suivante si elle n'est pas numérotée, la case de la ligne suivante et de la même colonne sinon.

Pourquoi cette règle est-elle valable même si le nombre impair n'est pas premier?

(Une solution a été proposée par Kordiemsky, même référence.)

5. A ce point du travail, on interrompt les investigations afin de tenter de dégager les idées mathématiques utilisées.

5. 1. — La construction de carrés magiques que nous venons de voir repose sur des propriétés des *vectoriels* qui vont être explicitées.

On reprend alors les axiomes d'un vectoriel :

On dispose d'un *corps* K d'éléments que nous appellerons a, b, c... (les scalaires) muni d'un élément unité e et un *groupe additif* V d'éléments que nous désignerons par x, y... (les vecteurs).

V constitue un espace vectoriel sur K si outre la loi additive vérifiant les axiomes 1 à 4.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$	associativité de l'addition des vecteurs
2. $x + y = y + x$	commutativité de l'addition des vecteurs
3. $x + \hat{o} = \hat{o} + x = x$	élément neutre unique de l'addition des vecteurs $\hat{o}$ (0, 0)
4. $x' + x = x + x' = \hat{o}$	symétrique unique de chaque élément

il existe une loi externe à opérateurs dans K vérifiant les axiomes 5 à 8 :

5. $ex = x$

6. $a(x + y) = ax + ay$ « distributivité » par rapport à V

7. $(a + b)x = ax + bx$ « distributivité » par rapport à K

8. $a(bx) = (ab)x$ « associativité » de la multiplication externe

Pour le carré d'ordre 3, nous avons :

1° le corps : les entiers modulo 3 (N_3, +, ×).

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2° Le groupe des vecteurs :

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)					
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)				
(0,2)	(0,2)								
(1,0)				(2,0)					
(1,1)									
(1,2)									
(2,0)									
(2,1)									
(2,2)									

On construit entièrement cette table.

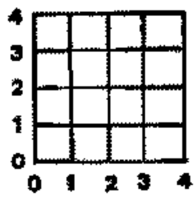
On vérifie les axiomes de la structure d'espace vectoriel; cela est l'occasion de faire des calculs.

On pourrait faire des calculs analogues pour le carré d'ordre 5.

On revient au problème proposé. Il est équivalent au problème suivant :

On part de l'ensemble des entiers modulo 5 que nous désignons par N_5. Nous pouvons définir sur cet ensemble l'addition modulo 5 qui munit l'ensemble N_5 de la structure de groupe commutatif.

Les éléments de $P = N_5 \times N_5$ peuvent être représentés par les nœuds d'un quadrillage que nous appelons des *points* $p_i = (x_i, y_i)$.



Choisir $T = (m, n)$ consiste à définir une bijection de P dans P : à chaque point p_1 de P correspond, par (m, n) un et un seul point p_2 de P :

$$p_1 = (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \xmapsto{(m,n)} (x_1 + m, y_1 + n)$$

Il en est de même pour D.

Il y a 25 bijections possibles qui constituent un ensemble V d'éléments parmi lesquels on choisit $T = (m, n)$ et $D = (p, q)$.

T et D ne peuvent pas être choisis de façon indépendante.

Ils doivent respecter la condition :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

ce qui s'exprime en disant que T et D sont *linéairement indépendants.*

Si par exemple nous choisissons $T = (1, 4)$ et $D = (2, 3)$, nous constatons que l'on peut, partant d'un point, atteindre 5 points seulement.

Dans cet exemple, en effet, $T + 2D = (0, 0)$.

Choisissons (m, n) et (p, q) *linéairement indépendants.*

On peut à partir de $(0, 0)$ engendrer tous les points.

Partant d'un point quelconque, on peut atteindre n'importe quel point par une combinaison linéaire de D et T.

On dit que (m, n) et (p, q) forment une *base.*

Exercice d'application :

Dans un carré magique d'ordre 5, on sait que le 6 est placé dans la case (1, 3), que T = (2, 3), que D = (1, 2).

Quel est le nombre placé dans la case (2, 1) ?

Puisque l'on peut passer de la case (1, 3) à la case (2, 1) par une suite de vecteurs (m, n) et de vecteurs (p, q), on peut écrire :

$$(1, 3) + \alpha(2, 3) + \beta(1, 2) = (2, 1)$$

On a donc :

$$1 + 2\alpha + \beta = 2$$
$$3 + 3\alpha + 2\beta = 1$$

La résolution de ce système d'équations donne la solution.

Il existe d'autres bases parmi lesquelles l'une est appelée *base canonique*. Elle correspond aux vecteurs (1, 0) et (0, 1).

5.2 Dans le travail fait dans la phase de recherche, certaines questions qui se sont posées consistent, en fait, à construire une géométrie finie (affine).

Pour un carré magique d'ordre n (n premier) nous avons une géométrie à n^2 points.

Nous allons étudier un peu en détail la géométrie à 9 points (carré d'ordre 3).

Choisissons un couple de vecteurs linéairement indépendants :

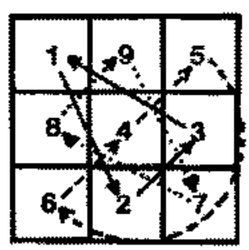
$$T = (1, 1) \qquad D = (0, 2)$$

Nous avons trois « cycles » :

cycle ——— 1, 2, 3

cycle ——— 4, 5, 6

cycle 7, 8, 9



Chaque cycle est une « *droite* » de 3 points.

L'ensemble de ces trois droites forme une *direction*.

Chaque direction correspond à une partition des points en trois classes.

Chaque classe est une droite.

Il s'agit de chercher quelles sont toutes les partitions en trois classes possibles (c'est-à-dire chercher toutes les directions).

On obtient ainsi :

1re direction	: A = {1, 2, 3}	B = {4, 5, 6}	C = {7, 8, 9}
2e direction	: D = {1, 4, 7}	E = {3, 6, 9}	F = {2, 5, 8}
3e direction	: G = {1, 5, 9}	H = {3, 4, 8}	I = {2, 6, 7}
4e direction	: K = {1, 6, 8}	L = {2, 4, 9}	M = {3, 5, 7}

Nous venons ainsi de construire une géométrie dans laquelle les axiomes d'incidence de la géométrie du plan sont vérifiés :

— Un point est incident à plusieurs droites.

Exemple :

1 est incident à A, D, G, K ; chaque point de notre géométrie est incident à quatre droites (une de chaque direction).

— Une droite est incidente à plusieurs points.

— Deux points distincts sont incidents à une droite au plus, une droite au moins, c'est-à-dire que chaque couple de points distincts détermine une droite : on peut dire sans ambiguïté : la droite (3, 4).

— Deux droites distinctes sont incidentes à un point au plus :

• zéro point si les droites appartiennent à la même direction ;

Exemple :

$$\{1, 2, 3\}, \qquad \{7, 8, 9\}$$

• un point si les droites appartiennent à des directions différentes ;

Exemples :

$\{4, 5, 6\}$ et $\{3, 5, 7\}$ sont incidentes à 5 :

$$\{4, 5, 6\} \cap \{3, 5, 7\} = \{5\}$$

• deux droites qui n'appartiennent pas à la même direction « se coupent » en un point.

— Toute droite appartient à exactement une direction.

— Une direction est formée de plusieurs droites.

De façon générale, une géométrie à n^2 points comporte $(n + 1)$ directions de n droites de n points.

On établit le tableau suivant :

n	Nombre de points	Nombre de directions	Nombre de droites d'une direction	Nombre de points d'une droite
n	n^2	$(n+1)$	n	n
3	9	4	3	3
5	25	6	5	5
7	49	8	7	7
11	121	12	11	11

Le premier problème du paragraphe 4 consiste à choisir un ordre sur les droites; nous n'avons pas traité de façon générale cette question.

Certains des participants entreprirent un travail personnel sur la géométrie à 25 points.

Ce qui avait été vu précédemment met en lumière le fait qu'il n'y a pas de géométrie à 16 points, définie de cette façon.

Problème

Trouvez les *auteurs* des trois textes suivants :

1. « ... et ce sera pour moi l'occasion de préciser et en quelque sorte de justifier l'esprit et la tendance des mathématiques modernes.

Il semble en effet à bien des observateurs superficiels qu'il y ait un abîme entre les mathématiques telles qu'on les comprend aujourd'hui et telles qu'on les comprenait il y a cent ans. Les mathématiques, à les en croire, seraient devenues une science de curiosité dépourvue de tout objet réel, un jeu d'esprit, dont le seul intérêt serait la difficulté et dont les efforts ne sauraient contribuer d'aucune manière à l'étude rationnelle de l'Univers. Peut-être les considérations qui vont suivre suffiront-elles à montrer qu'un tel jugement est dénué de profondeur, que le développement actuel des mathématiques est une évolution nécessaire et que l'intelligence la moins abstraite, la plus éprise de réalité, qui chercherait à perfectionner les sciences exactes en vue d'applications importantes, ne pourrait guère suivre d'autre voie que celle où l'on s'est engagé aujourd'hui... »

2. « ... Les I.R.E.M., comme l'Inspection Générale, comme tous les professeurs font tout ce qui est en leur pouvoir pour que le renouveau de l'enseignement des mathématiques contribue à une meilleure formation des élèves. Nous souhaitons que l'Association des Professeurs de Mathématiques s'associe à cet effort... »

3. « ... la pornographie, la drogue, la désintégration de la langue française, le bouleversement de l'enseignement des mathématiques, la mise en question constante de toute forme d'autorité relèvent d'un même processus : atteindre la société libérale dans ses centres vitaux... »

Vous trouverez la réponse dans le prochain Bulletin...

Le naturel a horreur du vide (Aphorisme)

Madame A.M. Bardi,
I.R.E.M., de Paris.

Voici deux systèmes de numération nouveaux, *des systèmes sans zéro.* Nous rappellerons d'abord les règles de la numération décimale habituelle et celles du système binaire. Puis nous étudierons ces systèmes sans zéro et vous proposerons des opérations à effectuer selon les techniques habituelles mais sans le secours de nos mécanismes mis en défaut ici. Nous serons dans la situation de nos élèves et toutes les difficultés que nous éprouverons, ils les ressentent personnellement. Alors aidons-les, aidons-nous. Nous proposons des dispositions pratiques, claires, utilisables dans les calculs courants et qui devraient être d'un grand secours pour nos élèves.

Deux remarques :

- L'étude de ces systèmes de numération n'est pas destiné aux élèves mais aux maîtres.
- Les solutions des exercices ainsi que les dispositions de calcul sont proposées à la fin de cet article.

A. Quelques systèmes connus.

I. — *Utilisant les lettres de l'alphabet français :*

Chaque nombre est caractérisé par un assemblage de lettres; par exemple : deux, onze, quatre-vingt treize.

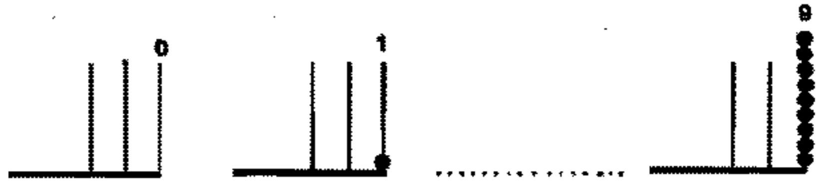
Nous désignerons ici tous les nombres par leur écriture dans ce système.

II. — *Utilisant les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* (système décimal habituel) :

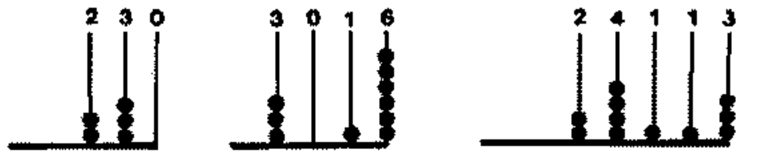
Chaque nombre est caractérisé par une suite de tels symboles : par exemple :
142 pour cent quarante deux;
3 075 pour trois mille soixante quinze.

Certaines suites, comme 0012, 00704, ne sont pas utilisées.

Des règles permettent de trouver quel nombre est représenté par une suite donnée; on peut illustrer cela à l'aide d'un boulier (socle supportant des tiges verticales sur lesquelles on enfile des boules).



zéro un neuf



deux cent trente trois mille seize vingt quatre mille cent treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules : 3 dans 230, 3 016, 24 113.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle on doit enfiler les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche elle représente un, dix, cent, mille, dix mille...

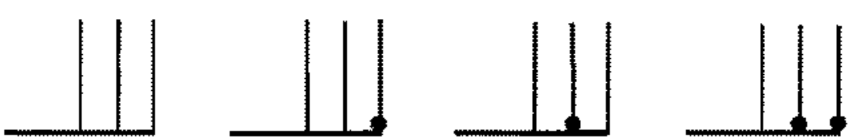
— Il y a au plus neuf boules sur une tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant à leur gauche au moins une tige occupée.

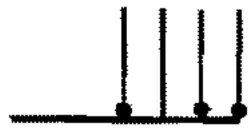
III. — *Utilisant les symboles 0, 1* (système binaire habituel).

Chaque nombre est caractérisé par une suite de tels symboles par exemple 1101 pour treize, 1001 pour neuf... Certaines suites, comme 011, 00010... ne sont pas utilisées.

Des règles très proches des précédentes permettent de trouver quel nombre est représenté par une suite donnée; reprenons le boulier



zéro un deux trois



treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle placer les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche, elle vaut un, deux, quatre, huit, seize...

— Il y a au plus une boule sur chaque tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant au moins une tige pleine à leur gauche.

B. Une nouvelle écriture à deux symboles.

Nous utiliserons les symboles a et b.

Chaque nombre sera caractérisé par une suite de tels symboles, suite que nous appellerons un mot. Mais ici nous accepterons toutes les suites possibles.

Aidons-nous d'un arbre pour les obtenir toutes (voir figure page 42).

Convenons que a représente *un*
que b représente *deux*
que aa représente *trois*
que ab représente *quatre*

...et ainsi de suite en suivant, sur l'arbre, le chemin indiqué par la flèche.

Ainsi deux mots différents représentent des nombres différents.

Nous allons essayer de répondre à quelques questions simples, à propos de cette écriture.

I. — *Comment s'écrit « le suivant »?*

Ou, sachant qu'un nombre est représenté par le mot m, peut-on savoir par quel mot est représenté le nombre suivant (sans avoir à construire l'arbre jusqu'à m et au-delà de m)?

Par abus de langage, nous parlerons du mot suivant de m et nous le noterons m^*.

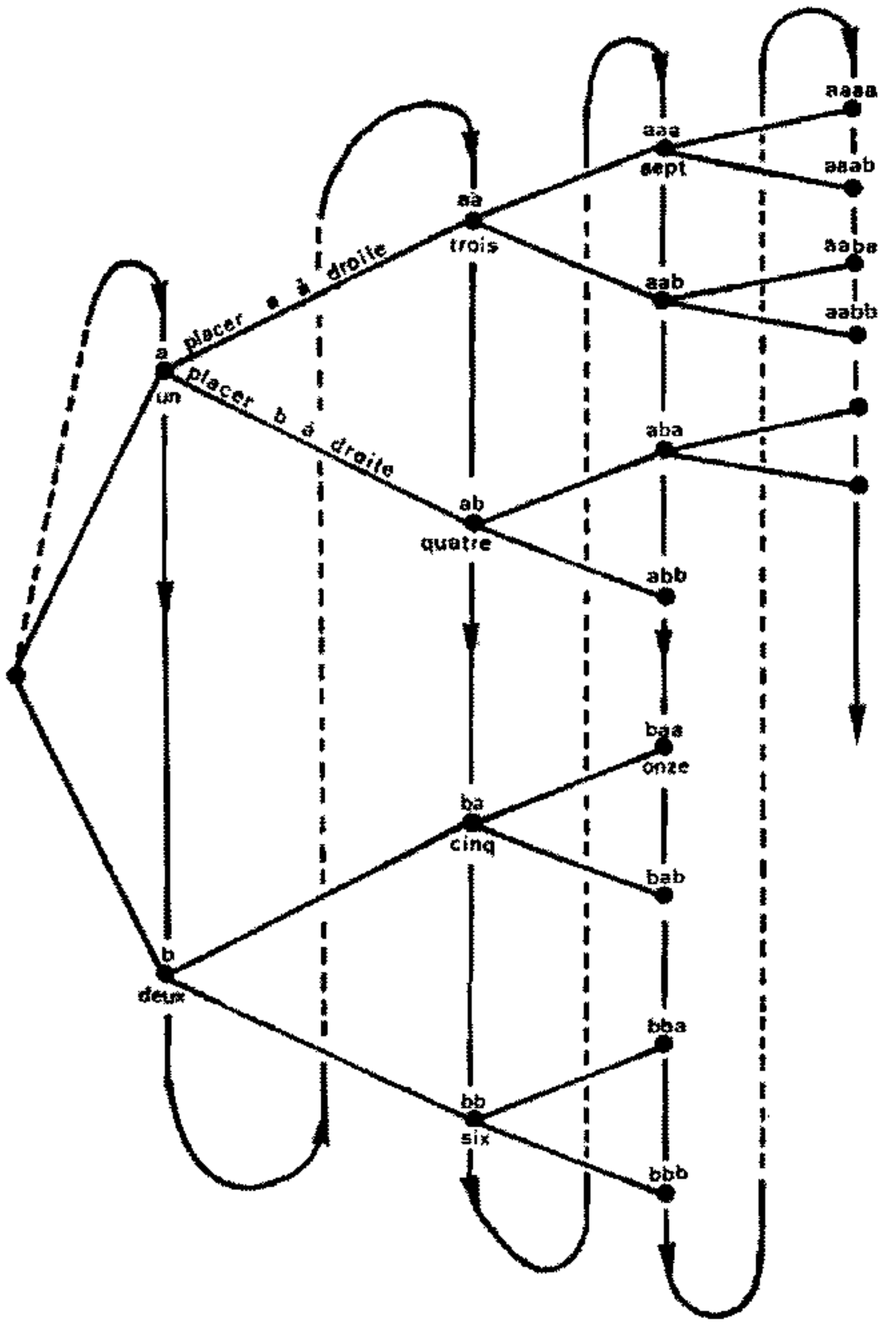
Regardons l'arbre :

1) *Si le mot* m *se termine par* a :

Exemple : si $m = aba$ alors le suivant $m^* = abb$
si $m = baa$ alors $m^* = bab$,

En général si $m = m'a$ alors $m^* = m'b$

(on remplace la dernière lettre par b et on ne change pas ce qui était avant a).


aaaa
aaab
aaba
aabb
aaa
sept
aab
aba
abb
baa
onze
bab
bba
bbb
aa
trois
ab
quatre
ba
cinq
bb
six
a
un
b
deux
placer a à droite
placer b à droite

2) *Si le mot* m *se termine par* b :

Exemple : si $m = ab$ alors $m^* = ba$

si $m = bab$ alors $m^* = bba$

En général, si $m = m'b$ alors $m^* = (m')^*a$

(on remplace b par a et ce qui était avant b, m', par son suivant).

Autre exemple :

$m = babb$

$$m^* = (bab)^*a \quad = \underbrace{(ba)^*}_{\text{on réapplique la même règle}} aa \quad = \underbrace{bb}_{\text{première règle}}aa$$

Exercices :

Déterminer le suivant de *abba*, de *aabaa*, de *baab*, de *abb* et de *abbb*.

II. — *Quel est le nombre le plus grand?*

Ou comment comparer deux nombres connus par leur écriture dans ce système (par abus de langage on dira que le mot m est plus grand que le mot m' si m représente un nombre plus grand que m').

Là encore regardons l'arbre.

1) *Si les mots ont des longueurs différentes*, le plus long est le plus grand.

Exemple : $aaaba > abba$

$bbb < aaba$

2) *Si les mots ont même longueur :* le premier dans l'ordre alphabétique est le plus petit.

Exemples : $ab < ba$ (car a avant b)

$aabb < abab$ (car a avant b)

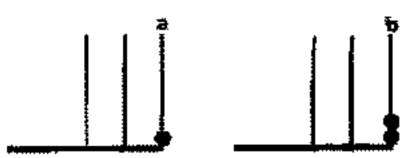
Exercices :

Classer les mots *aba*, *abb*, *ab*, *baa*, *aabb*.

III. — *Quel nombre est représenté par le mot* bbab?

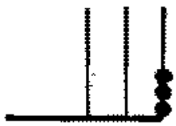
Ou, peut-on trouver à quel nombre correspond un mot sans fabriquer l'arbre jusqu'à ce mot et écrire la correspondance? Qui se cache derrière *bbabab?* Nous ne pouvons pas envisager de prolonger l'arbre assez pour rencontrer ce mot mais est-il possible de le démasquer?

Reprenons le boulier et représentons ainsi

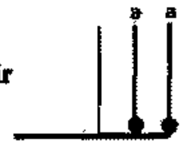


un deux

- *On passe de un à deux* en ajoutant une boule sur la tige de droite.
- *Faisons de même pour passer de deux à trois.* On obtiendrait :



or nous devons avoir

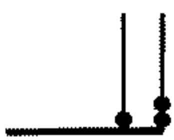


trois

Il n'y a pas contradiction si l'on convient que deux boules sur la dernière tige peuvent être remplacées par une sur l'avant-dernière tige :

- *Ajoutons un* en plaçant à nouveau une boule sur la dernière tige.

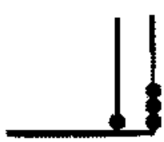
On obtient



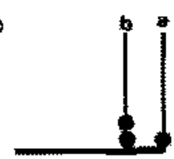
qui peut s'écrire *ab* et représente bien quatre.

- *Ajoutons encore une boule.*

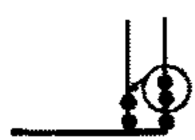
On obtient



mais cinq s'écrit *ba* qui se représente :

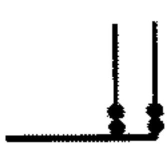


Là encore il n'y a pas contradiction si l'on convient de remplacer deux boules de la dernière tige par une de l'avant-dernière :



- *Ajoutons une boule.*

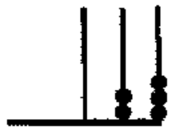
On obtient



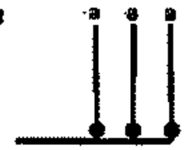
qui peut s'écrire *bb* et représente six

• *Ajoutons une boule.*

On obtiendrait



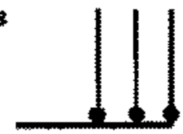
alors que sept s'écrit *aaa* soit :



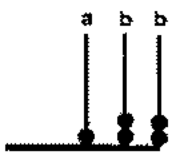
Utilisons notre convention :

devient

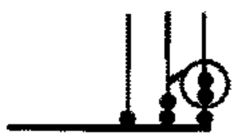
et, si nous recommençons



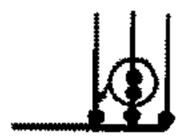
Pouvons-nous trouver le suivant de abb *à l'aide de ces conventions?*



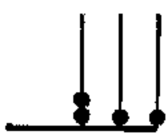
suivant de *abb*



qui devient



puis



donc *baa*, ce qui est bien confirmé par l'arbre.

Ainsi dans notre système :

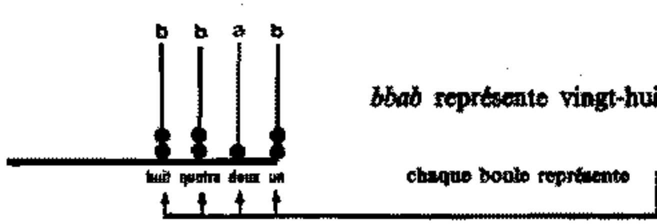
* *a* représente toujours une boule et *b* deux boules.

* La position d'une lettre indique sur quelle tige placer la ou les boules correspondantes.

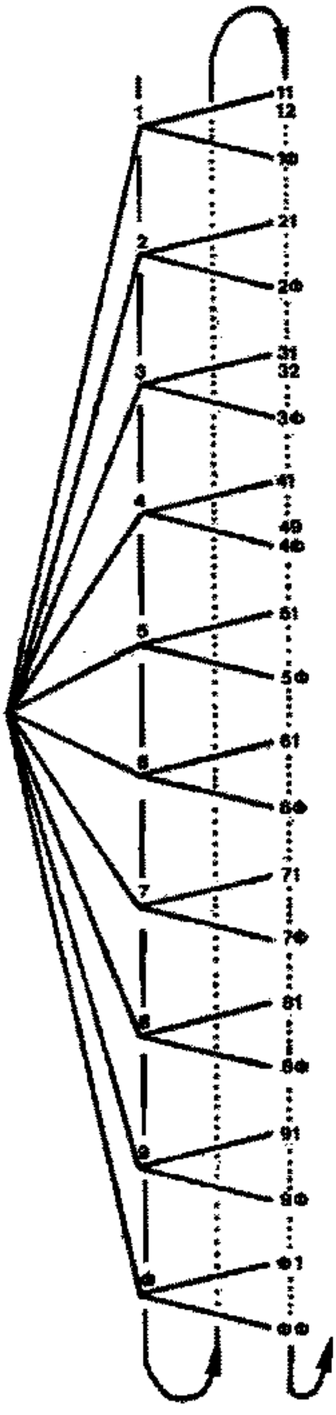
* Une boule représente deux boules de la tige qui est à sa droite et ainsi, successivement, elle représente un, deux, quatre, huit, seize...

* *Il n'y a jamais de tige vide.*

Peut-on trouver qui est caché derrière bbab?



bbab représente vingt-huit



Exercice :

Quel nombre représente *bbabab ?* *bbaab ?*

Écrire le nombre trente et un dans ce système.

Quelques remarques :

1) On aurait pu utiliser les symboles 1 (pour *a*) et 2 (pour *b*).

Ainsi vingt-huit s'écrit 2212 et sept s'écrit 111.

2) Cette écriture est très économique, plus que l'écriture « à base deux » habituelle : ainsi avec trois places on écrit *bbb* (ou 222) qui représente quatorze alors que 111 (base deux habituelle) représente sept.

3) Il resterait à parler des opérations et à voir si, connaissant deux nombres par leur écriture il est possible de trouver l'écriture de leur somme, de leur différence, de leur produit. Nous vous proposons ce travail en exercice, nous réservant de le traiter dans le cas plus familier de l'écriture à dix symboles.

Exercices :

• Écrire *baab* (ou 2112) dans le système binaire habituel (on pourra s'aider du boulier). Quel nombre représente-t-il?

• Dresser la table d'addition des mots de une lettre (*a* et *b*), l'utiliser pour calculer *babb* + *bab*.

• Dresser la table de multiplication des mots de une lettre et l'utiliser pour calculer *babb* × *ba*.

C. Le même principe... Avec dix symboles.

Nos symboles seront 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ϕ.

Chaque nombre sera caractérisé par une suite de tels symboles et toutes les suites seront autorisées.

Construisons l'arbre ci-contre les donnant toutes.

Convenons que :

1 caractérise un
2 caractérise deux

ϕ caractérise dix
11 caractérise onze

1ϕ caractérise vingt
...et ainsi de suite en suivant sur l'arbre le chemin indiqué par la flèche.
Reprenons rapidement les mêmes problèmes.

I. — *Quel est le suivant?*

$$1^* = 2; \quad 2^* = 3; \quad 3^* = 4; \ldots$$
$$8^* = 9; \quad 9^* = \phi; \quad \phi^* = 11$$

1) *Si le mot n'est pas terminé par ϕ :*

Exemple : $m = 87$, alors $m^* = 88$
$m = 89$, alors $m^* = 8\phi$

En général : si x est la dernière lettre de m et si $x \neq \phi$

$$m = m'x \quad \text{et} \quad m^* = m'x^*$$

2) *Si le mot est terminé par ϕ :*

Exemple : $m = 8\phi$ alors $m^* = 91$
En général : si $m = m\phi$ alors $m^* = (m')^*1$
Autre exemple : $m = 2\phi\phi$ alors $m^* = (2\phi)^*1 = 2^*11 = 311$

Exercices :

Quel est le suivant de 47ϕ? de $\phi\phi7$? de $5\phi\phi\phi$?

II. — *Quel est le plus grand?*

— $1 < 2 < 3 < 4 \ldots < 8 < 9 < \phi$

— *Si deux mots n'ont pas la même longueur* le plus long est le plus grand.

— *Si deux mots ont même longueur* l'ordre est le même que celui des premiers symboles différents à partir de la gauche.

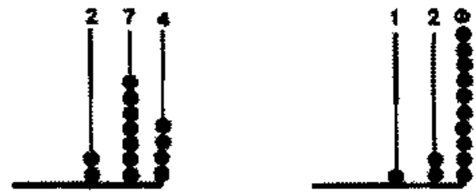
Exemple : $2\phi5 < 7\phi\phi$ car $2 < 7$
$2874 < 289\phi$ car $2 = 2$, $8 = 8$, $7 < 9$.

Exercices :

Comparer $2\phi\phi9$, $2\phi93$ et $\phi14$.

III. — *Que représente un mot donné?*

Reprenons le boulier. Les règles sont de même nature que celles du système à deux symboles.



deux cent soixante-quatorze cent trente

Une boule représente, selon la tige sur laquelle elle est placée, de droite à gauche, un, dix, cent, mille...

Sur chaque tige il y a de une à dix boules. *Il n'y a pas de tiges vides* ayant une tige au moins occupée à leur gauche.

Exercices:

Écrire dans le système à base dix habituel $2\phi\phi$, $\phi 7\phi$.

Écrire dans ce nouveau système cent soixante, cinq cents.

Quel nombre est représenté par $7\phi 1$?

IV. — *Additions et soustractions:*

Ou comment trouver l'écriture de la somme de deux nombres?

Il est facile de dresser une table d'addition pour les nombres représentés par un seul symbole :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11
2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12
3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13
4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14
5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15
6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16
7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17
8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18
9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1ϕ

Calculer :

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 9 \\ +\ 4\ 4\ 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ 8\ \phi \\ +\ 3\ \phi\ 2 \\ \hline \end{array}$$

La même table peut-elle être utilisée pour effectuer des soustractions?

$$\begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\ 8\ 7\ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\ 4\ \phi\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phi\ 6\ \phi\ 7\ 8 \\ -\ 9\ 7\ 8 \\ \hline \end{array}$$

V. — *Multiplications et divisions :*

On peut, de la même manière, dresser la table de multiplication pour les nombres représentés par un symbole.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
2	2	4	6	8	ϕ	12	14	16	18	1ϕ
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2ϕ
4	4	8	12	16	1ϕ	24	28	32	36	3ϕ
5	5	ϕ	15	1ϕ	25	2ϕ	35	3ϕ	45	4ϕ
6	6	12	18	24	2ϕ	36	42	48	54	5ϕ
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	6ϕ
8	8	16	24	32	3ϕ	48	56	64	72	7ϕ
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	8ϕ
ϕ	ϕ	1ϕ	2ϕ	3ϕ	4ϕ	5ϕ	6ϕ	7ϕ	8ϕ	9ϕ

Calculer :

$$\begin{array}{r} 3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi \\ \times\ 8\ 9 \\ \hline \end{array}$$

Calculer :

$$\begin{array}{r|l} 2\ 6\ \phi\ \phi\ 8\ \phi\ 7 & 2\ \phi\ 9 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Solution des exercices.

B. Une nouvelle écriture à deux symboles.

I. — *Détermination du suivant :*

$m = abba$	première règle	$m^* = abbb$
$m = aabaa$	première règle	$m^* = aabab$
$m = baab$	seconde règle	$m^* = (baa)^*\, a = baba$
$m = abb$	seconde règle	$m^* = (ab)^*\, a = (a)^*\, aa = baa$
$m = abb$	seconde règle	$m^* = (abb)^*\, a = baaa$ (d'après l'exercice précédent)

II. — *Quel est le plus grand?*

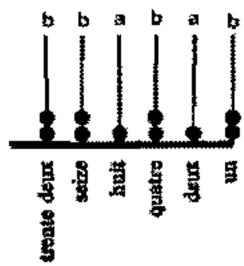
ab, le plus court, est le plus petit; *aabb* est le plus grand.
Classons les mots de trois lettres par ordre alphabétique :

$$aba < abb < baa$$

$$ab \;< aba < abb < baa < aabb$$

III. — *A quel nombre correspond un mot?*

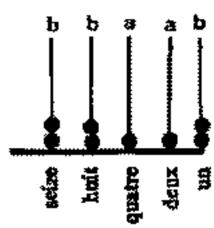
• *bbabab* = Avec le boulier.



Chaque boule représente :

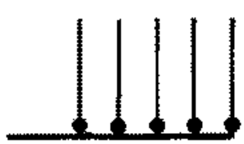
et *bbabab* représente cent seize.

• *Même travail abec* bbaab.



Chaque boule représente :
et *bbaab* représente cinquante six.

• *Écrire trente et un :*

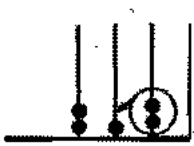
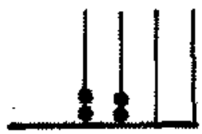
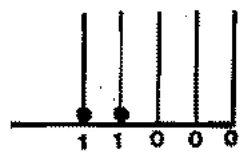


aaaaa

IV. — *Opérations et exercices proposés dans les remarques.*

• *Écrire* baab (ou 2 1 1 2) dans le système binaire habituel :

Cette fois il ne doit jamais y avoir deux boules sur la même tige, mais on accepte des tiges vides.

 qui devient  puis 

et qui représente vingt-quatre.

• *Table d'addition :*

+	a	b
a	b	aa
b	aa	ab

$$\begin{array}{ccccc}
 & a & a & a & \\
 & b & a & b & b \\
+ & & b & a & b \\
\hline
a & a & b & b & b
\end{array}$$

(soit vingt-six + douze = trente-huit)

• *Table de multiplication :*

×	a	b
a	a	b
b	b	ab

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & b & a & b & b \\
 & & & \times & & b & a \\
\hline
 & & & b & a & b & b \\
 & b & a & b & a & b & . \\
\hline
a & a & a & a & a & b & b
\end{array}$$

soit vingt-six × cinq = cent trente

Il est impossible dès à présent, de calculer de tête et nous sommes obligés de calculer à part les additions de retenues. Nous exposerons plus loin la présentation qui peut éviter ces difficultés.

C. Le même principe avec dix symboles.

I. — *Quel est le suivant?*

Le suivant de $4\ 7\ \phi$ est $4\ 8\ 1$ (seconde règle).

Le suivant de $\phi\ \phi\ 7$ est $\phi\ \phi\ 8$ (première règle).

Le suivant de $5\ \phi\ \phi\ \phi$ est $(5\ \phi\ \phi)^*\ 1 = (5\ \phi)^*\ 1\ 1 = 5^*\ 1\ 1\ 1$
$= 6\ 1\ 1\ 1.$

II. — *Quel est le plus grand?*

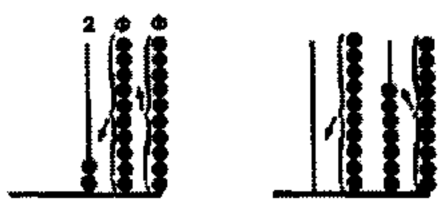
$$\phi\ 1\ 4 < \quad 2\ \phi\ 9\ 3 < \quad 2\ \phi\ \phi\ 9$$

III. — *Reconnaître un nombre :*

$2\ \phi\ \phi$ s'écrit dans le système à base dix habituel $3\ 1\ 0$.

$\phi\ 7\ \phi$ s'écrit $1\ 0\ 8\ 0$.

On peut s'aider du boulier :



Cent soixante s'écrit $1\ 5\ \phi$.

Cinq cents s'écrit $4\ 9\ \phi$.

$7\ \phi\ 1$ représente huit cent un.

IV. — *Additions et soustractions :*

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 3 & 9 \\ + & 4 & 4 & 1 \\ \hline & \phi & 7 & \phi \end{array} \qquad \text{car } \begin{array}{l} 9 + 1 = \phi \\ 3 + 4 = 7 \\ 6 + 4 = \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & & 1 & \\ & 7 & \phi & 8 & \phi \\ + & & 3 & \phi & 2 \\ \hline & 8 & 4 & 9 & 2 \end{array} \qquad \text{car } \begin{array}{l} \phi + 2 = 12 \\ 8 + 1 + \phi = 19 \\ 1 + \phi + 3 = 14 \\ 7 + 1 = 8 \end{array}$$

Pour faire une soustraction, il est bien préférable que des additions, pour lesquelles nous possédons une table. Nous l'explicitons ici.

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & \phi & \phi & 3 \\ - & & 8 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

	$5 + . = 3$ impossible;
	$5 + . = 13$ solution 8, retenue 1
$7 + 1 = 8$	$8 + . = \phi$ solution 2
	$8 + . = \phi$ solution 2

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & \phi & \phi & 3 \\ - & & 4 & \phi & 3 \\ \hline & 7 & 5 & 9 & \phi \end{array}$$

	$3 + . = 3$ impossible;
	$3 + . = 13$ solution ϕ, retenue 1
$\phi + 1 = 11$	$11 + . = \phi$ impossible
	$11 + . = 1\phi$ solution 9, retenue 1
$4 + 1 = 5$	$5 + . = \phi$ solution 5

$$\begin{array}{rccccc} & \phi & 6 & \phi & 7 & 8 \\ - & & & 9 & 7 & 8 \\ \hline & \phi & 5 & \phi & 9 & \phi \end{array}$$

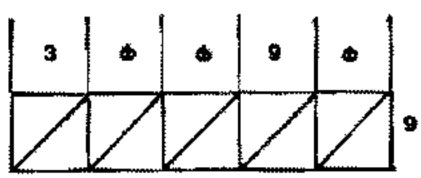
	$8 + . = 8$ impossible;
	$8 + . = 18$ solution ϕ, retenue 1
$7 + 1 = 8$	$8 + . = 7$ impossible;
	$8 + . = 17$ solution 9, retenue 1
$9 + 1 = \phi$	$\phi + . = \phi$ impossible;
	$\phi + . = 1\phi$ solution ϕ, retenue 1

V. — *Multiplications et divisions.*

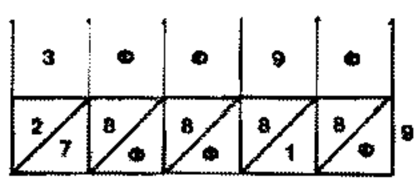
Multiplications :

Pour ne pas avoir à effectuer dans le même temps des multiplications et l'addition des retenues, nous présenterons nos calculs ainsi *.

Pour multiplier $3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi$ par 9, nous préparons le tableau suivant :

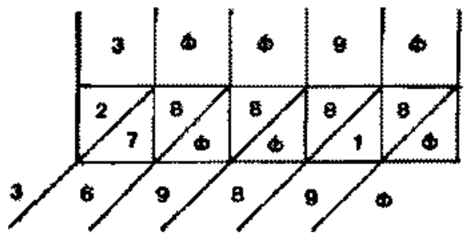


Puis nous remplissons chaque case par le résultat connu ou lu dans la table et ceci dans un ordre absolument quelconque.

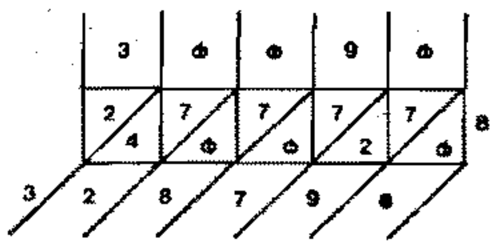


(*) Ces dispositions sont proposées dans les cahiers sur l'enseignement élémentaire de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Puis nous additionnons « en diagonale ».



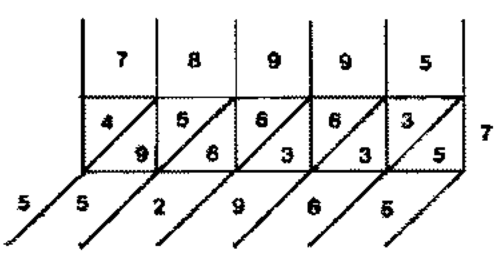
Recommençons pour (3 ϕ ϕ 9 ϕ) $\times$ 8.



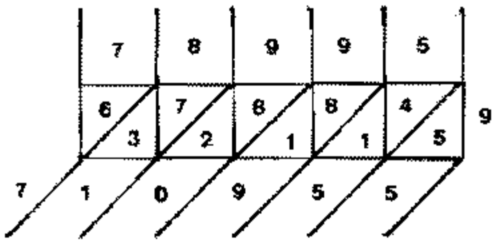
Ainsi :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & \phi & \phi & 9 & \phi & \\
 & \times & & & 8 & 9 & \\
\hline
 & 3 & 6 & 9 & 8 & 9 & \phi \\
3 & 2 & 8 & 7 & 9 & \phi & . \\
\hline
3 & 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & \phi
\end{array}
$$

Cette disposition peut être aussi bien employée pour une multiplication en base dix ordinaire et évite beaucoup d'erreurs de calculs.



$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 7 & 8 & 9 & 9 & 5 \\
 & \times & & & & 9 & 7 \\
\hline
 & 5 & 5 & 2 & 9 & 6 & 5 \\
7 & 1 & 0 & 9 & 5 & 5 & . \\
\hline
7 & 6 & 6 & 2 & 5 & 1 & 5
\end{array}
$$

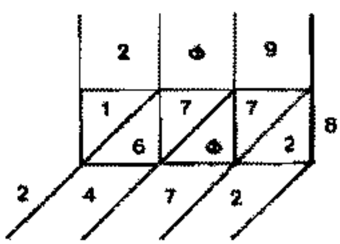


Division :

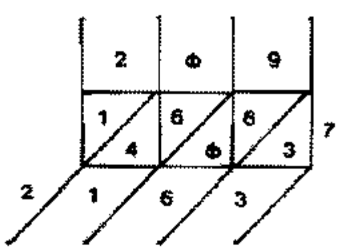
Nous poserons les multiplications puis les soustractions. Cela présente un double avantage : éviter des causes d'erreurs en effectuant successivement les deux opérations; éviter de faire plusieurs fois les mêmes calculs lorsque le même chiffre apparaît plusieurs fois au quotient. Cette présentation peut être employée de la même manière dans le calcul habituel.

```
2 6 ϕ ϕ 8 ϕ 7 | 2 ϕ 9
2 4 7 2 . . . |--------
              | 8 7 7 3
  2 3 8 8 . . |
  2 1 6 3 . . |
              |
    2 2 5 ϕ . |
    2 1 6 3 . |
              |
        9 7 7 |
        9 2 7 |
              |
          4 ϕ |
```

1)

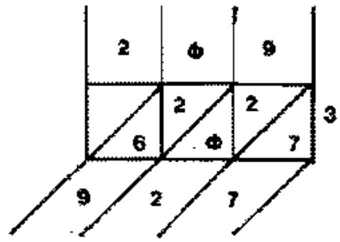


2)



3) Aucun calcul. 7 convient à nouveau.

4)



Répertoire des historiens des mathématiques

La Commission d'Histoire des Mathématiques de l'Union Internationale d'Histoire et de Philosophie des Sciences prépare actuellement un répertoire international des historiens des mathématiques.

Tous ceux qui enseignent ou qui font des recherches en histoire des mathématiques peuvent se mettre en rapport avec le président de la Commission : Professor K. O. May, Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto 181, Canada. Ils sont priés d'envoyer leur nom et l'adresse à laquelle ils désirent recevoir leur courrier, d'indiquer les domaines qui les intéressent et les langues qu'ils lisent.

La Commission compte commencer en 1973 la publication d'une revue internationale d'histoire des mathématiques et en attendant elle enverra aux intéressés un bulletin d'informations.

Processus de mathématisation (1)

G. Brousseau,
Assistant à la Faculté des Sciences, Bordeaux.

Nous voulons préciser quel est le processus pédagogique que nous croyons indispensable pour obtenir une bonne connaissance de la mathématique. Il nous a servi de modèle pour organiser la plupart des leçons et des séries d'activités dont nous avons parlé dans (9) (voir la bibliographie). Il est indispensable pour comprendre la méthode et pour indiquer comment il est possible de concilier des principes pédagogiques que des études superficielles présentent comme inconciliables.

La pédagogie tend à organiser les relations de l'enfant avec son milieu de façon à faire jouer des comportements acquis en vue de la création de comportements nouveaux.

1 Structures — Situation — Modèles.

La structure d'un ensemble est définie par les relations et les opérations qui lient ses éléments. Si la liste des relations qui définit une structure S_1 est contenue dans la liste qui définit S_2, nous dirons que S_2 entraîne logiquement S_1, que S_2 réalise S_1, ou encore que S_1 est une *abstraction* ou un *modèle* de S_2.

Deux structures S_a et S_b peuvent être des réalisations différentes d'une même structure S; nous dirons que S_a est une représentation, modulo S, de S_1. Inversement une même structure peut entraîner logiquement deux structures différentes. L'ensemble des structures qui réalisent une structure S est d'autant plus vaste que S est plus générale.

Considérons une situation, c'est-à-dire un certain agencement d'objets (ou de personnes) ayant entre eux certaines relations. Il est parfois commode pour décrire cette situation de choisir une structure et d'établir, entre certains de ses éléments ou relations et les objets ou relations de la situation, des correspondances de signifié à signifiant.

Les parties de la structure ainsi associées à des objets de la situation sont dites concrètement significatives.

---

(1) Conférence prononcée à Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M. de mai 1970 sous le titre « Apprentissage des Structures ».

La structure est alors un langage permettant de parler de la situation. La correspondance « langage-situation » est arbitraire.

D'une part les parties concrètement significatives de cette structure entraînent logiquement d'autres parties ou d'autres structures; d'autre part, dans la situation, certaines des relations décrites ont des conséquences : il peut arriver que les conséquences dans la structure soient concrètement significatives des conséquences dans la situation.

Alors, la structure aurait permis des prédictions valables. Une structure envisagée dans une certaine situation comme un moyen de prédiction, d'explication, avec un projet d'extension des parties concrètement significatives, constitue *un modèle* de la situation.

Il peut arriver que toutes les relations d'un modèle mathématique ne soient pas susceptibles de recevoir une signification concrète dans la situation décrite : ces relations sont dites non pertinentes.

Il peut arriver aussi qu'il n'y ait pas accord entre une conséquence dans la situation et ce que prévoyait le modèle. Celui-ci doit alors être rejeté ou modifié.

2 Modèles mentaux — Schéma et dialectique pédagogiques.

Il est intéressant d'utiliser le vocabulaire ci-dessus pour décrire les situations pédagogiques.

A un instant donné l'enfant est placé devant une certaine situation : c'est-à-dire devant certains objets ou personnes qui ont entre elles certaines relations. Il y a de plus entre lui et cette situation certaines relations :

il reçoit des informations et des sanctions

et il peut réagir par des actions : activité physique, émission de messages, prise de position ou jugement.

Lorsqu'un enfant, dans une suite de situations comparables (qui réalisent une même structure) a une suite de comportements comparables (qui relèvent d'une même conduite), on est fondé à estimer qu'il a perçu un certain nombre d'éléments et de relations de cette structure. Il a donc au moins un certain *modèle mental* de cette situation.

Les relations de l'enfant, à un moment donné, avec le monde qui l'entoure constituent une situation. Si cette situation a été acceptée ou organisée par un pédagogue à l'intérieur d'un moyen de parvenir à un comportement prévu, nous l'appellerons *situation ou schéma pédagogique*.

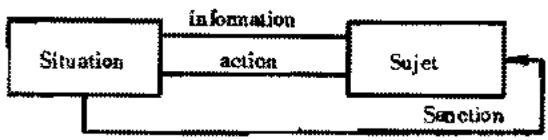
Mais une situation n'est pas statique : elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et la situation. Ces échanges constituent une sorte de dialogue, tendant à l'obtention d'une certaine satisfaction (dialogue de l'objet et du sujet, du concret et de l'abstrait, de l'à priori et de l'à postériori...).

Au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première de la situation, crée et éprouve un comportement, un modèle mental, un langage, ou une théorie. C'est un processus dialectique. Nous appellerons *dialectique pédagogique* une séquence de schémas pédagogiques ayant trait à une même situation ou à un même modèle mental.

3 Dialectique de l'action.

a) *Schéma de l'action.*

L'enfant est placé devant une certaine situation, dont il possède des modèles mentaux plus ou moins satisfaisants. Ces modèles lui permettent d'interpréter, de recevoir des informations sur cette situation. Il a de plus un but, ou une motivation d'agir physiquement; au moins certaines des informations qu'il reçoit, ou qu'il peut recevoir, sont perçues de façon affective, c'est-à-dire comme des renforcements ou des sanctions résultant de son action.



b) *Dialectique.*

En agissant, l'enfant va améliorer ou dégrader sa position, il estimera s'être rapproché de son but ou s'en être éloigné, le modèle utilisé sera renforcé ou abandonné. L'individu s'adapte par un processus d'essais et d'erreurs. Les méthodes de modification ou de changement des modèles sont mal connues. Il faut remarquer toutefois que ces changements sont uniquement orientés par les sanctions et leur intensité.

On observe au cours de certaines suites d'actions réussies que les modèles s'appauvrissent à chaque coup; le sujet recherche moins d'information, ne retient que celle qui est pertinente pour le résultat cherché : il y a réduction et abstraction par une sorte de principe d'économie du modèle. Au contraire, au cours des suites d'actions qui échouent, l'enfant tend à enrichir le modèle, le précise, le concrétise, le rend capable de rendre compte d'une plus grande quantité d'informations jusqu'à ce qu'il soit contraint de l'abandonner.

c) *Filiation des structures.*

Les structures les plus générales sont celles qui seront réalisées dans le plus grand nombre de modèles et celles qui auront le plus de chances d'être le plus fréquemment utiles. Si l'on admet que la fréquence de mise en œuvre d'un modèle est une circonstance favorable à son élaboration, il faut admettre que les structures les plus générales seront les premières que les enfants acquerront. C'est ce que l'on observe dans la dialectique de l'action.

On a mis en évidence aussi un certain ordre d'apparition des modèles mentaux chez l'enfant et montré qu'un modèle ne pouvait être utilisé efficacement et familièrement lorsqu'il n'était pas relié à une structure ou à une famille de structures déjà acquises ou en cours d'acquisition. Cette condition paraît être liée à la dialectique de l'action : l'enfant doit pouvoir opérer sur son modèle un certain jeu de modifications. Un modèle particulier acquis tout seul par apprentissage n'est pas instrumental et ne peut pas être adapté.

d) Modèles implicites.

La dialectique de l'action aboutit à la création par le sujet de modèles implicites qui règlent cette action : il s'agit de l'association de certains stimulus à certaines réponses.

Si l'enfant possède un langage approprié, il peut expliciter certains de ces modèles. Un observateur peut en expliciter davantage mais il reste sans aucun doute des procédés, des méthodes de recherche attribués à l'intuition qui font que certains trouvent assez régulièrement là ou d'autres échouent régulièrement aussi, et ces méthodes ne sont pas explicitables.

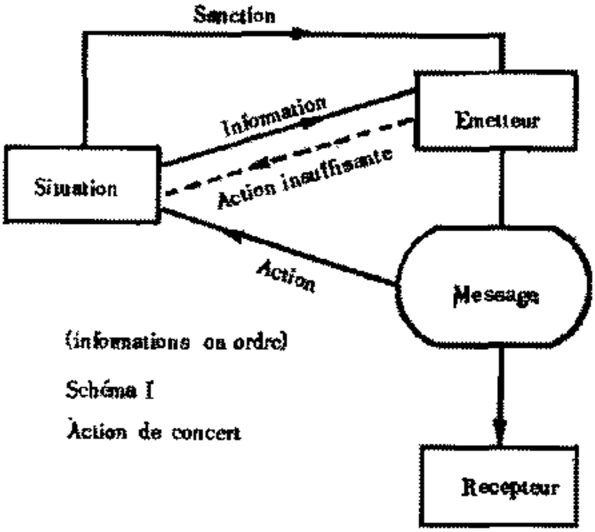
4 Dialectique de la formulation.

Par abus nous avons confondu les modèles mentaux explicitables avec les modèles mathématiques : ceux-ci sont explicités dans un langage très particulier. Pour qu'apparaisse objectivement ce que nous appelons de la mathématique, l'enfant doit exprimer, à propos d'une situation, des informations pertinentes dans un langage conventionnel dont il connaît ou crée les règles : il ne suffit pas que l'enfant placé devant une situation ait l'envie et la possibilité de la modifier, il faut qu'il construise une description, une représentation, un modèle explicite.

a) *Schémas de la formulation.*

Si nous voulons que la création d'un modèle explicite suive notre schéma pédagogique de base, il faut que ce modèle soit utile à l'obtention d'un résultat; tous les schémas se ramènent au suivant : l'enfant peut obtenir sur la situation certaines informations mais il ne parvient pas, par sa seule action, à obtenir le résultat attendu, soit parce que ses informations sont incomplètes, soit parce que ses moyens d'action sont insuffisants.

S'il se rend compte alors qu'une autre personne est susceptible d'agir sur la situation de façon favorable, il cherche à obtenir son concours puis échange avec elle des informations ou des ordres : ce sont des messages échangés entre un émetteur et un récepteur.



(informations ou ordre)

Schéma I

Action de concert

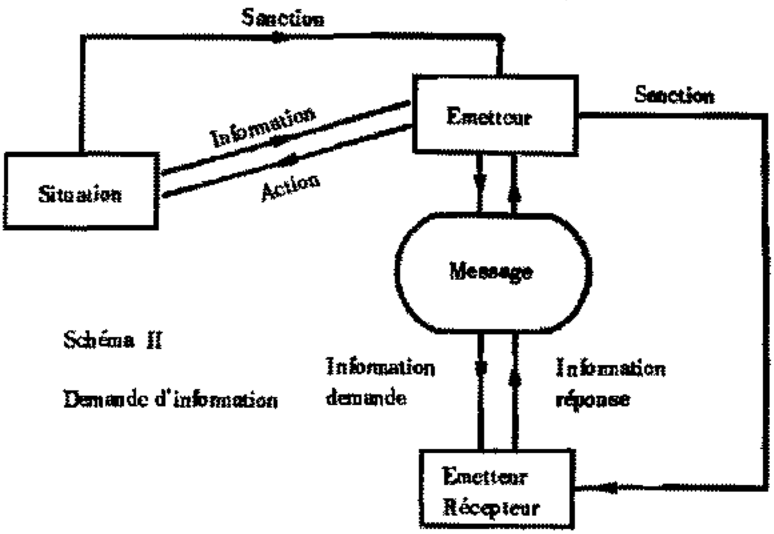


Schéma II

Demande d'information

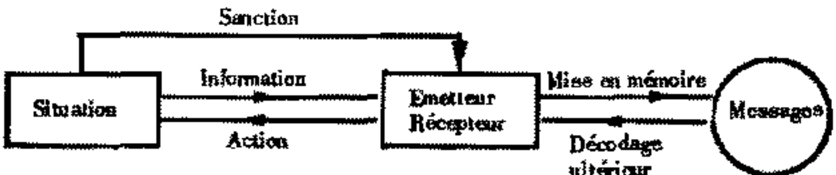


Schéma III

Mise en mémoire

Différents schémas de la formulation

Le schéma de la formulation fonctionne de la façon suivante :

Le récepteur agit en fonction du message qu'il a reçu. Si cette action n'est pas satisfaisante, il peut la corriger par un nouvel échange de messages, mais la communication ne peut s'établir que si le récepteur et l'émetteur utilisent le même code, et l'utilisent bien l'un et l'autre, Il faut ensuite évidemment que le contenu du message soit correct.

Si le schéma pédagogique est correct, lorsque la sanction de l'action est négative, il s'amorce une suite de corrections portant sur les messages qui aboutit à la formulation cherchée. Évidemment le fait que les messages soient écrits peut faciliter les corrections.

Nous avons donné dans (9) et dans d'autres ouvrages (7) de très nombreux exemples de leçons qui réalisent des schémas de la formulation :

— Désignation des objets et des ensembles.
— Égalités.
— Désignation des parties d'un ensemble, opérations ensemblistes.
— Création des couples, ensemble produit.
— Création des cardinaux.
— Désignation des cardinaux, des sommes.
— Désignation des vecteurs.
— Numération, etc...

Ce schéma fonctionne avec régularité.

Les relations des deux interlocuteurs avec la situation permettent de prévoir quelle est la sémantique — le contenu — des messages qui permettront l'obtention du résultat. Les règles imposées au canal de la communication, [c'est-à-dire l'ensemble des signes formels qui permettent de supporter les sens des messages échangés] et de la *syntaxe* utilisée : [c'est-à-dire les règles et les connaissances des deux sujets limiteront le choix du *répertoire*, de construction du message à l'aide des signes du répertoire]. Il est possible, en combinant judicieusement une situation et les conditions d'échange des messages, de commander le type de message susceptible d'être créé. Il est nécessaire que, si le message ne passe pas (mal codé, ou mal compris) l'action ne puisse aboutir.

b) Conditions sur la communication

Un message, même un ordre bref nécessaire à la réalisation d'une tâche, contient forcément une partie pertinente, concrètement significative.

Il existe des relations de signifiant à signifié entre certains éléments du message et certains autres de la situation. On ne connaît pas de système de conditions suffisantes pour qu'il soit un message mathématique mais le fait que le message soit

— écrit,
— sans ambiguïté,

— sans redondance (c'est-à-dire ne contienne pas plusieurs fois la même information),

— sans information superflue et plus généralement,

— minimal en ce qui concerne à la fois le message, le répertoire et la syntaxe, paraît propre, dans la plupart des cas où nous l'avons réalisé, à produire la création de messages quasi mathématiques, c'est-à-dire de modèles.

c) Dialectique de la formulation.

Elle peut avoir deux résultats pédagogiques distincts.

— La construction d'un message nouveau à l'aide d'un répertoire et d'une syntaxe connus.

— La création d'un répertoire, d'une syntaxe (et de messages) nouveaux.

On observe dans les deux cas les mêmes processus d'essais et d'erreurs, de réduction, d'extension et d'adaptation des messages ou des codes.

Ce sont les mêmes types de situations qui les suscitent.

Cette réduction peut aboutir à une formalisation, à la création d'un *modèle mathématique explicite*.

Dans le premier cas, les enfants n'échangent pas beaucoup de renseignements sur le langage qu'ils utilisent, que ce soit *la langue ordinaire, les diagrammes* ou une *écriture formalisée*.

Les règles de construction des messages et par conséquent des modèles mathématiques peuvent rester tout à fait implicites. Nous sommes au niveau de l'utilisation familière.

Dans le second cas, il est plus fréquent de voir expliciter des conventions d'écriture.

Jamais, en situation pédagogique, avec des enfants jeunes, je n'ai vu apparaître un message comme une simple sténographie de la langue usuelle; il y avait toujours une tentative de traduction de la structure mathématique à transmettre. Par contre il me semble qu'il est nécessaire de laisser aussi circuler, le temps venu, des messages oraux : avant ou après le jeu de la communication non verbale prévue dans la situation.

d) *Variantes des situations de communication* (voir fig. p. 61).

1° L'élève s'adresse à lui-même un message, soit par exemple parce qu'il a besoin de retenir des éléments intéressants pour les utiliser plus tard, soit par simple désir *d'expression*.

Nous avons parfois utilisé ce schéma en proposant des *phases actives* suivies de *phases représentatives*.

2° Le maître est l'un des deux intercoluteurs. C'est le schéma enseignant — enseigné. Il n'est pas dans notre propos d'examiner les avantages et les inconvénients de ce système, mais il est peut-être utile d'esquisser ses principales déformations obtenues en négligeant de faire jouer son rôle à l'un des éléments du schéma :

— Sanctions en vertu de finalités qui échappent à l'enfant.

— Répertoire imposé, limité par le récepteur (maître).

— Pas de situation concrète vis-à-vis de laquelle l'enfant se sente engagé seul et personnellement.

— Pas de réponse de l'élève : enseignement dogmatique.

— Pas de sanction, sanctions sans relation avec les modèles réellement utilisés par l'enfant, sanction de la formulation seule, etc...

La situation est constituée seulement par des exercices proposés à l'élève (enseignement programmé); le pédagogue prévoit chaque séquence : information vers l'élève, question, réponse vers le maître, sanction vers l'élève.

Toutes ces méthodes supposent l'acquisition préalable par l'enfant d'un langage et de schémas logiques car le maître doit utiliser le répertoire connu de l'élève pour transmettre sa pensée et la faire admettre.

Remarque importante.

Les relations de l'enfant avec la situation peuvent être faussées par le jeu de motivations incorrectes, même si la situation présente une bonne réalisation de la structure à enseigner.

3° Les deux interlocuteurs sont des élèves, ou mieux des groupes d'élèves. C'est le seul cas dans lequel la dialectique de la formulation peut se développer convenablement, car alors la fonction sémiotique est à la fois stimulée et contrôlée de façon puissante et naturelle par les relations des enfants à l'intérieur de la classe.

La mathématique s'apprend, dans ce cas, comme un vrai langage, dans le respect des possibilités génétiques des enfants et de la filiation de leurs systèmes d'expressions et de justifications.

Les progrès sont toutefois rapides car les situations incitent les enfants à emprunter, le moment venu, les structures employées par les adultes, sans en permettre une intrusion forcée et prématurée.

c) *Importance de l'emploi des modèles mathématiques.*

Il est clair qu'il n'y a pas vraiment apprentissage des mathématiques sans l'emploi par l'élève de modèles explicites, du langage et de l'écriture mathématiques.

Ce langage et cette écriture ne sont pas utilisés couramment ni employés familièrement dans les relations naturelles établies par l'enfant avec son milieu.

Il n'y a pas de méthode naturelle de l'enseignement des mathématiques. Par contre, si le maître peut multiplier les occasions d'utiliser des modèles mathématiques et se borner à apporter les conventions universelles, il peut organiser le processus de mathématisation.

La précocité et la fréquence d'emploi par l'enfant d'un langage mathématique pertinent et correct sont tout à fait capitales dans ces acquisitions.

5 Dialectique de la validation.

a) *Objet :* au cours de la dialectique de la formulation, la construction des messages mathématiques s'accomplit suivant des règles qui sont encore implicites pour les deux interlocuteurs. Il s'agit maintenant d'expliciter ces règles, de préciser les conventions, de dire pourquoi telle écriture mathématique est correcte et pourquoi elle est pertinente. C'est l'objet de la *validation explicite.*

Bien sûr la dialectique de l'action apporte une validation empirique, et implicite, des modèles d'action ou des formulations construites, mais cette validation est insuffisante. La conviction doit se concrétiser en une assertion, une affirmation, qui permettra à la pensée de s'appuyer pour construire de nouvelles assertions ou de nouvelles preuves.

Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à émettre ou à recevoir des informations en langage mathématique, même en les comprenant.

L'enfant mathématicien doit prendre maintenant vis-à-vis des modèles qu'il a construits une attitude critique.

— Il doit relier ces modèles entre eux.

Il doit pouvoir construire explicitement une structure usuelle à partir d'autres qu'il connaît déjà, en expliciter les théorèmes...; nous qualifierons cette *validation de syntaxique* car elle ne fait appel qu'aux modèles eux-mêmes.

— Il doit par ailleurs expliciter la valeur d'un modèle dans une situation donnée, relever les contradictions ou préciser son domaine de concrétisation. C'est la *validation sémantique*.

b) *Usage d'un message comme modèle.*

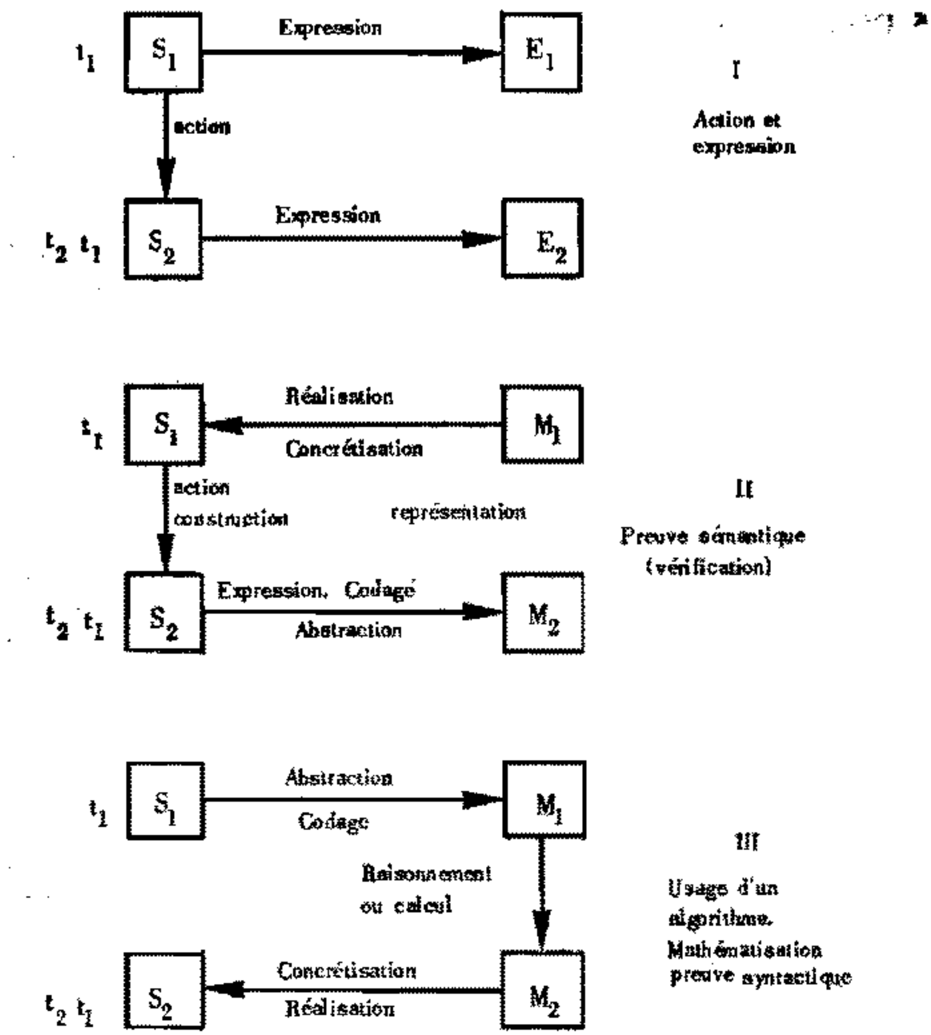
L'enfant ayant en sa possession un message écrit peut établir lui-même les relations de signifiant à signifié avec les éléments de la situation. Il peut substituer l'étude du message à celle de la situation et, grâce à cela, obtenir plus facilement des prévisions utiles. C'est à ce moment qu'il fait du message un modèle.

La figure ci-dessous montre de façon schématique les rôles différents que peut jouer la formulation dans l'action :

— En I, le langage ne sert qu'à décrire la situation, à l'exprimer. Le schéma est celui des apprentissages par associations répétées d'une formulation à une action.

— En II, le langage est le moyen de communiquer au sujet la situation qu'il doit organiser. Il doit réaliser ou concrétiser ce qui est énoncé dans le message, faire une construction effective, puis coder la nouvelle situation obtenue et transmettre ce nouveau message.

Ce schéma est celui de la vérification; il est employé dans l'apprentissage des assemblages d'assertions par associations répétées avec une construction concrète; c'est le schéma de la preuve sémantique de ces assemblages. Il est utilisé fréquemment avec l'espoir que des actions $M_1 \to S_1 \to S_2 \to M_2$



Rôle de la formulation

répétées traduiront par abstraction un passage $M_1 \rightarrow M_2$ plus économique en temps ou en efforts.

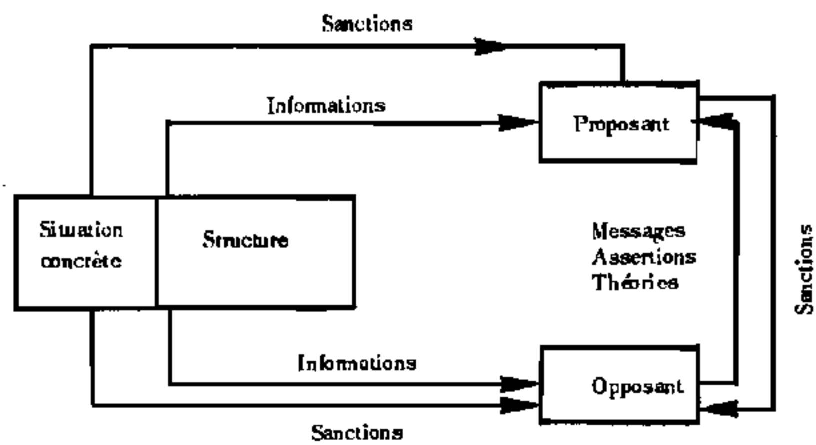
En I, le langage est utilisé comme moyen d'obtenir sur S_2 des renseignements qu'il aurait été pénible et impossible de mettre en évidence directement par construction : l'enfant code la situation S_1 suivant le modèle abstrait M_1, y raisonne suivant les règles internes de M_1, obtient M_2 et concrétise la conclusion en prédisant S_2 ou en réalisant l'action ainsi prévue. C'est le schéma des algorithmes ou de la mathématisation. L'enfant qui opére suivant ce schéma, à moins qu'il applique seulement un algorithme, doit connaître de façon explicite la justification du choix du modèle et celle des règles du modèle. Il faut entendre par justification explicite à la fois celle qui se réfère à la conviction profonde et à la convention sociale. Le processus de mathématisation vise un usage convenable de ce schéma, et l'enseignement des mathématiques consistera à organiser les relations de l'enfant dans diverses situations avec le monde qui l'entoure de façon à obtenir la génération et l'emploi suivant ce schéma des modèles mathématiques. L'utilité des modèles et la confiance que leur accorde l'enfant est un facteur bien connu favorable à leur connaissance. Nous donnons plusieurs exemples de cette organisation dans (9) et dans les « documents pour la formation des maîtres » et en particulier la définition et l'étude des sommes de cardinaux et des propriétés de l'addition des naturels (1).

c) *Schéma pédagogique de la validation.*

L'enfant pourra peut-être, à ce moment-là, prendre tout seul conscience de la représentation qui existe entre le message et la situation ainsi que de la valeur prédictive de sa formalisation. Mais il le fera bien mieux et plus facilement dans une situation pédagogique où il devra affirmer ou nier la valeur du message. Ce schéma est comparable au schéma de la communication.

L'enfant est dans la position du *proposant*. La situation dont il s'occupe est un modèle mathématique c'est-à-dire un couple : situation « concrète » — structure mathématique. Il doit justifier, défendre sa formulation et donc émettre des *assertions* et non plus des informations, à l'intention d'un *opposant*.

Les sanctions sont organisées de façon telle que chacun ait effectivement



Théories mathématiques ou logiques

Schéma pédagogique de la validation explicite

(1) Voir plus loin, page 71.

intérêt à jouer son rôle : l'adéquation du modèle à la situation satisfera l'un des sujets alors que l'autre sera satisfait dans le cas contraire. Le jeu de la découverte est un exemple un peu formel mais très efficace d'une situation de ce genre. A propos de l'addition des entiers ou des polyèdres, il aboutit à une axiomatisation de la situation.

La dialectique de la validation s'établira souvent à l'occasion de l'organisation de jeux de stratégie opposant des petits groupes dans une compétition toute sportive.

La formulation de la stratégie apparaît à l'intérieur d'une même équipe, si le schéma est conforme au schéma de la formulation, c'est-à-dire si celui qui trouve la stratégie ne peut pas se mettre à la place de celui qui doit l'appliquer.

Dans le jeu de la découverte, l'existence d'une stratégie efficace étant reconnue, celle-ci est proposée (pour un gain supérieur), ou alors elle est devinée par les adversaires si la proposition tarde trop. L'opposant cherche à prouver la fausseté de l'assertion. Une découverte acceptée par tous peut être utilisée pour agir ou pour prouver autre chose.

d) *Dialectique de la validation.*

Les règles de l'acceptation d'une proposition par l'opposant peuvent être admises ou connues implicitement par celui-ci, ou alors déclarées explicitement par le proposant. Celui-ci sera amené à expliquer, à justifier une assertion non admise par son interlocuteur, dans un système de référence. C'est souvent celui qui perd qui veut expliquer pourquoi il a perdu.

Au cours des échanges successifs de messages, ces enfants sont amenés, s'ils le peuvent, à expliciter une partie du répertoire logique et mathématique dont ils se servent pour établir leur conviction.

Au cours de ces échanges on peut observer des phases *d'analyse du système de référence :* une assertion refusée est commentée, décomposée en une suite d'assertions plus crédibles. Si les règles de cette décomposition sont des règles mathématiques, le discours est une démonstration.

A d'autres moments on observe une *complexification* ou au contraire une *simplification* du système de référence : exemple : la définition de l'addition ayant permis d'écrire des nombres nouveaux de plusieurs façons, il a fallu indiquer cela par des égalités. Ex. : au cours du jeu de la découverte (*), les enfants remplissent le tableau de ces égalités jusqu'au moment où il est nécessaire de supprimer celles qui peuvent être déduites de certaines, déjà écrites.

A d'autres moments encore on observe des processus de réduction de chaînes de propositions par l'usage implicite d'abord, puis explicite de théorèmes et de définitions. Ce processus de réduction ressemble à celui qui est en usage au niveau de la formalisation elle-même.

(*) Cahier pour l'Enseignement élémentaire des mathématiques de l'I.R.E.M. de Bordeaux n° 5.

e) *Résultat : théories mathématiques.*

Ainsi, au cours de la dialectique de la validation, les enfants élaborent et explicitent une ou des théories mathématiques, axiomatisées de façons différentes suivant leur âge et les situations auxquelles ils ont été affrontés.

Il est évident que les situations choisies, comme les relations qui s'établissent entre elles et le petit groupe de jeunes mathématiciens, jouent un rôle très important dans cette élaboration. Car le modèle mental de la déduction logique devra être différencié progressivement de modèles voisins que l'on est loin de bien distinguer dans le vocabulaire courant et qui s'appliquent parfois dans les mêmes situations :

— Concordance ou concomitance, association statistique de deux assertions (elles sont vraies « souvent » mais sans plus, dans les mêmes situations).

— Association commune d'idées : elles sont prononcées souvent dans la même situation.

— Causalité déterministe : A_1 est cause de A_2 si A_1 précède A_2 et si en aucun cas A_2 ne se produit sans que A_1 ne se soit produit au préalable. Autrement dit, si A_2 entraîne A_1 (sémantiquement).

— Association de situations par analogie : l'association est féconde mais le raisonnement par analogie est logiquement sans fondement :

Par exemple :

dans l'exemple E_1 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E_2 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E_3 nous avons fait ou conclu C
....
« donc » (!) dans E_{n+1} nous ferons ou conclurons C!

Combien d'apprentissages sont basés sur ce modèle dangereux répété avec, par surcroît, une sanction terrible; celui qui ne songe pas à conclure C est déclaré *non intelligent*...

Il est évident que l'enfant peut implicitement, tout comme les adultes, appliquer ses modèles ou ses propositions dans des ensembles de valeurs variées : ensembles à deux valeurs {vrai ou faux} mais aussi à trois valeurs {vrai, faux, on ne sait pas} ou plus {certain, probablement vrai, on ne sait pas, probablement faux, certainement faux}.

Ces ensembles peuvent être utilisés concurremment dans une même situation, en particulier dans les jeux de stratégie où les conjectures se mêlent aux déductions authentiques.

Dans cette création de la pensée mathématique, l'explicitation des systèmes de validation et la recherche de formulations convenables peut faire gagner beaucoup de temps.

f) *Variantes du schéma pédagogique. Rôle du maître.*

L'enfant doit construire lui-même sa conviction. Il n'est pas possible de démontrer quoi que ce soit à un enfant qui ne possède pas la notion de déduction. L'usage du répertoire du destinataire est une condition bien connue de la communication.

Dans le schéma de la validation, si le proposant ou l'opposant est le maître lui-même, il est à craindre que la conviction construite chez l'enfant soit de la même sorte qu'une conviction morale, ou esthétique, et ne s'en distingue pas.

Il est important, essentiel, que la pondération psychologique d'une tautologie soit d'une autre nature. Aucune considération autre que mathématique ne doit intervenir dans le jugement de l'enfant. Plus qu'ailleurs, lorsqu'il s'agit de construire la notion de vérité, l'apprentissage ne sert à rien, le maître doit donc absolument s'effacer devant les efforts de l'enfant même s'ils sont maladroits, il doit être exigeant sur la qualité des convictions et des preuves; cela veut dire non pas qu'il va réfuter tout ce qui n'est pas une bonne preuve, mais qu'il va prendre en considération les tentatives à ce sujet, encourager l'enfant à se poser devant les situations en mathématicien, en constructeur de modèles, puis en logicien, en adulte.

En matière de mathématique, l'erreur est traumatisante et l'apprentisage avilissant s'ils sont perçus dans une relation faussée. En ce domaine, l'usage inconsidéré, par le maître, de ses connaissances techniques a souvent le plus déplorable effet.

Peut-être les mathématiciens ont-ils été des enfants qui ont découvert un jour qu'ils raisonnaient plus vite et mieux que leur maître et qui ont eu confiance en eux-mêmes.

C'est pourquoi le maître doit organiser le processus de mathématisation et la validation par les enfants entre eux; mais il ne faut pas espérer que la méthode de redécouverte, même dans une petite société où les relations seraient telles que la découverte d'un ou deux serait très vite utilisée par tous, permette aux enfants de reconstruire la mathématique. Le bon langage, la bonne technique, la formulation commode, le modèle intéressant, la théorie utile sont le fruit de multiples recherches et de circonstances de probabilité parfois faible. Il n'est pas nécessaire d'organiser toutes les acquisitions sous la forme d'une construction, certaines démonstrations sont momentanément impossibles. Le maître aide l'enfant à passer sur les difficultés mineures. Il y a même des impossibilités absolues : par exemple, aucun raisonnement portant sur la notion d'infini ne peut être formulé à propos de problèmes concrets. Tout ceci explique la complexité de l'enseignement des mathématiques et du choix qu'il faut y faire.

Un exemple de processus de mathématisation : L'Addition dans les naturels : C.P. — C.E.1.

> « En aviation, quand une pièce casse il faut chercher le truc pour soulager la fatigue, ou supprimer la pièce, ou changer le pilote... plus on renforce plus on casse. »
>
> A. ODIER
> (Souvenir d'une vieille tige. A. FAYARD).

J'ai toujours essayé de suivre, en enseignement des mathématiques, le conseil de cette « vieille tige ». Car une méthode pédagogique s'apprécie comme un avion à sa légèreté, à son économie, à sa finesse.

D'ailleurs les dernières années évoquent irrésistiblement pour moi la naissance de l'auto, de l'aviation ou de la radio. J'y perçois la même ambiance de liberté et de facilité, le même foisonnement d'idées ingénieuses ou naïves, pratiques ou folles. On y voit les mêmes chercheurs de génie, les mêmes inventeurs souvent autodidactes, les mêmes ingénieurs audacieux bricolant avec des moyens réduits face au même enthousiasme et à la même muflerie des foules, à la même incompréhension de l'administration, face à la même insolente suffisance de certains pontifes abusant de leur prestige, face à l'héroïque et obstiné soutien d'autres. J'y vois aussi le même grouillement de mercantis et de prophètes...

Les méthodes nouvelles résultent de la combinaison de nombreux progrès et d'importants changements de points de vue dans des domaines très divers. On n'optimise pas du premier coup sur un tel champ de variation. Ces méthodes se ressemblent à peu près autant entre elles que les premières « cages à poules » : l'essentiel des solutions possibles y est probablement contenu en germe. Mais il est trop tôt pour démêler des procédés que l'avenir retiendra de chacune, trop tôt aussi pour les éprouver et les juger en bloc.

Les novateurs se sont surtout jusqu'à présent préoccupés d'améliorer l'apprentissage du *raisonnement* qui était certainement la partie la plus défectueuse des méthodes classiques, et un peu l'étude précoce des *structures mathématiques*. Je veux montrer avant la fin de l'année que d'importants gains de temps et de qualité peuvent être réalisés sur l'enseignement du *calcul* numérique (et sur celui du calcul logique). J'ai la conviction, étayée par mes expériences personnelles, que nous pourrons alors renouveler radicalement *l'application des connaissances mathématiques* et l'étude des problèmes pratiques de toutes sortes. En particulier je crois possible de banaliser le raisonnement probabiliste et les problèmes linéaires d'optimisation aussi bien que ceux de logique élémentaire.

L'emploi précoce et familier d'une formalisation efficace m'a paru être une des clés du problème de l'enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique et de la logique. Il m'a semblé que l'on pouvait gagner là plusieurs années si l'on arrivait à comprendre comment pouvait s'opérer l'acquisition d'un langage formel, la création d'une syntaxe, l'accroissement ou la reprise d'un répertoire.

C'est au cours des deux premières années de scolarité que la question décisive de savoir si l'enfant disposera, à l'école primaire, d'une écriture mathématique, est tranchée et l'on ne peut faire de pari intéressant en enseignement élémentaire sans l'avoir d'abord en partie résolue.

C'est une question difficile. C'est pourquoi depuis dix ans les travaux portent essentiellement sur ces deux premiers cours (CP - CE). Mais c'est aussi pourquoi nous pouvons maintenant espérer de nouveaux progrès dans les années qui viennent.

Pour illustrer ces propos et afin de pouvoir faire d'utiles comparaisons, j'ai choisi de résumer ici une série de leçons relatives à un sujet classique : addition des naturels.

Ces leçons, comme la plupart de celles que je conçois à l'heure actuelle, sont étayées par un ensemble d'hypothèses sur le processus de mathématisation que j'ai exposées en mai 70 aux journées de l'A.P.M. de Clermont-Ferrand.

Définitions traditionnelles et définitions actuelles de l'addition des naturels.

Dans la méthode traditionnelle, on introduisait directement des assemblages de signes, tels que « 3 + 4 = 7 », c'est-à-dire des relations entre naturels. Ces assemblages ne traduisaient pas des énoncés, c'est-à-dire des constatations, mais un certain algorithme. L'apprentissage consistait dans l'association répétée de l'algorithme et de l'écriture. Le rôle des signes « + » et « = » était appris par habitude et leur signification par une traduction dans la langue ordinaire. Les naturels n'étaient donc pas construits d'après une signification mais présentés axiomatiquement. C'étaient des « choses » qu'on ne montrait pas mais qui vérifiaient toutes les relations écrites.

Ce procédé était raisonnable lorsqu'on a choisi la théorie des naturels comme théorie pédagogique primitive. Cependant, après l'échec avéré des méthodes dogmatiques, les pédagogues se sont lancés, par réaction, dans les méthodes actives. Un reste de platonicisme sous-tendait toutefois les théories dont on s'inspirait pour effectuer le passage de l'action à la traduction symbolique. Il s'ensuivit un goût souvent exagéré pour le concret et des erreurs grossières dans l'emploi du matériel et dans la recherche des situations favorables à la mathématisation (par exemple l'emploi des « constellations » pour l'étude des naturels supérieurs à 6). Pour que le sens du naturel se développe chez lui, il fallait que l'enfant concrétise l'algorithme désigné, qu'il compte et recompte ses doigts, des pommes, des bâtons, etc... Si l'abstraction ne se produisait pas, l'enfant se noyait dans le concret : n'ayant qu'un langage, il confondait le naturel et les collections manipulées.

Nous avons fait un choix différent : pour parler des objets physiques et des collections qu'il manipule, nous avons introduit le langage de la théorie des ensembles ou plutôt son écriture formelle. Celle-ci a été obtenue directement et non comme traduction de phrases en langue usuelle. Elle est utilisée simplement pour la désignation.

Dans ces conditions, le naturel peut être construit par des classifications d'ensembles. Les ensembles d'ensembles doivent être à leur tour désignés. Nous verrons comment divers procédés de désignation sont successivement construits par les enfants suivant leurs progrès.

Ces procédés de désignation, au fur et à mesure de la découverte des naturels et de leurs relations, vont constituer un véritable modèle de la manipulation des collections d'objets physiques. Ce modèle sera créé et utilisé par l'enfant comme un langage par un travail sémantique et un travail syntaxique, puis repris dans une véritable construction axiomatique. Les leçons que nous décrivons plus précisément illustrent ces trois points.

A. Désignation des nombres — Travail sémantique.

1. Rappel.

Dans la classe un cardinal est interprété par une grande boîte où l'on a placé certains ensembles en classant des collections de petits objets ou des dessins les représentant. Suivant les connaissances des enfants, certaines boîtes ont reçu un signe : 11, 9, 8, 6, 3, 4, 2; d'autres n'ont pas de signes, par exemple, celle que les adultes appelleraient 14, bien qu'elle contienne déjà plusieurs collections et qu'on sache en construire d'autres allant dans cette boîte.

2. Premier type d'activité : le jeu de Kim. Sujets mathématiques : partition, écriture d'un *n*-uplet de naturels. Introduction du zéro. Préparation à la numération.

Nous avons utilisé le matériel *précalcul* (Hachette) qui présente des collections de lions, de canards, d'écureuils, d'arbres, de maisons etc...

Il s'agira pour les enfants d'écrire une suite de nombres naturels, nombre de chevaux, de canards..., chaque suite décrivant un sous-ensemble du matériel.

Présentation du jeu:

Sur une table, une partie E (moindre que la moitié) du matériel dont on dispose, et que l'on peut facilement grouper suivant un critère simple; les lions, les canards..., une dizaine d'objets de chaque espèce. Sur une autre table, le reste des objets de la collection (de quoi reconstituer une collection identique E'). Un linge va permettre de cacher la collection montrée aux enfants.

Déroulement du jeu:

1re phase: Sur la première table un enfant constitue un ensemble A avec des éléments de E.

Un second enfant vient alors observer cet ensemble A pendant un court instant puis va à la deuxième table où il doit constituer un autre ensemble A' où il y aura « les mêmes choses et en même nombre », qu'en A.

Le modèle est alors caché sous un linge.

Lorsque l'enfant déclare avoir fini, quelques délégués de la classe comparent le modèle et la copie. Cela suscitera un regroupement matériel des objets en classes et une bijection ou un décompte.

Deuxième phase : Dès que la règle du jeu est comprise, la maîtresse forme une première équipe de 2 enfants.

— Le premier observe comme ci-dessus et rédige un message qu'il porte au second.

— Le second doit alors, grâce au message, pouvoir faire la copie exacte du modèle. Il est permis de discuter pour demander des renseignements mais seulement entre deux concours.

Chaque enfant observe l'efficacité des messages dans le jeu et peut remplacer un joueur défaillant. La deuxième phase dure jusqu'à l'obtention d'un premier message réellement utilisable.

Troisième phase : Course entre deux ou plusieurs équipes pour l'amélioration des conventions. A la fin de la deuxième phase on obtient un dessin ou au mieux une écriture du genre

(3 lions; 4 canards; 5 écureils...)

Les enfants conviennent d'un ordre (par exemple : lions, canards, écureuils, éléphants, arbres) que la maîtresse écrit au tableau; alors les dessins sont inutiles et une suite de naturels suffit.

Quatrième phase : Plusieurs groupes jouent pour bien connaître les conventions de position. Introduction du zéro à l'occasion d'une classe vide.

Observations :

Les enfants n'ont tout d'abord même pas compris l'utilité de dessiner chaque objet : ils dessinaient *un* seul objet de chaque type sans indiquer le nombre des éléments.

Ce qui retenait leur attention c'était la nature des objets et non leur nombre : ils ont été très surpris de voir la différence entre le modèle et la copie.

Tout de suite après ils ont dessiné *tous* les objets et bien vite les dessins complets ont été jugés trop longs.

La solution (3 ...) leur a paru très satisfaisante. La maîtresse a dû intervenir pour suggérer l'abandon de la représentation dessinée.

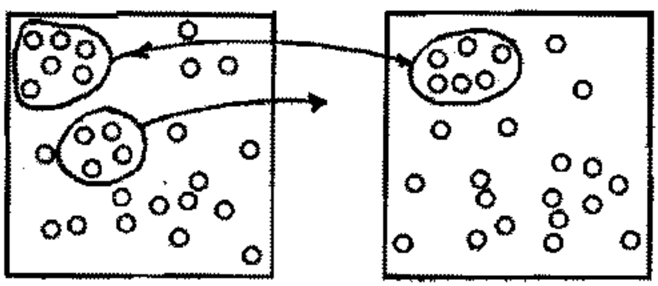
Elle a disposé les messages obtenus dans un tableau affiché.

3. Deuxième type d'activité : Comparaison de partitions.

Il s'agit de comparer, en nombre, des ensembles comportant beaucoup d'éléments (59). La seule technique de comparaison de deux ensembles que connaissent alors les enfants est l'injection, mais comment l'exécuter?

Les enfants doivent déclarer lequel de deux ensembles d'objets contient le plus d'éléments. Si les objets ne peuvent pas être appariés (mis face à face), par exemple s'ils sont dessinés, la technique des flèches est obligatoire mais dès qu'il y a plus de vingt objets elle est proprement inextricable.

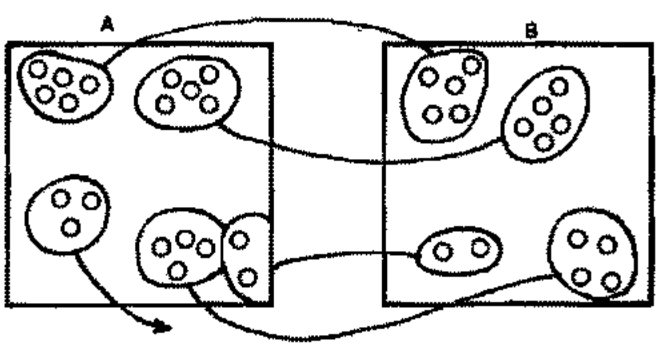
A condition de présenter un nombre suffisant d'objets (au moins 50) les enfants découvrent eux-mêmes qu'il est avantageux de procéder des deux côtés à des partitions en sous-ensembles disjoints de même nombre d'objets :



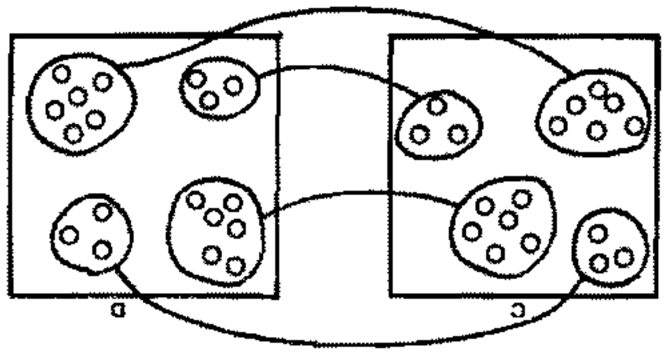
et de tenter de mettre *ces sous-ensembles* en bijection. Cette découverte est facilitée par le travail en groupe.

Les enfants sont répartis en trois groupes. Chaque groupe doit comparer deux ensembles dessinés sur deux grands papiers et comportant plus de cinquante éléments. Il ne suffit pas de conclure, il faut aussi montrer aux autres groupes qu'on ne s'est pas trompé.

Les enfants par exemple dessinent ceci:



Ils écrivent $a > b$ et disent « le nombre d'éléments de A est plus grand que celui de B ».



Ici, ils écrivent $c = d$ et disent « le nombre d'éléments de C est le même que celui de D ».

Par des questions telles que « es-tu bien sûr? Je ne sais pas, je ne vois pas... » la maîtresse suscite des hésitations et des controverses.

Il faut bien remarquer que la comparaison de deux cardinaux s'effectue chez l'enfant à l'aide de procédés différents suivant le nombre d'objets dont il s'agit; chaque modèle a ainsi un intervalle d'emploi privilégié :

de 1 à 6 perception directe (à 6 ans);

de 9 à 15 correspondance terme à terme, liens;

de 30 à 60 ou 70, partition et correspondance entre sous-ensembles.

Il est aussi ridicule de demander une perception globale du nombre de 15 ou 16 objets (anciennes constellations) que de faire tracer des liens entre deux ensembles de quatre objets. Les enfants peuvent eux-mêmes découvrir les modèles mathématiques à condition de leur proposer des situations où ils sont plus utiles que tout autre.

En développant ces considérations on peut établir ainsi les caractéristiques informationnelles de l'emploi privilégié d'un modèle mathématique.

4. Troisième type d'activité : Écriture du cardinal d'une collection très nombreuse.

Devant une collection d'un grand nombre d'objets les enfants veulent écrire un message permettant à d'autres enfants de réaliser un ensemble équivalent en nombre. Il leur faudra aussi comparer en nombre deux tels ensembles. C'est l'occasion pour eux de découvrir que l'addition leur permet d'écrire des naturels, qui pour eux sont très grands, à l'aide des quelques petits naturels qu'ils connaissent.

On utilise environ 200 objets pour une classe.

Les enfants sont répartis en 3 groupes autour de 3 grandes tables. Sur chaque table un ensemble de plus de 60 objets (distribués à poignées).

La maîtresse propose d'écrire le nombre de ces objets. L'écriture sera transmise à un autre groupe qui devra reconstituer un ensemble équivalent.

La comparaison se fera directement sur les ensembles d'objets (par bijection ou tout autre moyen). Nous recherchons des écritures du genre (5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 10) mais nous ne refusons aucune idée correcte. Le procédé a été découvert facilement par les enfants par référence au jeu de Kim.

Observations :

Les méthodes de détermination des cardinaux ont été différentes pour les trois groupes :

— La première équipe a compté et écrit le nombre d'objets de l'ensemble (une élève sait mais elle est la seule).

— La deuxième équipe a réparti les objets entre les individus. Chaque enfant a compté le cardinal d'une partie de l'ensemble. On a donc pu introduire tout naturellement l'écriture souhaitée.

— La troisième équipe a construit systématiquement des sous-ensembles de 5 éléments. Cette méthode pourra être exploitée avec fruit quand on introduira les systèmes de numération.

Dans ces deux derniers cas on obtient des écritures du genre (5, 8, 4, 8, 7, 12, 5) ou (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8).

Il est facile d'indiquer alors l'écriture habituelle 5 + 8 + 4 + 8 + 7 + 12 + 5 elle est adoptée sans problème. Mais on peut attendre aussi la phase suivante.

Remarque : Par exception (CP début décembre), dans l'un des groupes une élève sait compter correctement un ensemble de 67 objets et écrire « 67 » mais ce renseignement n'est encore exploitable que pour un nombre infime d'élèves. La maîtresse ne refuse pas le message : le renseignement est compris ou non par les autres.

5. Quatrième type d'activité.

Définition sémantique de la somme des naturels (2 par exemple); classement de réunions d'ensembles.

Le jeu consiste à réaliser, matériellement ou sur un dessin, des réunions d'ensembles et à les classer le plus rapidement possible d'après leur cardinal (dans des boîtes, par exemple).

1re phase : Le maître place sur une table deux boîtes « 5 » et « 9 » qui contiennent respectivement des ensembles équivalents en nombre, de 5 objets et de 9 objets. Si l'on utilise des dessins de ces objets on aura soin, dans cette première leçon, de ne prendre que des dessins d'ensembles disjoints. Dans une autre partie de la classe sont rangées toutes les boîtes que les enfants ont dû déjà utiliser pour classer les ensembles rencontrés. Certaines n'ont pas de nom.

a) Les enfants prennent un ensemble d'objets dans la boîte 5, un dans la boîte 9; ils en constituent la réunion, par exemple en mettant les objets de l'ensemble obtenu dans un sac. Ce sac est transmis à un coéquipier qui cherche le cardinal de cet ensemble, soit par bijection avec un ensemble figurant dans les boîtes dont il dispose, soit en comptant s'il sait. Mais il vaut mieux que l'ensemble soit tel qu'il ne sache pas compter ses éléments.

b) Le jeu recommence, toujours avec les mêmes boîtes mais avec des dessins d'ensembles, en cherchant la boîte à laquelle appartient la réunion; on peut vérifier en réalisant concrètement cette réunion à l'aide d'objets.

Le maître organise une course entre deux équipes pour classer le plus vite possible les réunions.

Très vite l'une des deux équipes s'aperçoit que la boîte convenable est toujours la même et elle s'abstient de compter ou de vérifier : elle gagne — l'autre équipe l'imite bientôt, vérifie — Cette découverte est l'objectif de la première phase.

2e phase :

Même jeu en remplaçant la première paire de boîtes (5, 9) par une autre, par exemple (7, 9). C'est une autre boîte qui convient, valable quels que soient les ensembles choisis. Nouvel exemple; explication de la découverte. Mais nous voulons aussi une écriture.

3e phase :

Le maître met à la fois plusieurs boîtes d'ensembles à la disposition des joueurs, par exemple 7, 9, 6, 11 et il désigne à chaque fois une paire de boîtes (telle que (7, 9), (11, 9), (6, 7), etc...). Les enfants découvrent que chaque paire caractérise la boîte but.

Pour faciliter la tâche il faut se rappeler dans quelle boîte il fallait mettre la réunion précédemment faite avec la même paire. Le seul moyen commode est de *noter* sur cette boîte de quelle paire il s'agit, par exemple (a, b) ou $a + b$, le signe « + » étant proposé par le maître.

Nous venons de faire l'introduction du signe « + » pour répondre au besoin des enfants.

4e phase :

Catastrophe : la réunion et l'équipotence sont incompatibles.

Maintenant le maître place dans les boîtes des dessins d'ensembles qui ne sont plus disjoints.

Les enfants réalisent la réunion. Dès la première série de vérifications, les enfants sont obligés de reconnaître, non pas qu'ils se sont trompés, mais que l'algorithme mis au point précédemment pour classer les réunions ne convient plus : la réunion d'un ensemble de cardinal 5 et d'un ensemble de cardinal 9 peut avoir comme cardinal 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 suivant les cas.

On peut avoir A équipotent à B et C équipotent à E et aussi $A \cup C$ non équipotent à B ∪ D. Pourquoi? Les enfants découvrent bientôt que certains objets figurent deux fois par un dessin dans A, un dessin dans B alors qu'ils ne figurent qu'une seule fois dans l'ensemble réunion. Ils reconnaissent d'autant mieux ce fait qu'ils ont déjà manipulé et désigné des intersections d'ensembles.

Conclusion : Ou bien il faut vérifier chaque fois et s'assurer qu'il s'agit d'une réunion d'ensembles disjoints, ou bien il faut compter chaque fois les éléments de la réunion.

6. Conclusion.

Ainsi dans un premier temps le processus de formalisation directe introduit l'emploi du signe « + » qui permet simplement d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels. Notre boîte sans nom de tout à l'heure (14) s'appellera pendant quelque temps 8 + 6. Ce nom suffit amplement à désigner et à définir la boîte en question.

En procédant à des partitions les enfants peuvent comparer et dénombrer des collections comportant jusqu'à une centaine d'objets en n'utilisant que les tout premiers naturels, par exemple l'écriture « 8 + 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 11 » est une parfaite désignation provisoire de « 53 ». Quelle puissance tout à coup! Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : *les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.*

L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages.

Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient 8 + 6 que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énonçaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire 8 + 6 et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14? Il suffisait de commencer par là.

B. Relations numériques : syntaxe de l'addition.

Dans un premier temps, l'emploi du signe « + » permet d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels; mais bientôt les enfants constatent qu'ils ont ainsi plusieurs signes pour un même naturel : ils s'en aperçoivent par des comparaisons d'ensembles : 6 + 3 + 5 est le nom d'une boîte, 8 + 6 aussi mais, si l'on a marqué de ces signes deux boîtes différentes, tout ensemble appartenant à l'une appartient aussi à l'autre : il faut une seule boîte pour laquelle nous avons deux signes : « 8 + 6 » et « 6 + 3 + 5 ». S'il y a lieu de communiquer à quelqu'un cette information nous savons déjà écrire :

« $8 + 6 = 6 + 3 + 5$ ».

Ainsi par l'addition on obtient trop de noms de naturels : nous allons tenter de dominer la situation en écrivant des égalités et des inégalités puis en essayant de réduire les écritures.

Il s'agit maintenant de *réaliser des ensembles* dont le cardinal est donné sous forme d'une somme, de *comparer ces ensembles* en nombre, *d'écrire la conclusion* de ces comparaisons.

Un autre but de ces activités est de faire découvrir aux enfants que l'on peut parfois comparer des cardinaux écrits sous forme de sommes et cela *directement d'après les écritures*, c'est-à-dire en utilisant ces messages comme des modèles.

Cette activité est importante car elle met pour la première fois en évidence le rôle d'une représentation en mathématique au cours de la comparaison entre des manipulations d'objets et la formalisation de cette activité.

1. Égalité de cardinaux.

a) 3 groupes doivent fabriquer des ensembles dont les cardinaux sont les suivants :

— Pour le 1er groupe : $9 + 9 + 8 + 3 + 6$ (avec des jetons);
— Pour le 2^{e} groupe : $4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$ (avec des bouchons)
— Pour le 3^{e} groupe : $5 + 2 + 8 + 8 + 6 + 4 + 2$ (avec des bûchettes).

b) *Comparaison de ces ensembles :* Le premier travail se fait sur les écritures de cardinaux ci-dessus. Une remarque est faite immédiatement par une enfant : 8 se trouve dans toutes ces écritures.

Puis, invités à comparer les deux premiers cardinaux, les élèves procèdent comme suit :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6$$

$$4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$$

On souligne ensuite les chiffres non reliés : 9 d'une part, 4 et 5 de l'autre.

Une élève affirme alors, sans pouvoir l'expliquer, que les deux ensembles sont équivalents. La classe vérifie le bien-fondé de cette supposition en appariant bûchettes et jetons.

Ceci amène à supposer que $4 + 5$ et 9 pourraient désigner une même boîte. On le vérifie en comptant le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles pris l'un dans la boîte 4, l'autre dans la boîte 5.

L'institutrice rappelle l'emploi de = et la notation : $4 + 5 = 9$ est proposée. Un enfant propose alors de relier 9 à $4 + 5$ par une flèche dans les expressions de cardinaux du schéma ci-dessus.

On exprime ensuite le fait que les deux ensembles vont dans la même boîte :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6.$$

Remarque : La comparaison des cardinaux du 1er et du 3e ensemble devrait se faire de la même manière. La vérification a échoué, les enfants ayant égaré quelques bûchettes. On peut éviter cet inconvénient en utilisant des dessins d'ensembles au lieu d'objets.

2. Inégalités.

De la même façon, les enfants concluent :

$$4 + 3 + 5 + 7 < 3 + 5 + 8 + 4$$

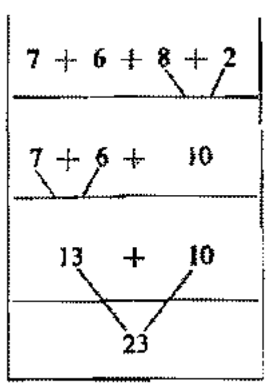
3. Réduction d'écritures et substitutions formelles.

Jeu des télégrammes : course de relais.

Les enfants vont se transmettre de l'un à l'autre des messages : le premier reçoit l'information (sur le nombre de bijoux du trésor par exemple); c'est $3 + 4 + 6 + 8 + 2$. Il le recopie et le transmet au second. Celui-ci recopie l'information et la transmet au troisième. Celui-ci recopie l'information et la transmet, etc... Mais il est entendu que l'on peut modifier l'écriture du message pourvu que le naturel indiqué reste le même. S'il y a course de relais, les enfants ont intérêt à réduire le message : par exemple les télégrammes successifs portent

$$7 + 6 + 8 + 2,\ 7 + 6 + 10,\ 13 + 10,\ 23,\ 23$$

mais il faut montrer ce que l'on fait, justifier. C'est ce qu'indique le schéma :



Si l'équipe choisit l'élève le plus fort comme premier messager, il saura peut-être exécuter l'opération et transmettre un naturel unique. Mais il y a risque d'erreur; on peut convenir que chaque messager n'a le droit d'additionner que 2 naturels.

Des enfants peuvent vouloir vérifier en opérant sur des collections d'objets ou des ensembles dessinés : en général, on vérifie le résultat et on ne se préoccupe pas des intermédiaires, ce qui n'est guère fructueux. Par contre les enfants acceptent immédiatement l'aide offerte d'afficher un répertoire d'égalités reconnues vraies que l'on retrouve à plusieurs reprises. (Ce sera l'objet de l'étude suivante.)

Une expérience : Le jeu se poursuivant à l'aide d'un répertoire, la maîtresse a proposé de réduire l'écriture suivante :

$$432 + 128 + 545 + 237 + 841 + 528$$

en utilisant le répertoire :

$$432 + 128 = 560 \qquad 545 + 237 = 782$$
$$841 + 528 = 1369 \qquad 560 + 1369 = 1929$$

Les enfants savent copier ces naturels sans savoir les lire. Ils ont pourtant compris l'algorithme et aboutissent à l'écriture

$$1929 + 782$$

qui les satisfait. Ils n'essaient aucunement de donner une signification à cette écriture, estiment le message court et ne souhaitent pas mieux.

4. Conclusion.

Nous avons donc créé un langage avec l'alphabet

$$a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, +\}$$

nous aurions pu le faire avec $\{0, 1, 2, 3, 8, 9, 13, +\}$.

a) Ce langage doit être utilisé par les enfants : nous avons donc recherché les occasions d'étudier les partitions, les sommes, la relation d'ordre dans les sommes, les sommes de sommes, etc... Et, pour multiplier les constatations, nous nous gardons bien de nous limiter aux cas de la recherche de l'écriture canonique d'un naturel ($7 + 8 = 15$) pour écrire à l'occasion par exemple $7 + 8 = 6 + 9$.

b) Il faut que les enfants aient toujours le *choix* du langage utilisé pour décrire la situation : montrer trois doigts, tracer trois barres, ou utiliser le langage du modèle : opérer avec le signe « 3 », penser à la « boîte 3 ».

c) S'il s'agit de compter, nous cherchons à les conduire à préférer le langage des naturels aussi souvent que possible comme plus commode pour eux que le langage des collections. Il faut éviter à la fois la rupture avec le sens pour qu'ils n'oublient pas de quoi ils parlent, mais aussi la lourdeur qui risquerait de les engluer dans les signifiés concrets.

Progressivement, les enfants devront pouvoir faire confiance au modèle pour prévoir, obtenir des résultats, opérer rapidement.

Dans cette phase la syntaxe a été construite comme règle implicite de construction et d'emploi des assemblages. Il reste à l'expliciter et à préciser ses règles de validité. C'est l'objet de la phase suivante qui correspond à la dialectique de la validation.

C. Étude des répertoires d'égalités : Début d'axiomatisation.

1. Constitution du répertoire.

La maîtresse affiche les égalités découvertes par les enfants au fur et à mesure qu'elles apparaissent : elles peuvent servir à faire des calculs numériques, à comparer des résultats et, grâce à des *substitutions formelles*, à établir de nouvelles égalités.

On peut par exemple instaurer une sorte de *concours de découvertes :* l'équipe qui propose une égalité nouvelle et qui prouve qu'elle est vraie gagne un point. Une équipe qui prouve qu'une égalité proposée par l'autre équipe est inexacte en gagne deux.

Il faut vérifier : la preuve, c'est le retour à la situation. On contrôle en prenant des objets pour réaliser les ensembles et en comptant.

Mais bien vite certains enfants découvrent des procédés qui fournissent une nouvelle égalité à partir de celle proposée par l'équipe adverse sans recourir à l'examen de la situation :

Par exemple à l'aide de $3 + 4 = 7$
on construira $3 + 4 + 1 = 7 + 1$ directement
ou encore $3 + 4 + 5 = 7 + 5$
ou bien au contraire,
à l'aide de $7 + 9 + 3 = 3 + 11 + 5$
on affirme par simplification $7 + 9 = 11 + 5$.

Pour justifier de telles transformations d'écriture, les enfants finissent par énoncer des règles relatives à l'équivalence d'égalités ou quelque chose d'approchant.

2. Réduction du répertoire.

Devant la prolifération des égalités, les enfants proposent :

a) De n'en écrire que quelques-unes, les autres s'en déduisant facilement.

b) De classer celles que l'on garde de façon à les retrouver vite. C'est le début de la constitution des tables d'addition. La mise en tableau de Pythagore sera une application de l'étude d'ensembles produits d'ensembles.

c) D'effacer du tableau certaines égalités à mesure qu'on est certain de bien les connaître : il s'agit d'une convention entre tous les enfants qui doivent savoir ce qu'ils ont mémorisé; cette pratique encourage donc l'apprentissage.

La réduction du répertoire d'égalités à un minimum d'axiomes et de schémas de constructions constitue en fait *un début d'axiomatisation de la théorie des naturels.*

Nous n'exposons pas dans cet article les exercices qui relèvent d'un autre processus de mathématisation que nous utilisons cependant dans la pratique concurremment à ceux-ci.

Il s'agit du processus d'abstraction par l'emploi successif de différentes interprétations du même modèle mathématique.

Ainsi les enfants manipulent un jeu de baguettes logico-arithmétiques dont la conception arithmétique remonte à Mlle Haudemars (1927) et à Cuisenaire. Ces baguettes sont, comme des ensembles, classés dans des boîtes qui sont désignées par des lettres. Une « somme » est définie dans l'ensemble des assemblages de baguettes, et par passage au quotient une addition qui permet de désigner de nouvelles boîtes.

L'emploi de poids, et d'objets classés suivant leur prix permet de mettre en évidence des isomorphismes pour (N, +) et de préparer la notion de mesure. Dienes a beaucoup étudié cet aspect du processus de mathématisation. Ce type d'abstraction joue sans doute un rôle important dans la dialectique de l'action et dans les parties sémantiques des processus de formulation. Mais il s'agissait ici de donner un aperçu d'un autre aspect, moins familier, de ce processus de mathématisation.

Je remercie mon ami L. Duvert de m'avoir signalé quelques erreurs et omissions et d'avoir sensiblement amélioré la présentation de ces textes.

G. B.

Bibliographie.

(1) Porte (J.). — Recherches sur la théorie générale des systèmes formels. Gauthier Villars, 1965.
(2) Boudon. — Vocabulaire des Sciences Sociales.
(3) Logique et Connaissance Scientifique. Ouvrage collectif sous la direction de J. Piaget. — Encyclopédie de la Pléiade, 1967, N.R.F.
(4) Le langage. — Ouvrage collectif sous la direction de A. Martinet. Encyclopédie de la Pléiade, 1968, N.R.F.
(5) Lorenzen P. — Métamathématique.
(6) Boudon (R.) et Lazarsfeld. — Analyse Empirique de la Causalité. Mouton, 1966.
(7) Brousseau et autres auteurs. — Documents pour la formation des maîtres. I.R.E.M. de Bordeaux.
(8) Wittwer (J). — Fonctions symboliques et intellectuelles. Les Sciences de l'Éducation, n° 3, Didier.
(9) L'essentiel de cet article est extrait d'un ouvrage publié en 1970 à l'I.R.E.M. de Bordeaux pour la Formation des Maîtres :

Mathématiques pour l'Enseignement Élémentaire
Tome I. — G. Brousseau

à la suite d'expériences menées entre 1964 et 1969. Un premier exposé de la méthode figure dans un ouvrage rédigé lors du stage de Varadéro (Cuba) en juillet 1970 et publié à l'I.R.E.M. de Bordeaux en octobre 1970 sous le titre « 30 leçons ».

Agir, prévoir et mathématiser (1)

LE CALVEZ,
E.N.F. de Quimper.

I. Expériences sur l'initiation à la topologie.

Au niveau de l'enseignement élémentaire le but est de faire prendre conscience aux enfants de l'espace et de les préparer à une symbolisation des propriétés observées.

Maternelle.

1. *Intentions.*

Faire vivre aux enfants des situations précises comportant des notions de topologie (courbe fermée - courbe ouverte - intérieur - extérieur).

Courbe fermée en dansant une ronde.

Courbe ouverte : évolution en farandole.

Intérieur, extérieur : Jeu « dans la mare, sur la rive ».

Transitivité de la notion d'intérieur : jeu chanté « un fermier dans son pré ».

2. *Discussion des représentations données par les enfants.*

Représentations les plus fréquentes :

« Dans la mare, sur la rive » et la farandole.

« Dans la mare; sur la rive. »

Un élastique posé à terre limitant avec précision un domaine fermé, la représentation était facilement accessible aux enfants et les commentaires des dessins dénotaient une compréhension de la situation. Les termes d'intérieur et d'extérieur n'ont pas été utilisés; les enfants utilisant des expressions leur étant plus familières telles que « dedans » et « dehors ».

La farandole. Le chemin décrit par les enfants leur était facile à concevoir par l'idée de trace laissée sur le sol, ce qui les amenait à tracer une courbe ouverte serpentant parmi les tables de la classe dessinées pour servir de repère.

La ronde ne leur donne pas aussi bien la notion de courbe car elle est composée des enfants et conçue comme un ensemble discret et non continu.

Le fermier dans son pré.

(1) Notre collègue présente ici quelques réflexions sur des recherches faites avec la participation de normaliennes.

Faisant appel à des notions plus complexes :

1° Représentation de la ronde en tant que courbe fermée.

2° Idée d'intérieur de cette ronde.

3° Emboîtement des domaines limités par les deux rondes.

Très peu d'enfants de cet âge peuvent tenir compte simultanément de toutes ces notions, d'où le manque d'essais de représentation de leur part. Il faudrait un travail de préparation beaucoup plus approfondi pour y parvenir lorsque les enfants auront atteint la maturité nécessaire à l'introduction de toutes ces notions.

Cours préparatoire.

1. *Intentions.*

Mises au point des connaissances sur les notions de courbes fermées ou ouvertes, d'intérieur et extérieur et représentation de domaines limités par une courbe fermée.

1re partie : Distribution à chaque groupe d'un morceau de laine noué, libre recherche et représentation des résultats obtenus. Sur les représentations, coloriages.

2e partie : Travail sur fiche.
Recherche d'intérieur et d'extérieur de courbes.
Recherche de trajet sur des labyrinthes.

2. *Observation des réactions des élèves.*

Les exercices de la deuxième partie n'ont pas présenté de difficultés car les courbes présentées bien que tortueuses ne présentaient pas de points doubles (pas de recoupement).

Pendant la première partie, par contre, le morceau de laine pouvait être disposé de telle sorte que différentes portions se recoupent ou viennent en contact tangentiellement. Dans les représentations les enfants ne distinguent pas ces deux cas. En leur faisant suivre du doigt le contour de la laine et en faisant observer le mouvement de la main pendant le dessin on arrive à bout de la difficulté.

C.E.1.

1. *Intentions.*

Initiation à la notion de plan et représentation d'un cheminement sur le plan.

Après un parcours autour des bâtiments de l'école et une observation dirigée de ces bâtiments, reconstitution d'un plan sommaire (sans tenir compte des proportions) et représentation du parcours effectué.

2. *Observation des réactions des enfants.*

Pendant la première phase, ne pas oublier de prendre des repères bien précis et de relever l'orientation par rapport à ces repères, car, du fait du déplacement des enfants, ce qui était à leur droite peut venir à leur gauche et les désorienter.

Pendant la représentation sur la feuille de papier, la faire tourner sur la table pour que les enfants se retrouvent dans les conditions de l'observation (d'où l'utilité des repères).

A noter la difficulté des enfants à imaginer le plan comme une vue d'avion et leur tendance à représenter tout ce qu'ils voient (clocheton et fenêtres).

Le plan ayant été reconstitué, pas de difficultés pour la représentation du cheminement.

On peut donc penser que si les enfants ont des difficultés à lire un plan, ceci provient de la représentation qu'ils se font de l'espace réel, qu'ils voient de l'intérieur.

II. Expériences sur les relations d'ordre.

C.E.1.

Intentions : Représentation de la relation d'inclusion sur l'ensemble des lettres d'un mot.

Matériel utilisé : feuilles polycopiées portant les mots ; confiture, conte, roue, fortune, four, cuir, cri, frite, cour, rue,

Réactions des enfants : difficulté de compréhension de l'étude proposée. Le mot lui-même (suite de lettres) n'est pas inclus dans un autre; la situation serait la suivante : confit dans confiture, fort dans fortune... C'est l'ensemble des lettres d'un mot qui est inclus dans l'ensemble des lettres d'un autre mot.

Remède à cette difficulté ; faire découper les lettres d'un mot et faire composer d'autres mots à partir de ces lettres; travailler sur les mots composés par les enfants et étudier la relation « *...est composé avec des lettres prises dans...* ».

Dans une leçon suivante, on pourra chercher à organiser les observations et trouver des représentations pour cette relation.

C.E.2.

Intentions : Recherche d'exemples de relations d'ordre et utilisation d'un diagramme sagittal pour ordonner un ensemble de naturels.

Réactions des enfants : Les enfants proposent des exemples variés de relations analogues à la relation proposée, les invitant à se ranger par ordre de taille. A noter que la relation proposée est souvent un préordre (exemple : nombre de lettres d'un mot); les enfants associent souvent la relation et sa réciproque.

Le travail sur fiche, très intéressant pour développer les aptitudes au calcul mental, était un peu difficile pour les enfants ; les naturels étant parfois présentés sous forme d'une somme et parfois sous forme d'un produit, les calculs étaient quelquefois difficiles à effectuer mentalement.

La simplification des schémas obtenus permettait de faire sentir l'intérêt de la transitivité de la relation.

C.M.1.

Intentions : Étude d'une relation d'ordre total, notion de plus petit élément et de plus grand élément de l'ensemble.

Réactions des enfants : Très actifs et très intéressés par le travail effectué en salle de gymnastique sur la représentation de la relation « *...est plus grand que...* » lorsqu'ils étaient disposés en cercle.

Des difficultés pour trouver d'autres représentations de la relation, l'exemple proposé ne s'y prêtant pas. A noter la confusion entre la relation et sa réciproque permettant d'attirer l'attention sur l'antisymétrie de ces relations.

Une simplification du diagramme aurait permis de faire prendre conscience de la transitivité.

C.M.2.

Intentions : Étude de la relation « *...est multiple de...* » dans un ensemble de naturels et de la relation réciproque.

Réactions des enfants : « *...est multiple de...* ». Représentations très variées de de la relation : schémas sagittaux, schéma cartésien. L'étude de « *...est diviseur de...* » les conduit, en utilisant les opérateurs de division, à l'obtention du réseau permettant d'obtenir tous les diviseurs à partir des diviseurs premiers.

Construction du treillis des diviseurs de 12 :

$$\begin{tikzcd}
12 \arrow[r, ":2"] \arrow[d, ":3"'] & 6 \arrow[r, ":2"] \arrow[d, ":3"'] & 3 \arrow[d, ":3"'] \\
4 \arrow[r, ":2"] & 2 \arrow[r, ":2"] & 1
\end{tikzcd}$$

L'étude de tous les chemins possibles permet de mettre en évidence tous les diviseurs de 12.

Étude de l'ordre sur les codes.

C.E.1.

Intentions : Étude du codage des cardinaux, formation de la suite ordonnée des cardinaux écrits en base trois.

Réactions des enfants : Écriture des symboles en utilisant 0, 1, 2 faite de manière anarchique. La recherche collective tendant à mettre de l'ordre et à écrire systématiquement la suite est trop abstraite pour les enfants de cet âge; grosses difficultés pour comprendre que le suivant de 22 sera 100, la règle de formation étant compliquée et ne respectant plus l'ordre naturel des symboles utilisés.

Remèdes à ces difficultés : Prendre du matériel et construire la suite des cardinaux tout en observant attentivement ce qui se passe lorsqu'intervient une nouvelle puissance de la base.

Les exemples fournis par les enfants montrent qu'ils ont conscience du type d'ordre étudié mais non qu'ils ont dégagé le principe du codage impliquant ce type d'ordre.

C.E.2.

Intentions : Prise de conscience de l'ordre alphabétique et d'autres ordres possibles sur les mots.

Réactions des enfants : Ils dégagent facilement un pré-ordre sur les codes (tenir compte de la première lettre du mot, ou du nombre de lettres du mot). Il est beaucoup plus difficile d'obtenir la notion d'ordre sur les codes (tenir compte de la deuxième, la troisième... lettre ou combiner nombre de lettres et ordre alphabétique dans chaque classe) pour obtenir un ordre total sur les mots et pouvoir reconnaître s'il est possible d'intercaler des mots entre deux autres mots.

Remèdes à ces difficultés : Observation et utilisation de dictionnaires (dictionnaires ordinaires ou dictionnaires des mots croisés). Recherche de tous les mots que l'on peut former avec trois lettres : travail prématuré à cet âge car on obtient des mots dépourvus de signification.

C.M.1.

Intentions : Prise de conscience des différents ordres possibles sur les mots; recherche systématique de tous les mots possibles avec un alphabet de trois lettres.

Réactions des enfants : Confusion entre classer et ranger nécessitant une mise au point nette; puis découverte aisée de plusieurs rangements possibles.

Fabrication du dictionnaire complet à partir de trois lettres (dictionnaire genre mots croisés). A ce niveau les enfants acceptent les mots sans signification. Au départ, recherche par tâtonnement mais devant la difficulté (comment être sûr de les obtenir tous?), les enfants éprouvent le besoin de trouver une règle et d'organiser la recherche systématiquement. On recherche tous les mots d'une lettre, puis on construit à partir de cette première liste tous les mots de 2 lettres, puis de 3 lettres et les plus rapides vont jusqu'à 4 lettres. On remarque que la mise en place du système permet d'obtenir l'ensemble ordonné suivant l'ordre du dictionnaire des mots croisés.

Autre remarque intéressante : il est facile de prévoir combien de mots on obtiendra dans chaque catégorie, ce qui peut permettre une initiation à l'expotentiation.

La méthode de recherche peut aussi être une introduction à la représentation en arbre.

C.M.2.

Intentions : Recherche d'un codage permettant d'intercaler un élément nouveau entre des éléments rangés.

Réaction des élèves : Prise de conscience rapide des divers ordres possibles sur les mots.

Constatation de ce que certains codes (numéros d'immatriculation des voitures, numérotage des maisons) ne permettent pas d'intercaler autant d'éléments nouveaux que l'on veut. Tandis que d'autres procédés (ordre alphabétique sur les mots et codage des nombres à virgule) permettent l'introduction d'éléments nouveaux dans la suite.

III. Expériences sur les relations d'équivalence.

C.P.

1. *Intentions.*

Rechercher les différentes techniques qui conduisent à une partition d'un ensemble.

Relation : avoir telle propriété.

Relation : avoir même propriété que...

2. *Analyse des réactions des enfants.*

Sur une fiche sont dessinés différents animaux.

La première réaction des enfants est de les classer suivant un critère. Le travail est orienté vers l'étude de la nature du pelage.

Les enfants donnent une représentation sagittale de la relation de l'ensemble E (animaux) vers l'ensemble F (nature du pelage) et retrouvent les classes qu'ils avaient découvertes intuitivement.

A noter qu'ils éprouvent aussi le besoin de représenter la relation réciproque, mais ne sentent pas la nécessité de changer la nature des flèches schématisant cette relation.

La suite du travail consistant à faire apparaître la relation « avoir le même pelage » les amène à construire le diagramme sagittal d'une relation d'équivalence; mais il est à craindre qu'une certaine confusion entre les deux types de relations ne s'établisse dans l'esprit des enfants en traitant les deux sujets dans la même leçon.

L'analyse des propriétés de la relation d'équivalence est illusoire à ce niveau et risque d'entraîner de simples réflexes conditionnés.

En conclusion : le travail serait à prendre sur deux leçons; il serait préférable de rechercher une autre représentation de la première relation.

C.E.1.

1. *Intentions.*

Faire découvrir les propriétés de la relation d'équivalence par l'observation du schéma sagittal.

2. *Analyse des réactions des enfants.*

Les enfants réalisent d'abord une partition de l'ensemble considéré, puis sont amenés à construire un schéma sagittal d'une relation « avoir la même couleur »; par une observation attentive ils prennent conscience de la nécessité de certaines flèches qu'ils n'avaient pas introduites spontanément. Cependant, lorsqu'il leur est demandé de représenter seul le travail effectué collectivement, ils ont de grosses difficultés; ils n'ont pas encore atteint un stade permettant l'analyse abstraite qui leur est demandée. Il sera donc préférable de leur fournir d'autres expériences concrètes et de les faire travailler sur des contre-exemples.

C.M.1.

1. *Intentions.*

Étude d'une relation d'équivalence sur des couples.

2. *Réaction des élèves.*

Le travail, présenté de manière trop abstraite, n'a pas amené les enfants à envisager l'étude prévue. Ils ont tout d'abord confondu couple et nombre à virgule. En modifiant légèrement la présentation du travail et en la rattachant à une idée plus intuitive, il a été possible d'aborder l'étude proposée. Les enfants ont donné facilement une représentation sagittale complète de la relation

« représente la même somme que ». L'introduction du tableau cartésien les a amenés à une autre représentation de la relation.

Certains enfants ont proposé d'autres exemples à partir de la soustraction, de la multiplication et de la division.

Au début, pendant une période de libre recherche, un groupe s'était orienté vers une étude d'une relation d'ordre sur les couples.

C.M.2.

1. *Intentions.*

Mise en évidence, sur des exemples et des contre-exemples, des propriétés caractéristiques des relations d'équivalence.

2. *Réaction des élèves.*

Pour la plupart des élèves de cette classe, il s'agissait d'une première prise de contact pratique avec les diverses schématisations des relations. Les premières réactions étaient verbales : « on peut utiliser un diagramme sagittal » — « on peut faire des flèches » — « on va faire un schéma cartésien ». Cependant la réalisation pratique ne suivait pas. Il a donc fallu abandonner le projet initial et faire effectuer un travail plus en profondeur sur ces représentations.

Il est à noter que l'introduction de mots nouveaux plaît aux enfants mais qu'ils risquent de les utiliser sans en avoir une maîtrise sérieuse et que ce procédé semblant accélérer l'apprentissage n'est pas satisfaisant.

Il semble cependant que, lorsque les enfants domineront bien ces modes de représentations, il soit possible de leur faire analyser (par comparaisons d'exemples) des relations et de leur faire découvrir les propriétés caractéristiques de relations par cette méthode.

IV. Expériences sur la notion de cardinal d'un ensemble.

C.P.

Intention: Prise de conscience de la conservation des quantités.

Réactions des enfants:

Travaux sur les quantités continues: Matériel utilisé : pots de différentes tailles remplis de sable ou de grains de riz.

Lorsque l'on verse le contenu d'un petit pot dans un pot plus grand les enfants confondent la notion de quantité de matière avec la notion de plus ou moins plein, relative au récipient; bien qu'ils admettent que le contenu d'un pot soit entièrement versé dans l'autre pot, ils considèrent qu'il y en a plus dans le petit pot que dans le grand. La notion de quantité semble donc être relative au récipient utilisé.

De même, si l'on verse le contenu de deux petits pots de même contenance dans un pot plus grand, ils ne tiennent plus compte de la quantité de matière mais du nombre de récipients et disent qu'il y a plus dans les deux petits pots.

Lorsque l'on choisit des pots de sections différentes et que l'on verse la même quantité dans ces deux pots, ils considérent que lorsque la hauteur est plus grande il y a plus de matière.

Inversement, si l'on forme un tas de grains de riz et si on étale la même quantité, ils prétendent qu'il y a plus de riz dans le tas le plus étendu.

Dans toutes ces expériences, il semble donc que l'attention de l'enfant soit davantage attirée par la notion d'espace occupé et non par la quantité de matière utilisée. Mais à ce stade sa conception de l'espace n'est pas complète et il ne sait pas coordonner deux propriétés variant simultanément (par exemple section du récipient et hauteur du contenu) en sens opposé.

Pour qu'ils prennent définitivement conscience de la conservation des quantités, il faudra donc qu'ils soient capables d'établir un lien logique entre deux variables et qu'ils prennent conscience du fait que ce qui est perdu d'un côté est regagné de l'autre.

Travaux sur des quantités discrètes.

Nous retrouvons les mêmes difficultés à ce niveau; *a priori*, les enfants réagiront en considérant l'espace occupé. Cependant, dans ces situations, les enfants sont capables d'établir d'eux-mêmes une correspondance terme à terme entre les objets et tant que la correspondance optique est maintenue ils admettent l'équipotence des ensembles; pour certains cette propriété sera conservée quelle que soit la disposition des objets, mais pour d'autres l'impression sensible l'emporte encore sur l'abstraction; ces derniers ne sont donc pas mûrs pour abstraire l'idée de cardinal d'un ensemble.

Il est également possible que les enfants établissent une correspondance entre les objets et une suite de mots et que lorsque le cardinal n'est pas trop grand ils admettent l'équipotence des ensembles après comptage, mais les remarques précédentes ne nous permettent pas de conclure que la notion de cardinal soit bien dégagée.

C.E.1.

Intentions: Étude des relations « ...a pour cardinal... » d'un ensemble d'ensembles vers un ensemble de nombres et « ...a même cardinal que... » sur l'ensemble d'ensembles.

Réaction des enfants: Aucune difficulté; à ce niveau la notion de cardinal comme propriété d'un ensemble est dégagée et les enfants saisissent facilement la différence de nature entre les deux relations.

C.E.2.

Intentions : Lien entre numération orale et numérations écrites.

Réaction des enfants : Les habitudes acquises gênent la prise de conscience des difficultés du système de numération orale habituel.

L'invention du système oral associé à la base dix ne présente pas trop de difficulté ; les enfants remplacent facilement onze, douze, treize... par dix-un dix-deux...

L'invention du système oral associé à la base vingt est plus délicat car le système de numération écrite associé n'est pas utilisé ; il sera donc nécessaire de travailler plus longuement le système écrit à base vingt par l'introduction de symboles nouveaux à partir de onze et de mots nouveaux pour dix-sept, dix-huit et dix-neuf.

La comparaison des deux systèmes oraux ne présente pas de difficulté et les enfants retrouvent un univers familier en constatant que l'on utilise tantôt l'un, tantôt l'autre.

V. Expériences sur les applications de l'addition.

Technique opératoire :

C.E.2.

Intentions : Étude de la technique opératoire de la soustraction en différentes bases.

Réaction des élèves : Les notions de base sur la numération n'étant pas suffisamment assimilées, il n'a pas été possible d'aborder au cours de cette expérience l'étude des techniques opératoires ; seule la base dix aurait pu être utilisée, mais les manipulations dans cette base sont trop lourdes pour pouvoir dégager l'essentiel.

Les exercices ont donc porté sur la numération dans des bases autres que la base dix.

En conclusion, il est à noter qu'il n'est pas possible d'obtenir une recherche satisfaisante sur les techniques opératoires tant que les enfants ne maîtrisent pas parfaitement les techniques de la numération.

Il sera donc plus profitable à ce stade de travailler sur des problèmes simples entraînant les enfants à l'utilisation judicieuse des diverses opérations connues et développant leur capacité au calcul mental.

Le travail sur les techniques opératoires ne doit prendre place que lorsque les propriétés des opérations sont parfaitement maîtrisées ainsi que les principes de la numération.

Représentation de problèmes :

C.E.1. C.M.1 et C.M.2.

Intentions : Observation de la technique utilisée par les enfants pour représenter les données d'un problème.

C.E.1.

Réactions des enfants : Les représentations obtenues avec les enfants de cet âge restent très figuratives ; ils ne donnent que petit à petit des représentations plus abstraites sous forme de schémas.

Il semble donc qu'il soit prématuré de leur proposer un schéma préparé à l'avance que les enfants ne sauront pas décoder facilement ; le schéma de problème doit être le fruit d'une élaboration commune longuement discutée par la classe ; il est ensuite important de s'assurer que chaque enfant est capable d'interpréter la symbolisation choisie.

C.M.1.

Après avoir obtenu des représentations approximatives en utilisant des diagrammes de Venn qui n'amènent pas les enfants à dominer la situation étudiée, l'utilisation d'un matériel à caractéristiques multiples permet aux enfants de prendre conscience des données du problème par une représentation plus concrète permettant une manipulation des éléments, ce qui les amène naturellement à une représentation schématique plus claire en utilisant un diagramme de Carroll.

Le problème du codage de la situation étant résolu, il faut encore s'assurer que les enfants sont capables de décoder et d'interpréter le schéma. Il faudra donc travailler cette représentation en utilisant des exemples très variés avant de les amener à résoudre des problèmes en utilisant cette schématisation.

C.M.2.

Ce même travail repris au niveau du C.M. 2 présente beaucoup moins de difficultés ; les enfants apprennent à coder et à décoder plus facilement, et il est possible, à partir de problèmes simples, de leur faire découvrir la loi générale sur le cardinal de la réunion de deux ensembles quelconques et de l'utiliser pour résoudre des problèmes variés en s'appuyant sur les représentations schématiques de ces problèmes.

En conclusion : Ce même travail effectué à différents niveaux nous montre que, lors de l'introduction d'une notion nouvelle, le niveau mental des enfants détermine les résultats obtenus et que l'utilisation prématurée de certains symbolismes risque de créer une mécanisation si l'on ne prend pas garde de s'assurer de la signification profonde des schémas introduits. Il sera peut-être possible d'obtenir des résultats spectaculaires dans des situations reconnues *a priori* comme étant semblables. Mais les enfants ne seront pas capables d'inventer eux-mêmes une démarche personnelle lorsqu'ils seront mis en face de situations nouvelles.

IV. La multiplication dans l'enseignement élémentaire.

Réflexions sur les situations mathématiques permettant de faire prendre conscience aux enfants des propriétés élémentaires de la multiplication des naturels.

La multiplication est une loi de composition interne dans **N** :

— elle est associative et commutative;

— il existe un élément neutre.

Remarque sur le langage :

Ces propriétés sont communes à l'addition et à la multiplication; nous faisons pourtant une distinction entre ces deux opérations dans le langage : on additionne b à a et on multiplie a par b et de plus les résultats se nomment « somme de a et de b » et « produit de a par b »; le langage se trouve pourtant unifié lorsque l'on dit « somme de deux naturels » ou « produit de deux naturels ».

La distinction faite entre les dénominations des opérations n'est pas très importante; dans les deux manières, les éléments du couple sont distingués; celle des noms des résultats prête davantage à confusion; les opérations étant toutes deux commutatives l'expression « somme de a et de b » semble préférable; il faudrait dire aussi « produit de a et de b ». Les propriétés différenciant la multiplication apparaissent lorsque l'on étudie la distributivité de la multiplication sur l'addition et la régularité des éléments de **N** pour les deux lois.

Nous verrons en étudiant diverses situations conduisant aux propriétés de la multiplication que les différences de langage constatées sont dues aux difficultés rencontrées pour mettre en évidence, de la façon la plus naturelle possible, la commutativité de la multiplication, et que l'expression « produit de a par b » semble provenir d'une confusion entre état et opérateur.

1. *Introduction de la multiplication à partir de la réunion d'ensembles équipotents.*

Le cardinal de la réunion de b ensembles équipotents (deux à deux disjoints) de cardinal a est le produit des deux naturels a et b.

La principale difficulté réside dans le changement de niveau dans les univers considérés : a compte des éléments et b des ensembles, on revient ensuite au niveau des éléments avec le produit.

Les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication sont difficiles à mettre en évidence sur des manipulations simples car il n'y a pas de propriétés analogues au niveau des ensembles.

Cette présentation de la multiplication justifie le rôle dissymétrique joué par les deux naturels a et b dans les dénominations; cette dissymétrie existe bien au niveau concret mais doit disparaître dans l'étude de la multiplication.

L'existence de l'élément neutre devra faire appel à deux situations différentes et si l'on peut considérer la réunion de a ensembles d'un élément ($1 \times a = a$), un ensemble de a éléments peut-il être considéré comme une réunion? ($a \times 1 = ?$).

La commutativité n'ayant pas été mise en évidence, la distributivité à droite et la distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition font appel à deux situations différentes.

Cette introduction permettra d'établir un lien entre l'addition et la multiplication; la multiplication apparaissant comme un cas particulier de l'addition généralisée.

2. *Introduction de la multiplication à partir du produit cartésien de deux ensembles.*

L'étude du produit cartésien ayant été faite et les propriétés suivantes mises en évidence :

$E \times F \neq F \times E$

$(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$ (Par convention, en utilisant l'égalité de triplets)

$E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$

$E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$

$E \times \varnothing = \varnothing \times E = \varnothing$

le cardinal du produit cartésien est le produit des cardinaux des deux ensembles.

L'associativité de la multiplication et la distributivité de la multiplication sur l'addition, ainsi que les propriétés de l'élément neutre, découlent facilement des propriétés précédentes.

Seule la commutativité risque d'engendrer une confusion si la non-commutativité de l'opération sur les ensembles n'est pas bien assimilée.

Pour mettre en évidence la commutativité de la multiplication, il est nécessaire de faire apparaître une bijection entre $E \times F$ et $F \times E$ et de bien insister sur le fait que la propriété étudiée n'est vraie que pour l'opération sur les cardinaux.

En réalisant une partition du produit cartésien (en lignes ou en colonnes si l'on utilise une représentation sous forme de tableau), il est possible de retrouver la situation d'une réunion d'ensembles équipotents (a ensembles de b éléments ou b ensembles de a éléments). Les deux naturels n'apparaissent plus comme ayant des rôles distincts. Construction de la table de Pythagore de la multiplication.

Il est facile de montrer qu'un produit cartésien de deux ensembles peut être mis en bijection avec les cases d'un tableau rectangulaire et en numérotant les cases de ce tableau de trouver l'image d'un couple (a, b); en examinant attentivement les différentes façons de numéroter les cases du tableau, il doit être possible de faire découvrir des propriétés intéressantes.

Remarque : en numérotant en suivant les conventions d'écriture habituelles, le tableau rectangulaire peut servir à réaliser une partition en classes de congruence, ce qui permet l'introduction de cette notion avant la division.

3. *Utilisation de la notion d'opérateur.*

Après avoir dégagé, sur des exemples variés, les propriétés des groupes finis d'opérateurs opérant sur un ensemble :

Existence d'une loi de composition interne.

Associativité.

Existence de l'élément neutre.

Existence d'un symétrique pour tout élément du groupe.

Et parfois commutativité.

En utilisant un processus d'échange (3 pour 1, 5 pour 1...), on peut faire opérer l'ensemble N sur des ensembles et étudier N comme ensemble d'opérateurs.

A chaque naturel est associé un opérateur et la loi de composition des opérateurs peut permettre de définir la loi de composition des naturels puis d'obtenir ses propriétés.

Les opérateurs de division apparaîtront naturellement comme opérateurs réciproques, et pour obtenir la structure de groupe il deviendra naturel d'introduire les opérateurs fractionnaires.

La plus grosse difficulté apparaîtra lorsque l'on abordera la distributivité.

Après avoir fait opérer N sur les ensembles il sera nécessaire de le faire opérer sur les cardinaux de ces ensembles; à ce stade on pourra peut-être introduire des opérateurs additifs et chercher à combiner les deux sortes d'opérateurs en prenant grand soin de ne pas aller trop vite pour éviter les confusions possibles, l'ensemble N jouant deux rôles très différents.

La technique opératoire de la multiplication ne devrait apparaître qu'à la suite de toutes ces recherches puisque le mécanisme fait appel à la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Enquête sur l'introduction de la mathématique moderne à l'école élémentaire

Madame Goussiez,
Reims.

Rôle du programme du 2-1-70.

1. *Pour les maîtres* qui s'étaient *déjà intéressés* à la réforme : ils approuvent la libéralisation proposée par le nouveau programme, mais, comparant avec le programme la « Première Étape de l'A.P.M. », ils le jugent insuffisant.

2. *Pour les maîtres non prévenus,* encore non engagés :

En C.P. : ne savent comment occuper le temps libre (horaire augmenté, programme apparemment amputé — au moins pour les « acquisitions de mécanismes »). Certains, alors, adoptent un manuel « de Mathématique Moderne » et le suivent à la lettre (1).

En C.E.-C.M. :

Les exemples donnés au B.O. pour la numération semblent efficaces — dans un but pratique et immédiat — et donnent une idée de l'esprit dans lequel on doit aborder ces notions. Cependant les maîtres attendent des précisions, des ordres. Puis suivent un nouveau manuel.

---

(1) *La référence inconditionnelle aux nouveaux manuels* dans les zones non organisées — c'est-à-dire le plus souvent — est le plus grand obstacle à une véritable réforme : on « exposera en chaire » des notions nouvelles dont on n'aura pas forcément compris l'intérêt et l'opportunité. Les enfants n'auront appris qu'à appliquer d'autres recettes. L'A.P.M. doit combattre l'influence de la commercialisation, d'une publicité inconsidérément élogieuse, doit mettre en garde les collègues contre l'utilisation aveugle de manuels, si valables soient-ils. La réflexion « en situation vécue » proposée pour les enfants, devrait d'abord être mise en pratique par les maîtres. La plupart d'entre eux ont des habitudes de passivité, engendrées par un sentiment mi-crainte, mi-respect, des I.O. et, plus concrètement des I.D.E.N. Il revient à ceux-ci d'engager leurs administrés à se libérer, à faire preuve du minimum de créativité que possède chaque être humain, serait-il instituteur (quitte à modérer les « novateurs trop zélés » redoutés par l'École Libératrice — si peu nombreux, pourtant — nous ne sommes pas des aventuriers !).

Problème de l'efficacité.

Beaucoup de maîtres craignent ou invoquent les réactions des parents, l'opposition ou la non-intervention (en fait opposante) des syndicats, le jugement de l'administration et des collègues. Une action sur ces sous-ensembles est donc souhaitable, au moins dans les zones situées hors d'action des I.R.E.M.

Action auprès des parents d'élèves.

Les P.E. ont été *sensibilisés* par la presse. Inscrivant leur enfant en primaire, certains demandent s'il fera des mathématiques modernes, dans l'espoir d'une réponse positive. Une famille a ôté sa fille du C.E. parce qu'elle n'y continuait pas à « faire des mathématiques modernes » comme au C.P.... et l'a inscrite en École Privée!

Il faut *informer les P.E.:* « École ouverte » — tracts, articles, réunions de P.E. (matière de ces réunions : dans la Charte de Chambéry, Première étape, les Chantiers de Pégagogie Mathématique de la Régionale Parisienne, explication d'exercices faits en classe...). En projet à Reims : renouveler la présentation de la Fête des Œuvres Laïques en adjoignant à la partie spectacle une exposition de travaux réalisés et des ateliers en cours de fonctionnement (se fait déjà en kermesse de fin d'année). Il s'agit de *rassurer* les parents sur nos intentions et nos actions, et de leur *faire sentir nos besoins* et l'*insuffisance de nos moyens.*

Action auprès des syndicats.

Action de base: théoriquement, le syndicat exprime la volonté de ses adhérents. Encore faut-il que ceux-ci manifestent cette volonté en temps opportun : dans la Marne, des syndiqués assistent aux réunions et réclament une action du syndicat en faveur de la rénovation pédagogique. La section marnaise du S.N.I. est favorable aux tentatives de recherche pédagogique, elle publie des articles dans le bulletin départemental, imprime volontiers les tracts destinés aux P.E., a obtenu une audience aurpès de l'Inspecteur d'Académie avec participation de la F.E.N. Une militante de la section marnaise, appartenant au Bureau National du S.N.I., y intervient dans le même sens.

Il faut montrer à nos militants et à nos camarades syndiqués que nos préoccupations et les leurs ont une intersection non négligeable : l'amélioration de notre travail rendra encore plus justes nos revendications salariales et notre lutte contre la hiérarchisation de l'Enseignement, par exemple. Leur faire sentir le danger de voir l'École Publique traitée en parente pauvre à côté d'écoles privées qui se recyclent, elles. Démontrer la possibilité de rallier activement au syndicat des collègues peu politisés mais qui apprécieraient de trouver dans le bulletin syndical une aide pédagogique et un soutien efficace.

Action strictement pédagogique.

Inutile de rappeler les rêves de Chambéry, Amiens, des États Généraux de mai 1968 et le « Plan Langevin-Wallon ». Leur convergence indique assez la légitimité de leurs aspirations. Le fait que l'inaction administrative les rende par là-même utopiques amène les collègues à se demander si cette carence est due à une impuissance ou à une volonté.

Que pouvons-nous faire?

Nous ne pouvons pas attendre que soit soudain accepté par surprise le plan Beulaygue, six fois édulcoré. Parallèlement au maintien par l'A.P.M. de prétentions minimales, il faut une action de base des enseignants, à quelque niveau que ce soit, avec quelques moyens qu'ils aient. La crainte des échecs mêmes ne doit nous arrêter : le maintien des procédés traditionnels mène aussi à l'échec, une situation d'échec peut être bénéfique dans un certain sens; en outre ces échecs ne nous seront pas imputables, mais à notre administration, responsable de notre manque de formation, d'information, de moyens.

Action dans les écoles normales.

Il ne m'appartient pas d'en préjuger.

Je sais seulement que, dans la Marne, les Normaliens venant en stage de situation sont totalement ignorants de la Pégagogie des mathématiques modernes, mais intéressés à l'occasion. Les instituteurs en stage de 3 mois en reviennent déçus. On pourrait reprocher à ces stages ce qu'on a toujours reproché à la formation des Normaliens : pas assez d'expériences « in vivo ».

Action vers les collègues non intéressés par la mathématique.

— ceux à qui les mathématiques traditionnelles ont définitivement ôté tout intérêt pour la mathématique;

— ceux qui pensent qu'en primaire, l'enseignement du Français prime tout autre;

— ceux qui ont toujours fait du « calcul intelligent » et pensent que leur révolution est faite;

— ceux qui se disent sincèrement « plus doués pour telle autre discipline »;

Montrer que *la recherche pédagogique est une.*

Parallélisme entre le nouvel esprit de la pédagogie *mathématique*, la rénovation pédagogique en *linguistique*, les méthodes actives d'enseignement *musical*, par exemple. Ceci revient aux psychologues, aux I.D.E.N., aux maîtres déjà convaincus. Il appartiendrait ensuite aux spécialistes d'étudier, chacun de son point de vue, les points communs :

Un professeur de Mathématique, à qui je demandais si le rythme « n'avait pas un intérêt pour la mathématique », me répondait qu'il n'y voyait pas de rapport intéressant. Un professeur de Musique, qui conseillait de recourir aux mouvements corporels pour faire sentir profondément le rythme aux élèves, refusait aussi d'y tenir compte de l'organisation de l'espace. Cependant, les deux notions sont si liées que les psychologues les ont unies dans l'expression « organisation spatio-temporelle ».

Les instituteurs ressentent cette nécessité, les psychologues l'expriment, l'étudient, aux spécialistes d'en établir les modalités.

Chaque stage de spécialité devrait ouvrir à ses participants des horizons sur les autres disciplines; c'est ce que se propose de faire, en Musique, la Ligue de l'Éducation Permanente.

Question des résultats scolaires.

L'adoption des mathématiques modernes n'étant, jusqu'en 1970, que le fait de maîtres isolés, le jugement des résultats obtenus ne peut être que partiel. Venant d'une bonne classe traditionnelle, les enfants savaient, certes, appliquer les recettes apprises suivant un programme donné; il faudrait demander aux pyschologues s'il existe une relation entre cette capacité de dégorgement et l'aptitude au raisonnement ($\exists$ mais non $\forall$). Des maîtres de bonne volonté, ayant « suivi » un manuel de mathématiques modernes, constatent en fin d'année que les enfants sont moins sûrs des acquisitions. Défaut de cette méthode bâtarde : *suivre* un guide pour *apprendre à s'en passer!* Il est nécessaire pour le maître de *comprendre* d'abord *l'esprit* de rénovation pédagogique proposé par « Première étape », de faire sien ce *besoin de recherche*. Ensuite, il découvrira les moyens, *les instruments de cette rénovation*. N'est-ce pas dans cet esprit, quoique sur un tout autre sujet, que les dames galantes de Brantôme disaient à leur cavaliers : « Donnez-nous en le goût, nous trouverons les moyens. »?

On peut citer cependant ces classes privilégiées, sans programme : les classes d'attente ou de perfectionnement, où les enfants ont le temps de découvrir vraiment les notions, de réinventer les mécanismes mêmes :

Plusieurs enfants, manipulant à l'ordinaire des réglettes, genre Cuisenaire, et n'ayant la pratique des naturels que jusqu'à 19, se mettent soudain avec ravissement à remplir le tableau d'escaliers sur les marches desquells ils inscrivent la suite des naturels jusqu'à 86, naturels qu'ils ne savent évidemment pas lire, mais qu'ils viennent de réinventer. Je leur pose la question : « jusqu'où peuvent-ils aller? » — ils écrivent un naturel « encore plus grand », « un encore plus grand », des nombres de 3 chiffres, 5 chiffres, c'est une jubilation; ils disent : « on pourrait toujours aller plus loin, on ne pourrait pas s'arrêter »

Ont-ils voulu dire « on pourrait *ne pas* s'arrêter »? J'insiste :

— Vous croyez qu'on pourrait ne pas s'arrêter?

— Non : on pourrait en écrire tout le long du tableau » (malheur!).

— Et si le tableau était grand, grand... s'il n'arrêtait pas? »

— Ben oui, c'est pareil — pourtant, ils hésitent, ne sont plus si affirmatifs. Ils hésitent devant l'infini — donc, ils l'ont pressenti, non?

Comment, après cela, « limiter la numération à 100 »? ou, encore plus arbitraire, à 10 000 au C.E.?

Mais cette aventure ne peut arriver dans les classes où l'on suit un manuel, une progression, traditionnels ou modernes.

Une objection possible.

Tous les élèves n'ont pas « inventé » cette numération. Et les autres?

Les autres : deux sous-ensembles : ceux qui ont adopté d'enthousiasme la découverte, et qui en rajoutent; les autres, qui n'ont pas mordu, sont ceux qui en toute occasion montrent une maturité moindre, un niveau plus faible, en lecture aussi, qui donc n'ont pas l'âge mental du C.P.

Qui d'entre nous peut croire qu'il serait bon, pour ces derniers, de forcer, de « rabâcher », et quelle valeur auraient des connaissances ainsi acquises? C'est pourtant ce que nous faisons encore trop souvent, inconsciemment, par habitude acquise, et par peur d'un nombre excessif de « redoublants ». Là encore, nous retrouvons un problème fondamental d'organisation de notre enseignement, qu'il faudra bien résoudre un jour.

Comment s'organiser sans directives, sans aide, sans moyens?

C'est une question que nous nous sommes déjà posée, et sans prétendre détenir la solution définitive, je voudrais dire où en sont :

Ceux qui n'ont pas attendu.

Sans organisation préalable, par le seul fait d'une curiosité pédagogique et d'une volonté de progrès bien légitimes, sollicitant peu à peu l'aide qui nous semblait nécessaire, voici les étapes de notre recherche :

Prise de conscience.

Lecture d'ouvrages fondamentaux :
- — Charte de Chambéry; Première Étape;
- — Travaux de Diénès;
- — Mathématique Moderne, Mathématique Vivante (Revuz);
- — Travaux de Piaget;
- — Et maintenant Wheeler (O.C.D.L.), Peltier (Wesmaël-Charlier).

Application en classe :

Parallèlement à notre travail « traditionnel » que nous ne savions encore comment rénover, familiarisation avec les blocs logiques et les notions ensemblistes, comptage et opérations en différentes bases, approche de la logique...

Ainsi, nous avons pu constater de nous-mêmes et à notre rythme, tout ce que nous apportaient ces notions nouvelles et redécouvrir quel bénéfice nous pourrions en tirer en les étudiant d'abord.

Je sais que le procédé va faire hurler certains « puristes ». Nous pensions n'avoir pas le choix : ne possédant pas assez notre sujet pour nous y aventurer sans repères, prenant le temps de découvrir chaque changement à mesure de nos appétits, nous gardions une « sécurité » vis-à-vis de nous-mêmes, plus encore que des parents et des collègues. Nous ne regrettons pas d'avoir agi ainsi, et tout en aidant nos collègues à progresser plus vite, nous leur proposons la même démarche.

Cette première approche laissait bien des questions en suspens :

Approfondissement des notions.

Théorie.

Des collègues de l'A.P.M. sont venus nous exposer les premières notions théoriques, nous proposant des exercices, nous précisant le bénéfice à tirer de tel travail de classe.

Pédagogie.

Avec l'approbation de notre I.D.E.N., des maîtresses volontaires recevaient dans leur classe 4 ou 5 collègues et un professeur pour assister à un exercice. Ensuite, réunion hors de la classe pour discuter de l'exercice observé, de ce qu'on aurait pu tirer de la situation proposée et des réflexions des enfants...

Psychologie.

Des psychologues nous aidaient à découvrir les possibilités d'exploitation d'une notion : ne pas insister sur la transitivité que l'enfant ne découvre naturellement que vers 7 ans; savoir que les enfants sont plus sensibles aux différences qu'aux ressemblances...

Où en sommes-nous?

Cette année, davantage de collègues se sont sentis concernés. Des sous-ensembles existent, en ville et dans les cantons ruraux. — Certains par groupes scolaires : on progresse ensemble dans la théorie, laissant à chacun le soin d'adapter ses connaissances au niveau de sa classe. Y sont déçus les collègues qui viennent encore chercher des recettes.

— D'autres par niveau de classe : chacun s'inspirant d'un ou plusieurs manuels, nous voyons comment une même question peut être différemment traitée, comment utiliser certaines notions et une précision mathématique dans d'autres disciplines (en C.P. : organisation de l'espace et psycho-motricité, graphisme, dessin, rythme; utilisation des diagrammes pour exprimer des « histoires » vécues, pour préciser des situations... (*)

Nos projets.

Nous ressentons de plus en plus la nécessité d'approfondir nos connaissances en théorie et en psycho-pédagogie. Les collègues de l'A.P.M. sont débordés par notre nombre et leur propre travail, décidés à ne pas s'installer dans un volontariat que l'administration voudrait officialiser à ses moindres frais. Nous espérons bénéficier l'an prochain d'un cours, en Faculté de Lettres, destiné aux instituteurs, et traitant de l'éveil de la pensée mathématique chez l'enfant. Nous continuerons à nous réunir en dehors de la classe, tâchant de progresser par nous-mêmes, conscients de nos lourdes insuffisances, mais aussi du fait que nul n'est placé mieux que nous pour connaître nos besoins, nos possibilités, et que nous sommes seuls à pouvoir réaliser notre détermination.

Exemples de vie en classe.

Il s'agit d'une classe d'attente 6-7 ans : pas de programme, préparation au C.P. Quelques élèves peuvent passer en C.E. en fin d'année: 15 élèves.

Pour aider ces enfants au démarrage incertain, travail d'équipe ou individualisé, à départ très concret, toujours fondé sur l'intérêt immédiat, en tenant compte, si possible, de l'affectivité. Les exercices sont très courts, rarement systématiques; il n'y a donc pas de « leçon » organisée mais à chaque moment une exploitation spontanée. Il faut tenir compte à la fois des notions à acquérir et des données psychologiques, intellectuelles et affectives.

Si j'apporte le point de vue de cette classe un peu particulière, c'est que je pense que les classes normales devraient aussi travailler dans ce sens : pas de programme, adaptation au rythme et aux possibilités des enfants, ce qui n'exclut pas de trouver parfois un rythme collectif. Les mathématiques modernes nous offrent dans ce sens de très riches possibilités.

(*) Le *parallélisme des problèmes pédagogiques* dans les différentes disciplines, la *communauté des objectifs* profonds de chaque spécialité : meilleure formation de l'homme futur par des connaissances mieux assurées et une plus grande faculté d'adaptation,... la *nécessité* pour atteindre ces buts *d'une plus grande connaissance de la psychologie* de l'enfant et de chaque enfant par le maître, et d'une *confiance consciente et réciproque* entre les deux parties, font que je suis résolument *opposée à la spécialisation* dans l'Enseignement du premier Degré — au moins pour des enfants de moins de 9 ans (sauf quand un changement d'organisation de notre enseignement nous permettra d'avoir avec des effectifs moins lourds, trois maîtres pour deux classes).

Pour nous, instituteurs, il importe moins de consacrer telle fraction de notre emploi du temps aux enfants que de *vivre avec eux* toute la journée. *Notre but* n'est pas d'enseigner une discipline puis une autre, mais d'*enseigner des enfants.*

Déroulement général de la classe.

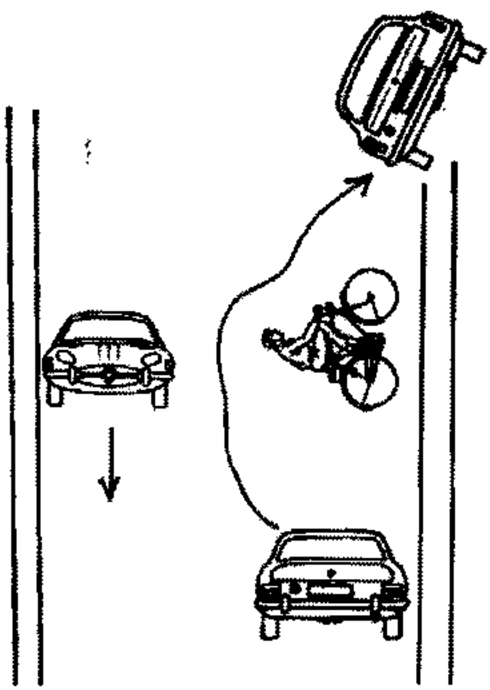
Les enfants racontant un événement, le miment; chaque détail peut être sujet à une interprétation mathématique, permettre d'exprimer une intuition, de préciser une idée, de la formuler de plus en plus mathématiquement. Il n'est pas question d'exploiter toutes les possibilités ; quand les enfants s'expriment vraiment librement les occasions sont innombrables et permettent de revenir sur une même notion avec un départ concret différent. (Remarques : les enfants n'aiment pas refaire quelque chose qu'on a déjà fait; il ne faut pas vouloir aller trop loin; des histoires tombent à plat, c'est une question de sympathie collective).

Les expériences relatées ont été exploitées dans les différentes disciplines : lecture, graphisme, dessin, éducation physique; il est difficile de dissocier les résultats obtenus pour n'en signaler que l'intérêt mathématique. On voudra donc bien me pardonner les allusions nécessaires aux autres disciplines.

Sujet.

L'Étude de notre environnement — Le *plan de notre quartier.*

En C.P., l'enfant commence à s'intégrer à la société, à découvrir son entourage. A partir d'une des questions permettant de quantifier le Q.I. d'un enfant de 6-7 ans : « quelle est ton adresse? », il s'agissait de faire construire aux enfants le plan de leur quartier. Plusieurs études, échelonnées dans l'année scolaire :



1. *Un accident en hiver.*

« A cause de la bicyclette, la voiture est allée dans le fossé. » L'histoire est mimée, dessinée par terre, puis sur affiche, en papier découpé.

Remarques :

Largeur constante de la bande représentant la route; fossés parallèles; panneau-symbole ; sens de déplacement des automobiles; droite de la chaussée; le sens et le lieu de déplacement des véhicules sont limités par la convention, alors que la ligne sinueuse est « libre »; nous traçons différentes courbes montrant les trajectoires possibles du véhicule fou.

On a remarqué que les 4 roues des voitures devaient être identiques, on a tenu à les placer régulièrement, on n'a pas su trouver combien il fallait découper de roues, en tout.

Digression possible.

Mesure des distances parcourues. Comparaison des lignes : droite, ou plus ou moins sinueuses. Nous avons fait cet exercice en C.P. normal, à partir d'une course d'escargots (début d'année) :

— *observation* (à chaque escargot a été attribuée une couleur);
— *réflexion libre*, vitesses comparées, directions prises, chemins parcourus;
— *discussion*, 2 trajets sinueux sont difficiles à comparer de visu.

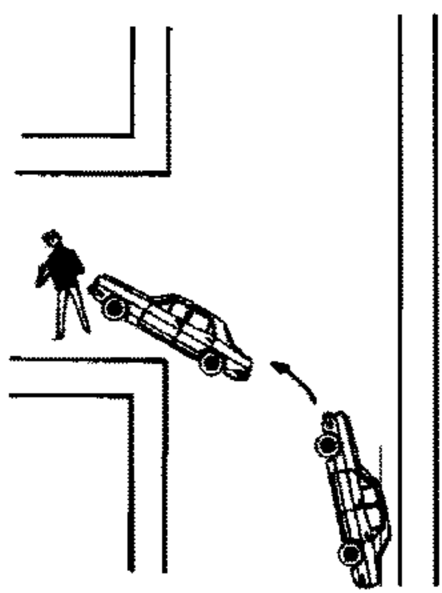
« Il faudrait mesurer » — « Avec quoi ? » On écarte le mètre « d'école », rectiligne ou presque. Mais le « mètre de couturière » provoque une méfiance certaine : ses nombres nous sont trop peu familiers.

Sylvie : « il faudrait prendre une ficelle ». Unanimité sur ce moyen dont l'adéquation frappe les esprits. La ficelle épouse le chemin « rouge », puis coupée, nous en donne la « mesure ». Reportée sur le chemin « vert », elle peut en joindre les extrémités, mais ne peut le suivre : elle est trop courte : le chemin vert est plus long que le rouge.

Différentes ficelles, taillées à la mesure des différents trajets, nous permettent maintenant de les comparer avec assurance.

L'escargot bleu n'a pas bougé : « lui, c'est zéro! ».

Le jaune s'est égaré hors du champ de course; les enfants s'en désintéressent, sauf Dominique : « lui, c'est encore pire que le bleu; il faudrait lui compter encore moins » — « moins que zéro? » — « Mais oui! » — « tu crois que c'est possible, d'avoir moins que zéro? » Do. réfléchit, cherche dans ses souvenirs, — on n'a jamais dit ça, que des nombres pouvaient faire moins que zéro... pourtant — et il retombe dans la situation présente, montrant le champ de course : « Je crois, oui, puisque, *là*, c'est possible! ».



2. *Au carrefour.*

« Emmanuel jouait sur la route, la voiture a tourné vite, et l'a renversé. »

Plan sur affiche en papier découpé (on part de la première affiche);

rues perpendiculaires; numérotage des maisons : 1, 3, 5; découpage des roues 4 par 4.

Denis : « 5 voitures, ça fait 5 fois 4 roues, 4,... 8,... 12,... 16,...19, 20 »; on colle les roues 2 par 2; bandes rouges et blanches du trottoir : proportions et longueur des bandes (les enfants les découpent une par une, — ne peut-on les découper toutes ensemble?

— On essaie. — Est-on sûr que 2 bandes prises au hasard soient de même longueur? Vérification).

3. *Plan du quartier.*

Discussion préalable : chaque enfant sait qu'il habite à Reims, mais s'étonne quand un autre, serait-il son voisin de palier, se dit Rémois. Il prend conscience, en cours d'année, du fait que Reims est un ensemble, qui inclut plusieurs quartiers dont le nôtre; et que nous sommes des éléments de l'ensemble des habitants de ce quartier. L'importance attachée par l'enfant à cette découverte est révélée par la fréquence de l'utilisation qu'il en fait une fois qu'il l'a assimilée.

Élaboration du plan :

Par terre. On symbolise l'école; à partir de laquelle chaque enfant mime son trajet de l'école à la maison, recoupement avec les trajets des autres, les chemins de « commissions »... Tracé des rues: représentation symbolique des « blocs », des « tours », des « particuliers », droite, gauche, perpendiculaire, oblique, trajets communs, sens inverses; cherchons un « chemin des écoliers »; numérotage des maisons voisines, des maisons le long d'une rue. Les nombres pairs et les nombres impairs.

4. *Une application.*

Le chemin du facteur : le facteur distribue dans une rue les lettres adressées à tels numéros. On établit les conventions : il va dans l'ordre croissant des numéros; ou dans l'ordre décroissant; ou il dessert d'abord le côté pair (en croissant) puis revient sur le côté impair (en décroissant); on cherche toutes les combinaisons possibles, les plus fantaisistes sont admises, pourvu que la règle ait été énoncée; l'un se propose pour distribuer les lettres dont le numéro se termine par n; un malin préfère distribuer celles dont le numéro commence par n : les maisons sont voisines! Mais il fallait y penser.

5. *Autre application, faite en C.P. normal, en fin d'année scolaire.*
Un arbre avec des arbres.

Dans notre quartier, il y a des marronniers, des prunus, un saule. Quels sont les itinéraires sur lesquels on rencontre une, deux, ou les trois essences d'arbres? Étant donné que chaque enfant habite soit un bloc, soit une tour, soit un pavillon, quelles sont toutes les combinaisons possibles de trajets pour un enfant habitant notre quartier? Nous avons construit un arbre (mathématique) pour récapituler toutes les possibilités. Chacune était résumée sur une carte et le jeu de cartes formé nous a permis de faire différents exercices : jeu à une ou plusieurs différences, jeu « genre » 7 familles, etc...

Promenade au long du programme du 2 janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent

P. JACQUEMIER,
Grenoble.

Une révolution en deux temps.

Le programme du 2-1-70 et les Commentaires qui les accompagnent introduisent la Mathématique à l'École Primaire : c'est une grande nouveauté, et même une sorte de révolution. Voici seulement vingt ans, celui qui déclarait que l'enfant avait accès à la Mathématique bien avant la Cinquième était fortement contredit. Surtout s'il parlait de l'enfant ordinaire, c'est-à-dire de l'enfant ne présentant pas de don spécial : on était encore au temps du mythe de la bosse des mathématiques.

L'introduction des mathématiques modernes sera une seconde révolution. Initialement prévue pour 1971, puis 72, puis 73, elle ne se fera que quand une information suffisante aura été donnée aux maîtres.

C'est de cette seconde révolution dont tout le monde parle; mais on peut penser dès maintenant que la première aura eu autant d'importance qu'elle.

Un regret.

Que les textes de ces Programmes et Commentaires n'aient pas abondamment été distribués aux Instituteurs, et gratuitement, comme l'ont été les textes relatifs à l'Éducation Physique, en une brochure qui aurait d'ailleurs été beaucoup moins épaisse. Serait-elle si coûteuse?

Quand paraîtront ces lignes, ce regret ne sera peut-être plus fondé...

Le nombre naturel.

C'est le nombre entier, positif ou nul, de notre enfance. Il résulte de la considération des ensembles, disons, sans inconvénient, des collections d'objets; c'est par là qu'il faut commencer. Une telle affirmation peut paraître banale. Il faut la répéter. Elle implique une séparation nette entre le nombre utilisé comme cardinal d'un ensemble et le nombre utilisé pour exprimer une mesure; une séparation, nette et honnête entre : « Il y a 6 crayons sur cette table » et « Ce crayon mesure 6 centimètres ».

Rupture avec les Instructions de 1945, qui déclaraient : « On enseignera le décimètre en même temps que la dizaine ». On s'interdit d'enseigner le décimètre tant que les enfants risquent de ne pas appréhender les dix segments d'un centimètre, voire de les confondre avec les traits de division qui les limitent (et qui sont 11) et surtout tant qu'ils voient mal le rôle de ces traits lors d'une mesure.

Il faut en outre laisser intacte chez l'enfant l'idée qu'une mesure a bien des chances de ne pouvoir se traduire par un nombre naturel, et qu'il est plus honnête de parler d'encadrements.

Le maître écrit 7 cm + 2 cm; il demande de traduire le signe + par ceci : dessiner un segment de 2 cm dans le prolongement d'un segment de 7 cm qu'il vient de dessiner. C'est beaucoup demander au signe +. Les enfants de Cours Préparatoire, en ce mois de Janvier, ne répondent pas, évidemment, puis docilement disent oui quand le maître termine le dessin. Additionner deux longueurs est une opération mentale plus complexe qu'additionner les cardinaux de deux collections. Les difficultés des enfants viennent de là et un retour aux bûchettes ou aux jetons ne saurait les aider.

Il y a un abîme entre le discret et le continu. Le continu est remis à plus tard : la mesure a disparu du Cours Préparatoire.

Égalité.

Deux semaines après la rentrée : « Tu avais deux bonbons, tu en as mangé un ». Les difficultés des enfants pour traduire cette situation par $2 - 1 = 1$ s'expliquent facilement : les enfants n'ont pas acquis les notions figurées par les cinq symboles que contient cette écriture d'apparence anodine. En particulier, pour le quatrième de ces symboles, on se borne généralement à dire : « Tu mets le signe = ». Cela ne donne évidemment pas la *notion* d'égalité, laquelle devrait précéder l'emploi du symbole qu'on utilise pour la traduire.

On a enseigné et écrit $2 + 1 = 3$. On demande ensuite aux enfants de compléter ceci : ** + * = . Faut-il écrire le nombre 3? ou dessiner trois petites étoiles?

Cet exercice ne fait probablement pas progresser les élèves sur la voie que l'on veut suivre. L'opération addition est définie sur les naturels, et non sur des petits dessins, et ce retour au concret est fâcheux. Surtout s'il n'est qu'un demi-retour : faire écrire ** + * = 3 donne des idées fausses puisque le membre de gauche semble être une collection d'objets alors que celui de droite est un caractère de cette collection : le signe = ne saurait être écrit entre eux.

D'une façon générale, lorsqu'on écrit $a = b$, c'est que les symboles a et b désignent le même objet (ce sont là les termes mêmes des Commentaires). Par exemple, $5 + 3$ et 8.

Le sens des mots *égal*, *égalité*, a changé. Il n'y a pas si longtemps qu'on disait 5 + 3 *font* 8, avec un pluriel qui laisse entendre que le mot *plus* est remplaçable par la conjonction *et;* ce 5 et ce 3 étaient actifs; à eux deux, ils *faisaient* quelque chose, le signe = traduisait cette action (à tel point qu'on n'écrivait pas $8 = 5 + 3$; cette non-commutativité de l'égalité a gêné des générations d'écoliers devenus lycéens).

On n'écrivait pas non plus $3 = 3$, comme l'indiquaient explicitement les Instructions de 1945, essentiellement parce que cela ne traduisait aucune action (et aussi parce que cela ne sert pas à grand-chose). On demandait à l'élève interrogé de *répondre à 5 + 3; 5* + 3 était une sorte de question; c'était un état initial qui évoluait nécessairement vers l'état final 8. $5 + 3 = 8$ exprime maintenant que $5 + 3$ et 8 sont deux dénominations d'un même objet, et n'exprime rien d'autre.

Égal n'a pas même sens non plus pour nous que pour Rémy de Gourmont qui découvrait de la façon suivante, voici 80 ans, la fécondation découverte depuis peu : « Du mâle A, de la femelle B, naissent, sans fécondation aucune, spontanément, de petits mâles *a* et de petites femelles *b*. Ces petits mâles sont appelés spermatozoïdes, ces petites femelles ovules. C'est entre ces deux êtres nouveaux que se produit la conjugaison fécondatrice. On voit alors *a* et *b* se résoudre en un troisième animal *x*, lequel, par accroissement naturel, deviendra soit A soit B. »

On clarifie sans doute les choses en évitant de parler d'égalité quand il n'y a que ressemblance en s'interdisant d'écrire que le fils *x devient* le père A, ou que la fille *x devient* la mère B.

« Le carré a quatre côtés égaux. » Ils ne sauraient l'être, puisqu'ils sont des objets distincts. « Quatre côtés qui sont les mêmes », dit-on parfois, au risque d'être incompréhensible. Ce sont les mesures des côtés qui sont égales.

« Lorsqu'on écrit un zéro à la droite d'un naturel, ce naturel *devient* dix fois plus grand ». « Diviser un naturel par 100, c'est *le* rendre 100 fois plus petit. » Ces naturels qui en *deviennent* d'autres sont probablement à l'origine d'incompréhensions diverses.

Soustraction, au C.P. et ailleurs.

Présenter la soustraction 8 — 5 à l'aide des mots *six*, *sept*, *huit*, cela n'apprend pas grand-chose aux enfants.

La présenter à l'aide d'une collection de 8 jetons et d'une collection de

5 autres jetons, ce n'est pas infaisable, mais cela risque fort de ne pas être clair : il y a trop d'objets.

« 8 escargots sont dessinés; il y en a 5 qui partent. Qu'est-ce qu'il faut mettre? » L'enfant ne sait répondre; son voisin répond pour lui : « Le trait ». Que le sens de la soustraction ne soit pas acquis, ce n'est ni grave, ni surprenant; mais ce n'est pas en se référant à une attitude formelle (« Tu mets un trait » ou bien « Tu fais une soustraction ») qu'on le fera acquérir. Si les enfants, pour *trouver* qu'il reste 3 escargots, écrivent $5 + 3 = 8$, ils montrent qu'ils ont bien compris.

Maître et élèves disaient un jour, en C.E. ou C.M., dans le feu de l'action : « Une soustraction, c'est une addition, en somme! » C'est presque vrai...

« Combien Pierre a-t-il d'images de plus que Claude ? » Ce problème pose des difficultés à la maîtresse. Il a sans doute manqué des exercices de comparaison des cardinaux de deux collections; une correspondance terme à terme des images de Claude avec une partie de celles de Pierre serait utile.

Qui peut dire pourquoi, pour « poser et effectuer » une soustraction 832 — 285, on ne se contente pas, dès le C.E. 1 et pour toute la scolarité de l'élève, de ce qui est ci-contre? Le récitatif serait celui de l'addition : 5 + 7, 12 et je retiens 1, etc...

$$\begin{array}{r} 285 \\ + \;\ldots \\ \hline 832 \end{array}$$

On éviterait bien des misères aux enfants et bien du labeur aux maîtres. Certains ont essayé cette petite révolution, et s'en sont bien trouvés.

Division (1).

Elle est définie à partir de la multiplication comme la soustraction l'est à partir de l'addition. Les Commentaires auraient pu rédiger le paragraphe relatif à division (exacte) en le calquant exactement sur le paragraphe soustraction. Les « quatre opérations », très souvent enseignées comme isolées, ont des parentés simples.

Par contre, les Commentaires ne parlent pas de « diviser par zéro ». Il a pourtant fallu, à propos des fractions, écrire « $\frac{X}{Y}$ avec $Y \neq 0$ ». On pourrait ajouter à la fin du § 4.2.2. cette idée simple, qui aiderait beaucoup les enfants dans la suite de leurs études :

Les produits de 0 par un nombre naturel quelconque sont tous nuls : $0 \times a = a \times 0 = 0$. Si donc on se donne un naturel b autre que 0, il n'y a aucun naturel qui puisse remplacer $\square$ dans :

$$0 \times \square = b \text{ ou } \square \times 0 = b$$

ni donc dans $b : 0 = \square$.

(1) Les commentaires l'appellent « *division exacte* » (?), mais il ne faut pas en conclure qu'il existe pour autant une « *division inexacte* ».

Division euclidienne.

Elle est enseignée depuis toujours, pour résoudre le problème suivant : placer un naturel dit dividende, parmi la suite des multiples d'un autre, non nul, dit diviseur (lequel n'est généralement pas un diviseur du premier).

A ce couple de naturels, la division euclidienne fait correspondre deux autres naturels : le quotient entier et le reste. Au couple : dividende égal à 7 et diviseur égal à 2, elle fait correspondre le quotient entier 3 et le reste 1.

La division euclidienne aurait besoin de deux signes. Un d'abord pour le *quotient entier*. Les Commentaires déclarent que le signe « : » est réservé exclusivement au cas où le quotient entier de la division euclidienne est aussi quotient exact : on écrira $6 : 2 = 3$. Leur attitude est sage, mais ils sont muets quant au signe à employer dans les autres cas. On a parfois proposé $7 \div 2 = 3$. Il est à craindre que, à côté de $6 : 2 = 3$, les maîtres continuent à écrire $7 : 2 = 3$ et $7 : 2 = 3{,}5$, et que les enfants continuent à confondre des notions distinctes.

Un second signe à employer, pour le *reste*, ne serait pas superflu. Si *s* était ce signe, on écrirait $7\ s\ 3 = 1$.

Commutativité.

La multiplication est une opération commutative.

Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de « nombres concrets ». Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication. Il n'y a pas à distinguer multiplicande et multiplicateur; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces « nombres concrets », 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des *nombres*. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait; on s'en passe aisément d'ailleurs).

« Quelle est l'unité du multiplicande? » Les litres. « Du multiplicateur? » Les barriques. « Le produit a la même unité que le multiplicande » déclare le maître.

Puis, se ravisant à cause de cette curieuse unité barrique, injustement éliminée, et se souvenant de ses cours de Physique du Lycée : « En fait, c'est 228 litres par barrique ». Cette nouvelle unité, le litre-par-barrique, ou l */ba*, lui fait peur et il interrompt sa lancée. Il fallait l'interrompre, bien sûr. La sagesse, même si c'est une petite révolution dans nos classes, c'est de considérer que la multiplication agit sur les nombres, que les nombres sont 15 et 228, et non 15 barriques et 228 litres.

Une pédagogie ancienne, mais pas disparue, fait dire : « Si tu veux trouver des litres, il faut que tu commences par des litres ». C'est peut-être de tels dogmes, un tel arbitraire, de tels entraînements mentaux, qui empêchent les enfants de comprendre. En voici d'autres : quand on divise des francs par des francs, on ne doit pas trouver des francs; quand on divise des litres par des vases, on trouve des litres.

Les tenants des « nombres concrets » protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts $\times$ 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts $\times$ 5 (2 pouces, 2 index, etc.); que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges $\times$ 3 ou aussi bien 3 oranges $\times$ 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3×7, ou 7×3 ou 21.

La commutativité de la multiplication n'est pas évidente chez les enfants. Ils la découvrent quand, disposant des objets en 3 rangées de 7, ils découvrent 7 rangées de 3; et c'est bien là l'idée la plus simple. On peut aussi leur proposer d'envisager un produit cartésien d'ensembles; ces mots savants ne sont rien d'autre que ceci : 3 fruits distincts, une pomme, une poire, une banane, posés de toutes les façons possibles sur 7 assiettes de couleurs distinctes, à raison d'un fruit sur une assiette comme au restaurant; en remplissant les cases d'un tableau, ils voient, là encore, 3 colonnes de 7 cases ou 7 lignes de 3 cases.

Des situations trop concrètes, 3 sacs de 7 oranges, risquent de rendre la commutativité moins claire. De même pour les adultes : si un pain vous nourrit 3 jours, vous mangerez 7 pains en 3 semaines puisqu'une semaine dure 7 jours...

Tout de même, beaucoup de chemin parcouru depuis que les Instructions de 1945 déclaraient que la commutativité de la multiplication devait être apprise aux élèves non par une preuve théorique (que serait une *preuve théorique?*) mais « par des constatations faites plus ou moins méthodiquement dans la table d'abord, ensuite sur des opérations ».

L'apprentissage par cœur primait la compréhension. La table de multiplication, toute faite, observée comme on observe une Renoncule, et la technique opératoire, toute élaborée, enseignée dogmatiquement, servaient d'arguments, sans qu'on vît dans ce cercle vicieux une mauvaise nourriture pour les enfants. Ce qu'on lit dans la table y a été mis quand on a étudié les propriétés de la multiplication, et les techniques qui permettent d'obtenir le produit de deux naturels supérieurs à 10 résultent de cette étude.

Associativité.

Une grande dame, souvent ignorée à l'école élémentaire. On pourra se reporter à un article du Bulletin (N° 263, pages 333-336) où j'ai essayé de montrer la place que devrait avoir à l'école primaire cette importante propriété de l'addition et de la multiplication.

Techniques opératoires.

Le maître demande : « Je paie 600 F en billets de 100 F; combien ai-je donné de billets? » Pour aider l'élève, il ajoute : « Quelle opération fais-tu? » Et l'on pose une division, et on l'effectue... On est très près du cercle vicieux :

la technique de la division, ou de la multiplication 100×6, résulte immédiatement des principes de la numération. Il suffit de retourner à la lecture des nombres de plusieurs chiffres; elle contient la réponse; la numération ne s'enseigne pas qu'au C.P.

On rencontre le produit 40×3. « Qu'a-t-il de particulier, celui-là? Il se termine par un zéro. On utilise le mécanisme qu'on a appris par cœur : 3 fois zéro, zéro, etc... Mais ce mécanisme résulte des propriétés de la multiplication qui, employées seules, donneraient la réponse, sans intermédiaire. Le cercle vicieux est tout proche.

Si des enfants de C.E. 1 à qui l'on dicte le naturel 57 ne savent pas l'écrire, on peut évidemment leur demander d'additionner 50 et 7, et de poser l'opération. Mais les règles qu'on leur demande d'utiliser résultent des principes de la numération; justifier l'écriture d'un naturel de plusieurs chiffres à l'aide de ces règles, c'est encore un cercle vicieux.

Comme les deux précédents, il ressemble beaucoup au cercle vicieux décrit plus haut à propos de la commutativité de la multiplication. Tout cela ne forme guère les intelligences.

Qu'au moins on n'oublie pas que ces cas, dits particuliers, sont plus simples que le cas général, antérieurs à lui, et justement en permettent l'étude. Constater qu'un mécanisme, dont l'apprentissage est parfois laborieux, « colle bien » dans les cas simples, cela tranquillise l'élève, lui donne de l'assurance, et l'aide à retenir.

On divise 2790 par 275. Est-il possible que l'enfant, même en cours d'apprentissage, ne se réfère pas si aveuglément au mécanisme? (En 279 combien de fois 275, ou en 2 combien de fois 2, etc...) Voir qu'il faut écrire 1 au quotient et que le reste est 4, c'est bien plus immédiat que ne le laisse entendre la ritournelle habituelle. Il faudrait au moins, si on fait utiliser un mécanisme dans un cas aussi simple, que ce soit, là encore, avec l'intention d'en montrer la validité. Le parallèle entre le calcul fait mentalement et le calcul qu'organise le mécanisme améliore la compréhension et, corrélativement, la mémorisation.

L'enfant doit-il comprendre le pourquoi des techniques opératoires qu'on lui enseigne? Certainement; au moins sur des exemples numériquement simples. Par exemple : pourquoi « pousse-t-on de deux rangs » dans la multiplication par 408?

« Comme j'ai multiplié le diviseur par 100, il faut aussi que je multiplie le dividende par 100. » Voilà un *comme*, souvent prononcé, qui n'apporte pas grand-chose aux élèves; il faudrait, en fait de justification, aller au delà de cet argument qui est du type « Pour ne pas faire de jaloux ».

La division par un diviseur de deux ou plusieurs chiffres fait beaucoup souffrir les enfants. Ils souffriraient moins s'ils ne perdaient pas de vue que, là comme dans des divisions plus simples, 45 par 7 par exemple, le problème de la division euclidienne est la comparaison du dividende à certain multiple du diviseur. Ce qui traduit la division euclidienne de 162 par 74, c'est l'égalité

$162 = (74 \times 2) + 14$ et l'assurance que 14 est inférieur à 74, de même que la division euclidienne de 45 par 7 se traduit par :

$$45 = (7 \times 6) + 3 \text{ et } 3 < 7$$

Celle de 45 par 6 se traduirait par :

$$45 = (7 \times 6) + 3 \text{ et } 3 < 6$$

Il faudrait que les enfants voient que les calculs (compliqués) qu'on leur fait faire ne sont rien d'autre que le condensé d'une multiplication et d'une soustraction — qu'on gagnerait probablement, comme on le fait dans certains pays étrangers, à écrire séparément, au moins de façon provisoire.

$$\begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} 148 & 2 \\ \cline{1-1} 14 & \end{array}$$

Des instituteurs demandent s'il faut faire faire des opérations en toutes bases de numération... Certains, qui y ont pris goût, répondent : « Bien sûr ». Les lignes qui suivent peuvent être proposées en une sorte de garde-fou : On pourra poursuivre l'emploi de bases plus petites que dix, mais uniquement dans le but d'aider à la compréhension de la numération, et à la compréhension des techniques opératoires.

L'emploi des unités usuelles de temps donne l'occasion de calculs qui ont le même intérêt.

Divisibilité. Preuve par 9.

Les Commentaires ne disent rien des caractères de divisibilité, ni de la preuve par 9, qui figurent explicitement dans le Programme.

Il faudrait faire la part du par-cœur. Puisque les caractères de divisibilité par 2 et par 5 résultent de façon simple des principes de la numération décimale, on peut les justifier aux enfants; on peut de même présenter, à condition qu'on les justifie, les caractères de divisibilité par 4 et par 25. Par contre, les caractères de divisibilité par 3 et par 9 devraient : soit être énoncés sans justification, ce silence étant explicitement dit aux enfants, silence qui n'empêche pas des contrôles de leur validité sur des exemples; soit être justifiés, ce qui est le mieux car il faut fuir le dogmatisme, mais demande une certaine préparation du terrain.

Considérations analogues pour la preuve par 9.

Colliers de perles et tableaux de nombres.

« Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles, déclarent les Commentaires. Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers. » Il s'agit de calculer ce qu'il faut écrire dans les cases vides du tableau ci-dessous.

Colliers	Perles
3	45
7	
	135

Les Commentaires poursuivent : « Il suffit de chercher l'opérateur qui fait passer de la première à la deuxième colonne : multiplier par 15 ». Réaction unanime d'instituteurs : « Ce 15, il faut le trouver ! » Bien sûr. On le trouve, évidemment, par une division. Il faudra bien que l'on dise le rôle du quotient obtenu; écrira-t-on : « Naturel par lequel il faut multiplier les naturels de la 1^{re} colonne pour trouver ceux de la 2^e »? Est-ce mieux que : « Nombre de perles de chaque collier »? Oui si on oublie les perles et les colliers et ne regarde que le tableau; mais cela est-il souhaitable?

Ces tableaux me font peur. Je ne leur reproche rien, et les élèves ont besoin d'écrire beaucoup de tableaux de naturels pour aborder la notion d'application numérique. Mais je crains qu'ils ne deviennent souvent que mnémotechniques. Voir par exemple l'usage qui se fait ordinairement des « tableaux à colonnes ». Dès qu'il s'agit de convertir 3 m^2 en cm^2, ou même en dm^2 : « Que dois-tu faire ? — Un tableau ». Le tableau permet d'atteindre le résultat; il est une façon de faire tentante, pour l'enfant et pour le maître, mais douteuse, parce qu'il invite à penser peu, ou pas.

Proportionnalité.

Le mot me gêne beaucoup également. D'abord parce que les élèves ont tendance à voir de la proportionnalité partout, et les auteurs de manuels aussi, à cause de la facilité de rédiger des énoncés de problèmes...

Ensuite parce qu'on entendra : 14 et 10 sont proportionnels à 7 et 5, ce qui est correct; et aussi : 10 est proportionnel à 5. Il faut quatre naturels au moins pour parler de proportionnalité, et c'est beaucoup. Il fut un temps où la proportionnalité était « interdite » avant la troisième, et justement pour ces raisons.

Fractions.

Les Commentaires énoncent : « Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur ». Ce qui laisse entendre qu'elles sont aussi autre chose. On définira en effet, à partir d'elles, les rationnels, et, par abus de langage, on dira que les fractions sont des nombres ; mais cela ne se fera qu'après l'École Primaire.

Les fractions se définissent ainsi : x et y désignant deux nombres naturels, le second non nul, multiplier un naturel par la fraction $\frac{x}{y}$ revient à le multiplier par x puis diviser, si cela est possible, le résultat par y.

Les enfants sortiront du C.M. 2 en sachant (en principe) que $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$, puisque les opérateurs $\longrightarrow \times \frac{20}{8} \longrightarrow$ et $\longrightarrow \times \frac{5}{2} \longrightarrow$, agissant sur une même série de nombres, ont le même effet, mais ils ignoreront que $\frac{5}{2}$ est un nombre, qu'il est compris entre 2 et 3, et égal à $2 + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ étant lui-même un nombre.

Par contre, ils sauront que certaines fractions sont égales à des naturels (voir fin du § 6.2.) : puisque l'opérateur $\longrightarrow \times \frac{2}{2} \longrightarrow$ a le même effet que l'opérateur $\longrightarrow \times 1 \longrightarrow$, la fraction $\frac{2}{2}$ est égale au *naturel* 1. On écrit de même $\frac{10}{5} = 2$. Ces fractions se comportent comme des nombres naturels.

Il ne reste pas beaucoup à faire à propos des autres fractions : en utilisant l'opérateur $\longrightarrow \times \frac{5}{2} \longrightarrow$, on trouve à partir d'une même série de nombres, des nombres plus grands qu'en utilisant $\longrightarrow \times \frac{4}{2} \longrightarrow$ et plus petits qu'en utilisant $\longrightarrow \times \frac{6}{2} \longrightarrow$.

On en décrètera, pourquoi pas, d'abord que $\frac{5}{2}$ est un nombre, ensuite que ce nombre est compris entre $\frac{4}{2}$ et $\frac{6}{2}$, c'est-à-dire entre 2 et 3.

Mais je ne voudrais pas alourdir le programme, qui me paraît déjà chargé dans ce domaine.

Multiplication des fractions.

Elle a été ôtée du programme de Sixième en 1969. Est-elle bien à sa place au C.M. 2 ? On pourrait proposer une glissière de sécurité : « A n'enseigner que si les élèves suivent bien ». Réponse : la multiplication des fractions est au programme (alors que l'addition ne l'est pas). Il s'agit d'un réel changement, justifié par le fait que les fractions sont bien plus aptes à être multipliées qu'à être additionnées.

Pourcentages et numération décimale.

Puisque 5 p. 100 signifie 5 pour cent, pourquoi ne voit-on pas plus souvent les enfants qui sortent de l'École Primaire calculer l'intérêt annuel en lisant le nombre de centaines du nombre exprimant le capital? Ce nombre de centaines aurait même le droit d'être décimal.

La notion de pourcentage ne figure ni dans le Programme, ni dans les Commentaires. Elle a été un chapitre important du « Calcul » qu'apprenaient les petits Français. Son écriture est un anachronisme. Le paragraphe suivant, volontairement sobre, la remettrait à sa vraie place :

Pourcentages. L'écriture 5 % désigne un opérateur qui n'est autre que

$$\longrightarrow \times \frac{5}{100} \longrightarrow .$$

Nombres décimaux.

Il s'agit d'étoffe, à 18 F le mètre; on en achète 3,15 m. Des enfants restent rétifs : ils ne multiplient pas. Ils savent quoi faire pour obtenir le prix de 3 m, mais sont arrêtés pour 3,15 m. Ces enfants sont bien formés; la preuve, c'est justement qu'ils sont arrêtés, et qu'on voit de façon limpide pourquoi ils le sont; le maître n'a pas l'habitude d'opérer avec eux par entraînement mental.

Leur dire : « Puisque vous multipliez par 3 dans un cas, vous devez, dans l'autre, multiplier par 3,15 », cela ne les éclaire probablement pas. Si justement ils sont arrêtés, c'est qu'ils ne voient pas dans 3,15 la qualité de nombre et qu'ils ne sont pas convaincus qu'on peut, avec cette chose étrange, opérer comme avec un nombre naturel. Leur dire : « Vous faites pareil » c'est les amener à un automatisme basé sur une analogie qui, n'étant pour eux que formelle, ne les satisfait pas : ils ont besoin de justifications sur la multiplication par un nombre décimal.

Bien sûr, si on ne les leur donne pas, cela ne les empêchera pas, le pouvoir de persuasion du maître aidant, de « faire pareil »... La docilité des enfants est souvent un obstacle à la pédagogie.

Les nombres décimaux sont des choses compliquées. Les Commentaires les abordent ainsi : la population de la France est 50, le million étant pris pour unité. Qu'un *million* soit *unité*, c'est-à-dire *un*, *1*, il y a là quelque chose qui nous est familier, mais qui reste mystérieux. On est très près des « unités de mille », des « unités de million » (ou : « de *millions* »?)... Comptons sur la docilité des enfants, ici providentielle, et ne philosophons pas.

Il faudra bien un jour dire aux enfants que le nombre décimal 12,850 obtenu à partir de 12850 par emploi d'une virgule, et le nombre 12,85 obtenu à partir de 1285 par emploi d'une virgule, sont égaux. Peut-on le faire ici?

Les enfants ignorent que 12,850 est un nombre égal à la fraction $\frac{12850}{1000}$ et que 12,85 est égal à $\frac{1285}{100}$, fractions dont ils savent, ou sauront avant la fin du C.M. 2, qu'elles sont égales. On pourra toujours leur dire que le zéro de 12,850 n'a plus le rôle de « bouche-trou » qu'il avait dans 12850 et qu'on ne l'écrit pas; mais c'est là un argument qui n'est que formel. Faire mieux, c'est exploiter commutativité et associativité. Mais la commodité de cette virgule, qui se déplace avec aisance quand on multiplie ou divise des nombres décimaux par 10, 100, 1000, fera de tout cela un mécanisme vite acquis par les enfants. Le « Tu fais pareil » restera très puissant et absoudra tout. Cela semble même être l'optique des Commentaires qui, dans le paragraphe « Multiplication et division des décimaux par 10, 100, 1000 » sont fort laconiques, et se contentent de « De même ». Est-ce grave? Tout dépend du pourcentage, parmi les enfants d'intelligence honnête, de ceux dont l'intelligence recule à cause de telles lacunes dans la parole qu'ils reçoivent. Ce pourcentage est une grande inconnue.

On aura étudié les nombres décimaux, à l'école primaire, en ignorant que le nombre 0,1 est égal à la fraction $\frac{1}{10}$. Soit.

Cela pose pourtant la question suivante : comment *se lit* un nombre décimal? Les speakers de la radio disent : « 43 virgule zéro huit ». Les instituteurs s'efforcent de faire lire « 43 huit centièmes ». Il faudrait interdire cette façon de lire, et faire employer le mot *virgule*. Mais interdire est inélégant (et ne serait pas simple). En outre, lire « zéro virgule zéro huit », c'est plus épeler que lire; enfin la lecture « huit centièmes » sera déclarée bonne dès qu'on saura que $0{,}08 = \frac{8}{100}$.

Puisqu'on dit aux enfants que certaines fractions sont égales à des nombres naturels (§ 6.2.), on doit pouvoir dire aussi que certaines autres sont égales à des nombres décimaux : multiplier par 0,1 les nombres 70, 320, 20, cela donne les mêmes résultats qu'utiliser l'opérateur $\longrightarrow\left(\times \frac{1}{10}\right)\longrightarrow$. Mais il faudrait pour cela que 0,1 soit une notion claire pour les enfants, et que les multiplications par 0,1 le soient aussi. Or, d'après la définition des décimaux, le nombre 0,1 est réputé être le naturel 1 quand on prend la dizaine pour unité...

Tout cela n'est pas simple, et l'on peut se demander ce que cela donnera dans les classes. L'introduction des décimaux à l'aide de mesures avait bien des avantages. Ne pourrait-on prolonger la progression 1000 100 10 1 par un nouveau nombre sans craindre de s'aider de mesures, de changement d'unités (d'unités physiques, de longueur par excellence), de graduations sur une demi-droite? Un segment de longueur prise pour unité accepte de se partager en 10 segments de même longueur; le naturel 1 acceptera de donner naissance à un nombre n tel que $n \times 10 = 1$.

Retour sur les fractions.

A propos de mesure, justement, les Commentaires parlent d'un quart d'heure, d'un demi-litre, de trois quarts du chemin, et même d'un quart de beurre (qui était le quart de la livre de beurre), expressions qu'on écrira probablement avec des fractions. Comme une fraction est un opérateur et que cet opérateur agit sur des nombres, ces expressions sont sans signification. Les Commentaires déclarent pourtant qu'elles pourront donner lieu à des calculs. Est-ce reconnaître une vertu pédagogique aux 3/4 d'un segment, d'un cercle ou d'une tarte? Là encore, je me demande un peu quel sera l'effet de ce paragraphe dans les classes; il risque de faire perdre tout l'intérêt de la *fraction présentée comme opérateur*. Il est possible de faire la part du feu grâce au texte suivant :

« Dans ce qui précède, l'objectif a été de présenter la fraction à partir de la notion d'opérateur : prendre les $\frac{7}{4}$ d'un nombre. Il n'est pas interdit d'utiliser la même locution « prendre les $\frac{7}{4}$ de » à propos d'une longueur, d'un poids, d'une unité physique, d'une heure par exemple, et même à propos d'un objet géométrique, d'un cercle par exemple, comme cela se fait souvent. Mais il est essentiel que l'élève voie dans une fraction son rôle d'opérateur multiplicatif. »

Mathématique et motivation. Problèmes.

Je pense que la meilleure motivation de l'enseignement de la mathématique, c'est d'une part la mathématique elle-même, d'autre part l'intérêt que les enfants y prennent quand ils la pratiquent.

Les motivations « adventives » peuvent être dangereuses, autant que l'introduction coûte-que-coûte d'une leçon de mathématique dans le centre d'intérêt de la semaine. L'enseignement a certaines exigences, en particulier quant à la progression à faire suivre aux élèves.

Exemple. Cours Préparatoire. On parle de 12 *parce que* la date est mercredi 12 février, qu'on a écrite au tableau. « Qu'est-ce qu'on écrit quand on écrit mercredi? » Le jour de la semaine. « Et février? » Le mois. Bien. « Qu'est-ce qu'on fait quand on écrit 12? » On compte les jours du mois. Là, c'est nettement moins bien. On ne compte rien. On ne compte pas plus quand on baptise un jour *12* que quand on le baptise *mercredi*, pas moins, d'ailleurs : que le vocable placé sur un jour soit *mercredi* ou qu'il soit 3 (le 3e vocable d'une certaine liste bien connue), ce n'est qu'un changement d'étiquette. La notion de nombre est plus riche que le contenu de ces étiquettes.

Chercher une motivation avec une persévérance aussi constante que celle des manuels scolaires depuis des dizaines d'années dans le calcul du prix de revient d'une clôture d'un champ à 3 rangées de fil de fer à tant le mètre, ou le kilogramme, avec des poteaux à tant la douzaine, tous les 3,50 m, espérons que cela disparaîtra progressivement, au fur et à mesure que le programme 1970 s'insinuera dans les écoles. On parviendra alors, et sans inconvénient, à ne passer aucun temps sur le célèbre : B = P.V. — P.A., bien plus omniprésent à l'École Primaire que les problèmes de robinets, et dont le rôle le plus clair est de faire chavirer des enfants qui avaient à peu près bien compris addition et soustraction.

Le jeu intellectuel que constitue la mathématique présente grandement assez d'attrait pour les enfants pour que tout habillage dit pratique, à supposer qu'il ne soit pas paralysant, soit superflu. Les « problèmes pratiques » ne sont pas exclus, bien sûr, mais ils doivent être tels que, une fois acquises les notions mathématiques nécessaires à leur résolution, ils n'embarrassent pas les enfants.

Pédagogie.

J'ai peu parlé de pédagogie, de façon d'enseigner. Ce n'était pas mon sujet. Mais c'est important, bien sûr. Deux exemples pourront suffire.

Le premier, un peu caricatural, de ce qu'il faut éviter :

« Papa a 8 cigarettes (les enfants écrivent 8); il en fume (les enfants écrivent le signe *moins*) cinq (les enfants écrivent 5) ». Une telle pédagogie donne à l'activité de l'enfant une allure de réflexe conditionné, elle est un dressage.

Le second, choisi parmi mille autres, a de tout autres mobiles pédagogiques :

Les enfants sont occupés à écrire la « table des 9 », qu'il faut bien apprendre en effet. Le maître contrôle leurs écrits. Il fait réfléchir sur les chiffres des unités des produits successifs, laisse les enfants se poser des questions, en poser à leurs camarades; dans quelques jours, le sujet a mûri, et il peut donner des explications, plus probablement les faire dire. Elles ont alors toute la valeur souhaitable de formation des intelligences.

Pour finir.

(Ou plutôt ne pas finir, car le sujet est inépuisable. Il faudrait, aussi, parler des « exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques », et des « exercices pratiques de mesure ».)

Quel est l'objectif des programmes de 1970 et des Commentaires qui les accompagnent? La réponse est claire : accès des enfants à l'activité mathématique, accès qui implique le bannissement du dogmatisme.

Les fondateurs de l'École Publique prévoyaient, pour les enfants du peuple, afin qu'ils sachent voter, qu'ils apprennent à lire, écrire et compter. Compter, c'était compter les sous, savoir faire face aux situations économiques dans lesquelles ils risquaient de se trouver, savoir calculer le prix de la clôture du champ, et, pour les filles, le prix de revient du pot de confiture, savoir épargner.

Maintenant, on les invite à pratiquer la mathématique.

La nécessaire introduction des mathématiques dites modernes se fera, après ce programme transitoire de 1970, de façon naturelle, dans le prolongement du mouvement ainsi commencé, quand les maîtres auront découvert le plaisir qu'il y a à s'évader, avec les enfants, de ces situations un peu « toujours pareil ».

Pour entrer dans la Marine Marchande

L'accès à une activité professionnelle à bord des navires de « commerce » ou de « pêche » est subordonné pour les jeunes gens intéressés à une formation professionnelle maritime préalable.

Celle-ci est donnée dans divers établissements scolaires maritimes, notamment :

Collèges d'Enseignement Technique Maritime

Au nombre de trois, ils préparent en trois années les jeunes gens au certificat d'aptitude professionnelle maritime qui permet d'occuper les emplois de mécanicien ou d'électricien de bord et suivant leurs aptitudes, de devenir soit officier chef de quart, soit officier technicien de la Marine Marchande.

Écoles d'Apprentissage Maritime

Au nombre de seize, elles sont ouvertes aux élèves âgés de 15 ans au moins et de 17 ans au plus.

Elles assument la formation du personnel employé à bord des navires et délivrent pour les diverses spécialités un certificat sanctionnant cette formation.

Pour toute précision quant à ces établissements scolaires et aux carrières maritimes, renseignements auprès de :

M. Kirous

Responsable de la Section Apprentissage Maritime

3, place de Fontenoy
75 - Paris-7e

De la Maternelle à l'Université ?...

L'A.P.M.E.P. édite un livre :

LA MATHÉMATIQUE
A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Ce livre concerne tous les professeurs de mathématiques. Ayez-le dans votre bibliothèque, faites-le connaître.

Ce livre sortira des presses en février 1972, mais vous pouvez dès à présent en parler autour de vous.

Le point de vue de professeurs de mathématiques en sixième

La régionale de Limoges.

Une discussion s'est organisée autour des problèmes suivants :

1° l'élève de sixième à la rentrée 1971 ; les effets de l'application du programme transitoire ;

2° l'élève de sixième tel que le souhaite le professeur ; la connaissance du programme transitoire est-elle suffisante ?

I) L'enfant qui est entré en sixième en 1971 est encore mal connu des professeurs ; aussi, les remarques ci-dessous porteront plus généralement sur l'enfant de sixième en face du programme actuel de mathématique en sixième.

Les professeurs regrettent que beaucoup d'enfants parlent mal le français, ne sachent pas lire les textes présentés sur fiche même lorsque le langage « technique » est simple, soient mal à l'aise dans le passage du langage français au langage mathématique, écrivent mal, dessinent mal, aient des difficultés dans l'organisation du travail écrit ce qui sous-entend une maîtrise spatiale insuffisante.

En ce qui concerne le calcul numérique, ils vérifient tous les jours que la connaissance des « techniques » opératoires n'entraîne pas la sûreté en calcul numérique. Dans certains établissements, on constate que l'application du programme transitoire a amélioré les résultats des enfants en calcul mental, lorsque ce calcul s'appuie sur les propriétés des opérations comme cela est dit dans les commentaires du programme du 2 janvier 1970. Par contre, lorsque, dans un souci de rénovation, l'instituteur insiste trop sur les notions d'ensemble et de relation, le calcul numérique est délaissé et l'emploi des symboles est souvent mal compris.

Parmi les ambiguïtés relevées, signalons :

— « dans » : « intérieur à » ou « élément de... » ?
— ensemble vide et zéro ;
— réunion d'ensembles et somme de naturels ;
— mesure et repérage ;

— ajouter et le résultat de l'addition (ce qui était dans les I.O. de 1945 si l'on donne à « égale » le sens de « signe séparant deux écritures d'un même objet »).

— le signe « = ». On voit encore trop souvent : $2 + 3 = 5 + 4 = 9$;

— le rôle des ( ) qui sont utilisées dans certaines classes pour éviter les ratures alors qu'elles ont un tout autre sens en mathématique;

— système métrique et mesure;

— système métrique et numération;

— flèches : déplacement ou relation?

— ficelle et ensemble;

— emplois bizarres de « être » et « avoir » dans les relations.

Bien que les classes de 6e de 1971-1972 soient assez hétéroclites en raison des origines différentes des enfants qui ont reçu des formations différentes, les professeurs ont pu constater que les élèves ayant déjà travaillé par groupes ou sur fiches s'adaptent plus facilement.

Tous s'accordent pour reconnaître qu'avant l'application du programme transitoire, les enfants entrant en 6e, ces dernières années, ne calculaient pas bien.

Au sujet de la rédaction des « problèmes », les professeurs regrettent un certain systématisme dans l'expression des réponses aux questions posées. Par exemple, si la question est : quelle distance Jacques parcourt-il en une semaine? La réponse est : En une semaine, Jacques parcourt 9 600 m. On souhaite une réponse plus synthétique, sa formulation dépendant essentiellement de la connaissance supposée des éléments du contexte; dans le cas ci-dessus, s'il n'y a qu'une question, cela se résumerait à : 9 600 m.

II) Les professeurs souhaitent que l'enfant sache s'exprimer correctement dans la langue maternelle. Tous les participants considèrent que « savoir lire, écrire et compter » est essentiel. Le programme transitoire qui est une remise en ordre de l'ancien est très suffisant pour permettre à l'enseignant d'agir dans ses trois directions.

Les éléments de mathématiques du programme permettent un excellent entraînement au calcul numérique mental et rapide. Les diverses expressions : graphismes, diagrammes de Venn ou de Carroll, langue maternelle, habituent les enfants à la maîtrise des idées par des traductions nombreuses d'un langage dans un autre; codages et décodages. Passer du langage français aux langages graphiques assure la compréhension. A ce propos, les exercices sur les bases, *non systématisés*, mais utilisés comme *motivation*, expliquent la numération, les modes de calcul dans un système donné, y compris le système métrique.

Le calcul numérique est un outil nécessaire à l'analyse de nombreuses situations, de nombreux problèmes; il doit être très utilisé. Éviter le psittacisme pour les tables d'addition et de multiplication, mais veiller à la justesse des calculs par une répétition et des exercices numériques.

Les symboles conseillés en 6e ne doivent pas être présentés auparavant.

Se borner à l'École primaire à l'apprentissage des symboles du programme transitoire : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; =; ≠; <; >; (); ,; :; / et à leur application correcte en particulier pour « = ».

La notion de « retenue » dans une opération, si elle existe, ne doit pas faire l'objet d'une séance à part, elle est contenue dans les techniques opératoires.

Pour la géométrie, multiplier en activités d'éveil les exercices d'observation pour découvrir le vocabulaire adapté à chaque contexte et faire des constructions à l'aide des instruments de dessin : savoir aller de l'objet à sa (ou ses) représentation(s).

Pour la mesure, au C.M., bien voir l'usage des instruments : règle, équerre, compas, rapporteur, la notion d'incertitude d'une mesure et le vocabulaire adapté.

Le système métrique résultera de la convergence de deux sortes de travaux :

— l'expérimentation : usage des instruments;

— connaissance de l'outil numérique : naturels, décimaux, opérateurs numériques.

La notion d'encadrement vue au C.E. avec la relation d'ordre total dans les nombres sera appliquée au C.M. avec les mesures.

Une discussion sur l'écriture exponentielle (10^n) des naturels nous amène à penser qu'au C.M. on peut utiliser ou ne pas utiliser cette écriture pour les tableaux de numération.

Ce qui semble le plus important est la méthode de travail :

travail collectif : peu

— par groupes

— individuel sur fiche

afin d'obtenir

— initiative;

— créativité;

— lecture aisée et rapide des fiches.

Dans le bulletin rendant compte des journées de Clermont en mai 70 le nom de M. GUILLAUME, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont, Président de la Régionale de Clermont, a été oublié. C'est d'autant plus regrettable que Marcel GUILLAUME a été à la tête de l'équipe de l'organisation du congrès de Clermont. Nous lui demandons d'excuser la rédaction du *Bulletin* pour cette omission involontaire.

Les Bulletins en préparation

283 (avril 1972) :

Préparation des Journées de CAEN et de l'Assemblée Générale.

284 (juin 1972) :

La mathématique dans le premier cycle.

Si le *Bulletin* n° 279 a été presque exclusivement consacré aux nouveaux programmes de Quatrième, il est souhaitable que celui de juin 1972 ne soit pas consacré uniquement aux nouveaux programmes de Troisième. La partie consacrée à l'information mathématique sera allégée, car la partie Algèbre ne suscitera probablement plus de très longs développements; *par contre, les articles sur la Géométrie devront être complétés et ceux consacrés à des rapports d'expérimentation nombreux et détaillés.*

Mais ce *Bulletin* devra comprendre une partie importante non liée aux programmes mais à *l'enseignement de la Mathématique dans le premier cycle.* Certains collègues ont des idées de thèmes non traditionnels particulièrement adaptés aux élèves de ces classes. Dès maintenant, appel à eux en leur demandant d'envoyer de tels articles qui permettraient au *Bulletin* d'être plus ouvert sur l'avenir.

Adressez les articles à **P. BUISSON,**
17, rue du Maréchal-Joffre,
67-Strasbourg.
Avant le 20 février 1972.

285 (septembre 1972) :

Après les Journées de CAEN.

286 (décembre 1972) :

La mathématique et les autres disciplines.

Adressez les articles à **Maurice GLAYMANN,**
I.R.E.M. de Lyon,
43, boulevard du 11-Novembre-1918,
69-Villeurbanne.
Avant le 1er septembre 1972.

Commission de l'A.P.M.E.P.

sur l'Enseignement Élémentaire

Compte-rendu de la journée d'étude du 14 février 1971.

But de la journée.

Problèmes posés par l'application du programme 1945, rénové 1970, du 2 janvier 1970.

Thèmes proposés.

A. — Le programme du 2 janvier 1970 a-t-il été appliqué partout?
Si non : pourquoi?
Si oui : comment?

— Comment est interprétée l'application du programme aux divers niveaux : CP, CE, CM?

— Les commentaires ont-ils rendu service aux instituteurs?

— Quel rôle a joué la circulaire du 4 septembre 1970?

B. — L'information aux Inspecteurs départementaux de l'Éducation Nationale, aux instituteurs, aux maîtres itinérants d'école annexe (conseillers pédagogiques) est-elle organisée? Comment?

C. — La formation initiale et permanente des instituteurs est-elle possible dans les conditions actuelles?

— rôle des I.R.E.M. Cas des académies n'ayant pas d'I.R.E.M.,

— rôle de l'Enseignement Supérieur.

D. — Action de l'A.P.M.E.P. souhaitée.

Participants : 55 participants.

— Le Président de l'A.P.M.E.P. et plusieurs membres du Bureau National;

— M. Colmez, Directeur de l'I.R.E.M. de Bordeaux et d'autres représentants des I.R.E.M.;

— Les Inspecteurs généraux Beulaygue et Duma;

— Des Professeurs de Lycées, Écoles Normales (18), C.E.S., C.E.G.;

— Des I.D.E.N.;

— Des instituteurs, maîtres d'application ou non.

Programme : Matin.

Discussion des thèmes. Déjeuner en commun au Foyer des Lycéennes.

Après-midi.

Travaux de groupes.

Compte rendu du travail de la matinée.

1° Action antérieure du Bureau présentée par le Président de l'A.P.M.
— Adaptation des examens d'entrée en 6ᵉ et du C.E.P.E. aux nouveaux programmes. (Cf. *Bulletin* n° 277, p. 96 et 97).

2° Une réunion inter-I.R.E.M. a étudié le 2 février 1971 à Paris, les problèmes soulevés ci-dessus.

3° Examen des thèmes proposés :

A. — *L'application du programme est très inégale* selon les circonscriptions. Si certains signalent le rôle positif d'Inspecteur Départemental de l'Éducation Nationale par des initiatives heureuses, d'autres affirment que des responsables pédagogiques (I.D.E.N., Conseillers pédagogiques, Directeurs d'écoles) ont un rôle néfaste par inertie ou par opposition.

— *Action envisagée par le Ministère:* En 1971, une information de 6 journées sera donnée à tous les I.D.E.N.; une circulaire aux Recteurs est prévue pour débloquer les crédits nécessaires (elle a été effectivement envoyée le 24 mars 1971).

On relève qu'au Cours Préparatoire, l'application des programmes est à peu près totale, mais qu'au C.M. 2 on maintient en partie l'ancien programme; quelquefois sous la forme étrange : 1 heure de mathématiques dites modernes, 4 heures d'ancien calcul. Manifestement, les collègues qui enseignent ainsi n'ont pas lu les commentaires (ou ne les ont pas compris, s'ils les ont lus).

En ce qui concerne les exercices d'observations et les exercices sur les mesures, ils ne sont pas toujours intégrés aux activités d'éveil. On retrouve les décimaux étudiés à partir du système métrique.

Pour mettre en application le programme du 2 janvier 1970, la plupart des participants pensent qu'il suffit de lire et comprendre les commentaires; mais qu'une lecture ensemble (le samedi après-midi comme cela se fait par endroits) pour mettre en œuvre le nouveau programme, est très profitable. (De nombreux résultats d'expériences le prouvent.) Le contact entre les maîtres est souhaité par tous. Pour cette application, on regrette une absence d'information aux instituteurs sur le plan officiel, le nombre de programmes distribués aux enseignants est insuffisant, et aussi, un manque de liaison entre les formations initiales et permanentes. Parfois, lorsque ces liaisons ont pu être prévues, des directives d'origine syndicale ont empêché leur réalisation. C'est le cas de plusieurs académies n'ayant pas d'I.R.E.M.

A propos de la circulaire du 4 septembre 1970, tout le monde souligne son rôle de frein, aggravé par la circulaire sur l'enseignement du français de la fin de l'année 1970. En janvier, les réformes en français et en mathématiques semblaient compromises. M. l'Inspecteur général BEULAYGUE souligne que l'Inspection générale n'a pas été consultée pour cette circulaire. Si la sensibilisation a été bonne dans certains départements à la fin de l'année scolaire 1969-1970, une certaine démobilisation s'est produite après la circulaire du 4 septembre 1970. On peut craindre que certaines pressions existent pour que la réforme ne se fasse pas et, par là-même, les organismes qui ont exigé cette circulaire paraissent donner de bonnes raisons au Ministère pour ne rien faire. On regrette cette suite d'ordres et de contre-ordres : les programmes et commentaires du 2 janvier 1970 sont suivis de la circulaire du 4 septembre 1970, les journées pour les I.D.E.N. s'accompagnent d'une suppression de recherche en mathématique aux niveaux élémentaires et de 1ᵉʳ cycle.

B. — L'information donnée aux responsables de la pédagogie de l'enseignement élémentaire, insuffisante partout, est cependant plus importante dans les académies IREMiques que dans les autres académies. Des réunions ont été assurées par les I.R.E.M. (pour les I.D.E.N.) et ailleurs par les professeurs d'École Normale, par les P.E.G.C. dans les secteurs où il n'y a pas eu opposition syndicale locale. Ces réunions sont assurées, la plupart du temps, bénévolement par des collègues qui sont ennuyés de travailler dans ces conditions mais qui le font dans l'intérêt des enfants.

C. — La discussion a été très animée au sujet de la formation permanente et de la formation initiale entre les I.R.E.M. d'une part et des professeurs d'École Normale d'autre part.

Quelques remarques.

**I.D.E.N.* : Les journées prévues par le Ministère représentent un premier pas, mais le rendement risque d'en être faible. Ce sera une bonne sensibilisation, mais ce ne sera pas suffisant.

L'I.D.E.N. a un rôle fondamental dans sa circonscription (notation des maîtres et conseils pédagogiques), il ne pourra vraiment conseiller que s'il est vraiment informé. Le projet déposé au Ministère en février 1970 par M. l'Inspecteur général Beulayoue permettait cette information. Le Ministère ne l'a pas adopté parce qu'il estime qu'il coûte trop cher.

Une question reste posée : les I.D.E.N. ont-ils le temps matériel de s'informer dans toutes les disciplines? Cependant, la sensibilisation des I.D.E.N. semble s'imposer pour que l'enseignement mathématique à l'école élémentaire aille dans le sens de la marche.

**Maîtres itinérants d'École Annexe (M.I.E.A.) ou Conseillers pédagogiques.* Leur participation aux 6 journées n'est pas prévue, mais M. l'Inspecteur général Duma affirme qu'ils pourront y assister. Le remboursement de leurs frais ne peut pas être prévu par la circulaire du 24 mars 1971. L'assemblée déplore cet état de fait car, sur le plan pédagogique, les M.I.E.A. conseillent tous les remplaçants et suppléants, et orientent, de ce fait, la pédagogie dans une circonscription (en accord avec l'I.D.E.N. bien entendu).

**Professeurs d'École Normale (P.E.N.).* La plupart des présents regrettent le manque de liaison entre I.D.E.N. et P.E.N., ce qui entraîne un manque de cohésion au niveau de l'action pédagogique dans les départements. Les P.E.N. (en nombre limité) auront une information de 2 journées à Paris (3 et 4 mai 1971).

**I.R.E.M.* Beaucoup ont organisé des réunions pour les instituteurs.

Ils ont donné une information aux I.D.E.N. et M.I.E.A. volontaires. A Lyon, la formation permanente est organisée autour de l'école expérimentale de Francheville. A Bordeaux, après des essais d'école expérimentale, on est à la recherche d'un terrain d'expérience à l'école élémentaire. La réunion inter-I.R.E.M. du 2 février 1971 a jeté les bases d'une information et d'une recherche organisée par les I.R.E.M. à l'école élémentaire.

Le projet de Lyon qui affirme que la formation des I.D.E.N. est une chose mais qu'il faut généraliser une formation approfondie des instituteurs.

**Instituteurs*. Les participants demandent au Bureau National d'œuvrer pour former en priorité les gens qui enseignent.

Pour certains le caractère obligatoire de l'information peut faire disparaître le problème fondamental de la motivation et risque d'aboutir à un nouveau dogmatisme.

On regrette que les collègues instituteurs recherchent souvent des recettes, des manuels qu'ils pourraient suivre à la lettre. A leur décharge, rien n'est prévu officiellement. Le souhait de tous est qu'une véritable information suivie de concertations par un travail d'équipe au niveau de l'école d'abord, puisse s'organiser dans le cadre de leur horaire actuel.

Les instituteurs sont sollicités par plusieurs rénovations; le problème « spécialisation ou polyvalence » sera étudié lors d'une prochaine réunion. La Régionale de Paris organise ses journées de fin d'année avec la participation de l'Association Française des Professeurs de Français (A.F.P.F.); toutes les Régionales seront informées.

**Enseignement Supérieur*. Si le rôle actuel est parfois contesté, le vœu de l'Assemblée est qu'il participe à la formation de tous les enseignants. Il doit s'adapter à ce nouveau rôle. Ceci dans l'optique de la *continuité* chère à l'A.P.M.

**Écoles d'application et écoles expérimentales*. Les écoles d'application et les écoles annexes reçoivent les stagiaires, futurs instituteurs, pour les préparer à la mise en œuvre des programmes en vigueur. Peuvent-elles dans ces conditions, être écoles expérimentales? Les P.E.N. affirment que oui, lorsque le Chef d'Établissement de l'École Normale est acquis au rôle moteur de la recherche. Les I.R.E.M. chercheront leurs écoles expérimentales ailleurs (échec à Bordeaux avec une école d'application, réussite à Lyon avec Francheville qui n'est pas école d'application).

Dans une école expérimentale de 10 classes, certains pensent qu'il serait nécessaire d'avoir 15 maîtres titulaires, 1 (ou plusieurs) psychologue scolaire, 1 mathématicien.

Prévoir aussi des écoles témoins (ou à la rigueur unité-témoin) pour la réalisation de la réforme.

**Formateurs*. Un dialogue intéressant entre I.R.E.M. et P.E.N. aboutit aux options définies ci-dessous dans l'action demandée à l'A.P.M.

**R.T.S.* Elle est utile pour faire passer la réforme, mais l'écoute par les enseignants en est encore insuffisante. Son efficacité n'est certaine que si l'écoute est collective et suivie d'une discussion en vue de l'application dans les classes. Le problème des libertés des enseignants se pose à nouveau ici.

**Recherche pédagogique*. Elle doit continuer partout où elle est possible, c'est-à-dire où les maîtres sont volontaires. Or, dans les classes d'application, un tiers seulement des maîtres est favorable à cette recherche.

Une nouvelle recherche dont les hypothèses sont à déterminer doit être organisée pour l'étude du programme qui n'a pas encore vu le jour (cf. 1re Étape).

D. — *Action de l'A.P.M.* souhaitée par les participants :

1° Contacts avec l'Administration, du haut en bas de l'échelle, pour souligner à nouveau la continuité de l'enseignement mathématique de la Maternelle à l'Université, pour obtenir les moyens nécessaires à la mise en œuvre du programme du 2 janvier 1970 dans l'intérêt des enfants;

2° Contacts avec les syndicats (S.N.I. en particulier) et les parents d'élèves;

3° Création d'un I.R.E.M. au moins par Académie avec des écoles expérimentales dans l'enseignement élémentaire.

Création d'un corps de remplaçants titulaires et augmentation du nombre de postes de remplaçants.

Dotation des moyens nécessaires à l'information prioritaire des instituteurs.

4° Tout formateur doit conserver un demi-service d'enseignement et il ne doit rester dans ce métier qu'un nombre limité d'années. Dans son action, l'A.P.M. devra s'intéresser au statut nouveau des P.E.N. à cause de la suppression des classes du second cycle dans les Écoles Normales.

Remarque.

1° Cette action peut être menée à plusieurs niveaux :

— Bureau National, Régionales, Sections Départementales.

Une conférence de presse serait la bienvenue.

Conclusion des travaux de la matinée.

L'A.P.M. a déjà fait beaucoup pour que la réforme mathématique s'organise autour de la continuité de la Maternelle à l'Université; les participants demandent que son action soit maintenue et amplifiée pour obtenir le déblocage des moyens nécessaires à la bonne application du programme officiel du 2 janvier 1970.

Les instituteurs devront avoir la possibilité d'être effectivement formés au sein des I.R.E.M. Le progrès est lent, mais la réforme mathématique est irréversible.

Compte rendu des travaux de l'après-midi.

Sept groupes ont étudié les problèmes suivants (1) :

1° Liaisons A.P.M.-Syndicats, A.P.M.-Parents d'élèves;
2° Commentaires des commentaires du programme du 2 janvier 1970;
3° Priorités dans les commentaires;
4° Activités d'éveil et mesure;
5° Formation initiale et formation permanente;
6° Recherche à l'école élémentaire;
7° Examens 6e, C.E.P.

Formation initiale et formation permanente.

I. — *Rapports entre Enseignement Supérieur et Écoles Normales.*

Rappelons tout d'abord que 85 postes d'Enseignement Supérieur affectés à la formation des Élèves Maîtres restent non pourvus et que même dans le cadre d'heures supplémentaires, le Supérieur ne dispose pas de crédits au titre des Écoles Normales.

---

(1) Nous publions ici les textes qui ont été transmis à la Rédaction du Bulletin.

Par ailleurs, les situations locales peuvent être regroupées en deux catégories suivant qu'il y a un I.R.E.M. ou non en liaison avec l'École Normale :

— *Pas d'I.R.E.M.* :

A Blois sont assurées 2 heures de pédagogie et 2 heures d'enseignement de type Faculté.

A Orléans, 3 heures sont attribuées aux FP_2, par conséquent il n'y a pas d'enseignement de mathématique.

A Grenoble, les cours assurés par la Faculté se sont progressivement dégradés.

A Caen, 2 heures sont assurées en FP_1 et en FP_2 par des assistants de la Faculté. A la moitié de l'année, on constate un certain absentéisme mais par contre un sondage précis à l'E.N.G. montre que les élèves, s'ils ne voient pas bien comment utiliser ce cours, en ressentent la nécessité.

— *En cas d'I.R.E.M.* :

A Lyon : la formation des Élèves Maîtres est satisfaisante mais elle est assurée par des assistants travaillant à l'I.R.E.M. et intéressés par les problèmes du primaire.

A Paris : les Écoles Normales sont en contact avec l'I.R.E.M. ou avec la Faculté d'Orsay. La situation est satisfaisante, surtout en ce qui concerne les élèves issus de la série C.

De ce bref tour d'horizon, il ressort que la formation des élèves maîtres comporte deux volets : les cours théoriques, la liaison entre l'information mathématique et l'enseignement élémentaire qui incombe au professeur d'École Normale.

On peut penser que les cours de Faculté ne peuvent ni ne doivent être de haut niveau parce que les élèves sont issus de baccalauréats différents (de A à C) et qu'ils ne sont pas des « professionnels » de la mathématique à l'instar des étudiants. Ces cours ont pour but de donner ou d'amorcer une culture de base en liaison étroite avec les problèmes mathématiques de l'école élémentaire et à plus longue échéance de donner des connaissances minimales et des méthodes de travail pour un approfondissement de cette information, c'est-à-dire pour la mise en œuvre d'une formation permanente.

Pour cette information de base s'adressant aux élèves-maîtres, deux points de vue peuvent être adoptés : soit un cours magistral avec ses inconvénients (quel niveau adopter? dosage cours et travaux pratiques, liaison cours-pédagogie) soit partir des thèmes d'enfants, des préoccupations de l'école élémentaire pour aller vers la mathématique, mais ceci suppose la présence d'assistants intéressés par ces problèmes et travaillant en étroite relation avec les classes.

Au niveau des contacts entre personnes, on peut distinguer :

a) *Les contacts assistants-instituteurs :* si les gens s'ignorent c'est qu'il n'y a pas de relations interpersonnelles suffisantes. La mise en place d'équipes de travail composées d'instituteurs, d'assistants et de professeurs d'E.N. constitue vraisemblablement la solution de ces problèmes.

b) *Les contacts assistants-élèves maîtres :* de part et d'autre, il y a un problème de niveau. Pour les assistants, comment s'adresser à des normaliens dont le niveau mathématique est pour le moins inégal et dans l'ensemble assez bas? Pour les élèves-maîtres, acquérir une aisance suffisante pour être en mesure d'infuser leurs connaissances dans leur enseignement ce qui est bien souvent affaire d'imagination.

Un problème plus général mais sans aucun doute fondamental a été soulevé :

on parle beaucoup, à propos de formation des maîtres, de contenu mathématique, de niveau de formation mais beaucoup moins de la ou des façons de le faire passer. Les méthodes d'enseignement ne doivent-elles pas être reconsidérées? Ne pourrait-on pas analyser les processus d'apprentissage?

En conclusion de cette première partie et sur une suggestion de mettre en place un tronc commun assorti d'une option mathématique, l'accord s'est établi pour souhaiter que tous les instituteurs possèdent le même niveau mathématique tout au moins au niveau de la formation dispensée, chaque maître pouvant ultérieurement approfondir telle ou telle branche de son enseignement.

II. — *Problèmes des Écoles Normales.*

Le statut des professeurs d'E.N. est nettement posé dans le cadre de la formation des maîtres. Tout d'abord une authentique formation professionnelle des professeurs est réclamée. Si elle s'impose pour tous les maîtres de la Maternelle à l'Université, n'est-elle pas particulièrement urgente pour les professeurs d'E.N.?

Par ailleurs les classes de baccalauréat sont progressivement abandonnées, mais que deviennent les professeurs? Est-il souhaitable d'en faire des « spécialistes de la pédagogie »? Que signifie une telle locution? A quel « ronronnement » cela conduirait-il? Ne devrait-on pas concevoir le travail d'un maître en trois volets : la formation mathématique permanente, une activité d'enseignement, une participation à la formation des jeunes maîtres; quitte à porter temporairement son effort sur tel ou tel point, ce qui est l'attitude adoptée dans les I.R.E.M.

Le second problème posé par l'abandon des classes de baccalauréat est celui de leur remplacement qui n'est pas actuellement assuré — en d'autres termes, le problème des maîtres ne passant pas par l'École Normale —. Peut-on continuer à tolérer que 2 500 instituteurs remplaçants sur 50 000 aient une courte année de passage à l'École Normale?

Reste le travail de formation initiale des élèves-maîtres, c'est-à-dire la liaison Faculté-École Élémentaire et la formation pédagogique qui conduit à poser le problème de la concertation pédagogique — seul cadre où l'on puisse élaborer une pédagogie d'ensemble susceptible de guider un maître au lieu de la distribution actuelle de « pédagogies spéciales ».

D'autre part, à titre de motivation des élèves-maîtres, on souhaiterait pouvoir les plonger dans des classes suffisamment rénovées où ils se sentiraient désorientés. Ceci suppose que les Écoles Normales disposent de maîtres d'application actifs, curieux, en recherche constante et qui pourraient jouer un rôle analogue à celui des conseillers pédagogiques du C.P.R. Qu'en est-il actuellement?

Enfin, a été évoquée la possibilité de constituer des équipes composées de jeunes maîtres, de professeurs d'École Normale, d'assistants dans lesquelles les interventions de chacun seraient opportunes et qui remplaceraient avantageusement, pense-t-on, l'actuel découpage : théorie, observation, pédagogie.

III. — *Formation permanente.*

Pour les maîtres ayant reçu une formation initiale conforme au nouvel esprit de l'enseignement des mathématiques, les Écoles Normales devraient les revoir périodiquement pour des échanges, des mises au point, des compléments de formation.

Pour les autres maîtres, on sait que les stages de « recyclage » ont un départ difficile, mais là encore, la visite de classes profondément rénovées ne constituerait-elle pas une impulsion initiale puissante?

Sans aller, peut-être, jusqu'à adopter l'attitude du G.F.E.N. (1) qui consiste à laisser le groupe prendre en charge sa propre formation, on peut se guider sur les remarques suivantes : sonder le niveau mathématique ambiant, montrer à quoi servent les mathématiques, se fixer un niveau technique à atteindre et — peut-être — préciser les finalités de l'enseignement mathématique. En tout cas, ne pas parler de la mathématique dite moderne à des gens qui ne l'ont pas pratiquée mais leur donner le sentiment qu'ils font des mathématiques (par exemple à l'aide de travaux « programmés »).

En conclusion, commencer par montrer des classes rénovées et tenter d'obtenir qu'après leur stage les maîtres aillent les uns chez les autres en espérant qu'ils seront ainsi amenés à former des équipes de travail.

Sur la recherche mathématique dans l'enseignement élémentaire.

A) *Contenu. Hypothèses pédagogiques.*

L'étude de la nature du contenu mathématique doit tenir compte de l'âge des enfants. Il faut définir à partir de ce fait de grandes zones de travail :

Exemples :

— Logique; ensembles.
— Opérateurs.
— Nombres à virgule. Fractions.
— Etc.

Les méthodes actives s'imposent naturellement dans cette recherche.

Il faut penser que les résultats doivent être applicables à l'ensemble des élèves de toutes les classes, par tous les maîtres. Mais il est peut-être souhaitable de modifier la mentalité des enseignants : un même thème peut être traité de différentes manières, à différents niveaux.

Bien que cette recherche ait des interférences sur d'autres matières, il semble difficile à une même équipe de mener de front plusieurs expériences (accablement des maîtres). Peut-être pourrait-on pévoir qu'une école expérimentale soit utilisée pour plusieurs matières. La présence d'adultes présente des inconvénients sérieux dans une classe; il s'avère nécessaire que des moyens audio-visuels soient utilisés (utilisation de crédits I.R.E.M.-C.R.D.P.).

Les contrôles des résultats se font sur tests, traités par statistiques, afin par exemple de juger l'ordre et le succès des exercices et thèmes à enseigner. Mais il faut modifier la nature des tests, car les résultats sont actuellement faussés : on doit insister davantage sur la formation de l'esprit que sur les connaissances et le rythme.

---

(1) Groupe Français d'Éducation Nouvelle.

Dans l'animation d'équipes expérimentales, on doit prévoir :

— des assistants,
— des professeurs du secondaire et en particulier d'École Normale,
— des psychologues,
— des instituteurs,

avec intervention des sciences d'éducation pour contrôler la valeur des résultats.

B) *Implantation. Organisation.*

— Création d'une école expérimentale rattachée à chaque I.R.E.M., avec un statut spécial : il semble très difficile d'utiliser pour cela les écoles existantes, même celles d'*application.*

L'avantage de leur rattachement à un I.R.E.M. est lié à la grande souplesse de celui-ci, tant au point de vue crédits qu'organisation (en dehors de la hiérarchie). Il joue un rôle de catalyseur des animateurs, et permet un lieu de discussion libre privilégié.

Il est absolument nécessaire de prévoir des conditions de travail pour l'équipe.

— Aménagements de service (à créer).

Exemple : 3 instituteurs pour 2 postes.

Un exemple : à Francheville (I.R.E.M. de Lyon), actuellement, une demi-journée de décharge par semaine pour chacun de 2 instituteurs (1 suppléante).

— Les titulaires seraient détachés dans cette école expérimentale, et non titularisés dans ces postes.

Une question se pose alors : dans les académies où n'existe pas d'I.R.E.M., à quoi peut-on rattacher ces écoles expérimentales? Les C.R.D.P. ont très peu de moyens, en particulier dans les aménagements de service. Aussi doit-on insister pour que chaque académie soit dotée le plus rapidement possible d'un I.R.E.M., et que ceux-ci obtiennent la création d'une école expérimentale! En attendant, ne peut-on pas s'inquiéter des possibilités de crédits pour la recherche affectés à l'I.N.R.D.P. pour l'année 1971-1972!

C) *Diffusion.*

Des écoles témoins (voir Plan Beulaygue, p. 141) seraient installées, à raison d'une au moins par circonscription, avec des moyens de contrôle statistiques : elles serviraient d'intermédiaires pour la diffusion des résultats des recherches, en collaboration avec les C.R.D.P., les Écoles Normales.

Il est nécessaire de prévoir une synthèse inter-I.R.E.M. sur les programmes et résultats des recherches.

Actuellement, il n'y a pas de moyens de diffusion. De plus des difficultés apparaissent avec les maisons d'édition tant sur le matériel que le contenu des ouvrages.

Conclusion.

Demander officiellement que les I.R.E.M. aient vocation pour la recherche au niveau élémentaire (actuellement tout se passe à ce niveau, dans les I.R.E.M., d'une manière clandestine), avec extension des moyens, afin de ne pas nuire aux recherches des autres niveaux.

« Commentaire des commentaires ».

Ce rapport comporte des remarques faites par les membres de la commission et des informations recueillies dans leur entourage (I.D.E.N., Maîtres, Prof. E.N.). Certaines de ces remarques ne pourront trouver une réponse que lorsqu'une formation initiale aura été donnée aux maîtres.

On note que les commentaires sont :

1° parfois non utilisés,

2° souvent insuffisamment utilisés.

Les causes sont de natures diverses :

— Pour le 1° il s'agit :

— soit de l'ignorance de ces textes,

— soit d'un refus provoqué par une incompréhension du contenu et une préférence pour l'utilisation de fiches et livres.

Il serait *important* qu'une information soit faite tant auprès des I.D.E.N. que des Instituteurs sur le contenu et l'esprit de ces commentaires.

— Pour le 2° des causes sont à chercher sans doute parmi les remarques qui suivent.

Remarques d'ordre général.

— Le travail en groupe est nécessaire pour la compréhension et l'application des programmes.

— Le mélange des niveaux semble avoir dérouté.

— On ne voit pas la continuité d'un niveau à l'autre.

— Pas assez précis sur les détails.

— Pas assez explicites sur certains thèmes (ce qui explique que l'on s'enferme dans un système de fiches).

— La numération est bien comprise en général et devient parfois une « tarte à la crème » (un refuge). Il aurait été souhaitable de préciser l'importance et l'intérêt de ce thème.

— Donnent parfois l'impression d'empêcher des initiatives.

— Des exemples sur les techniques opératoires auraient été les bienvenus. A détailler.

— Tables d'opérations : satisfaisant.

— Transition entre C.P. et C.E. : comment débuter au C.E.? Il y a un risque d'abandonner le renouveau fait au C.P. et de revenir au pur traditionnel au C.E.

— A propos des opérateurs, il aurait été souhaitable de mieux préciser le problème. On assiste à de multiples exercices où le thème est totalement dénaturé. On passe complètement à côté de ce que l'on désirait (confusion trop fréquente entre opérations et opérateurs).

— Les commentaires sont jugés parfois trop techniques et pas assez psychologiques.

(La commission a arrêté son travail non par faute de problèmes, mais à cause des trains à prendre!)

Réflexions sur la mesure à l'école primaire.

Notre groupe (1 instituteur et 5 professeurs d'E.N.) s'est posé diverses questions non abordées dans les Commentaires des Programmes 1970.

1. *Progression suivie dans l'étude d'une mesure?*

Remarquons d'abord que le cardinal est une mesure d'un ensemble discret; au C.E. et au C.M., il s'agit de mesures d'ensembles continus.

Comme pour l'étude des cardinaux, il paraît souhaitable de commencer par de nombreux exercices non quantitatifs préparatoires à la notion de mesure : comparaisons de longueur (Jean est plus grand que Pierre), de poids (ce livre est plus lourd que ce cahier), de temps (Louis a mis plus de temps qu'André pour effectuer ce parcours), etc.

On dégagera ensuite l'idée que ces comparaisons peuvent se faire en utilisant des nombres et qu'il est utile, pour les besoins de la communication, de choisir une unité « normalisée ».

L'étude quantitative se fera en partant de mesures exactes. Mais on montrera, dès le début, que ce cas est exceptionnel et que l'encadrement est la règle générale; on l'appliquera en particulier à la mesure de l'aire d'un rectangle dont les côtés ne sont pas mesurés par des naturels ou des décimaux.

2. *Quelles mesures étudier, et dans quel ordre?*

Les programmes du C.E. indiquent simplement : mesures. Au C.M. ils précisent : longueur, aire, volume, temps, masse. Nous n'avons pas réussi à proposer un ordre dans l'étude de ces mesures. Certains pensent que la notion de masse, étudiée à partir d'une balance, est la plus simple. Pour les autres, les notions d'aire ou de longueur se prêtent davantage à des comparaisons, à des rangements. Pour tous, la notion de temps paraît la plus difficile; il semble souhaitable, au moins au C.M., de faire constater expérimentalement l'accord d' « horloges » basées sur des phénomènes différents : quantité d'eau écoulée d'une boîte percée, distance parcourue par une bille sur un plan incliné, nombre d'oscillations d'un pendule, déplacement de la « trotteuse » d'une montre.

3. *Y a-t-il des résultats à mémoriser?*

Il semble superflu, à propos des aires par exemple, de retenir des formules; l'important est d'avoir compris la méthode employée pour mesurer (quarrage d'un rectangle, comparaison d'un triangle et d'un rectangle). En conséquence, les problèmes proposés (en classe et aux examens) seront, aussi souvent que possible, résolus expérimentalement et non abstraitement; dans tous les cas, ils se rapporteront à des « travaux pratiques » (en accord avec les Programmes 1970).

Quant aux exercices de conversion, qui tenaient une large place dans le calcul traditionnel, ils ne sont pas déconseillés, mais ils seront considérés comme de simples applications des règles de numération.

Examens.

Examen d'entrée en 6e

Considérant que la nature des sujets ordinairement proposés aux examens conditionne l'enseignement donné dans les classes à l'issue desquelles se passent ces examens.

Considérant que le choix des sujets de l'épreuve de calcul à l'examen d'entrée en 6e inquiète beaucoup les instituteurs, et parfois les freine dans leurs essais de rénovation, même si l'examen n'est passé que par une petite partie de leurs élèves, la Commission souhaite que, dans un premier temps, et dès la présente année scolaire, les sujets retenus par les Inspecteurs d'Académie :

1) puissent à la fois être traités par les enfants ayant reçu un enseignement tel qu'il a été donné dans les C.M. 2 jusqu'à maintenant (afin qu'aucun enfant ne puisse être défavorisé) et par les enfants qui appartiennent à des classes expérimentales,

2) soient conformes au programme 1970 et à l'esprit des Commentaires qui accompagnent ces programmes.

Elle souhaite en outre que ne soit jamais adoptée la solution de 2 sujets distincts, l'un qui serait dit de mathématique traditionnelle, l'autre dit du programme 70.

C.E.P.E.

Considérant que le C.E.P.E. n'a plus aucune raison de survivre, la Commission estime qu'il n'y a pas lieu de présenter des indications spéciales concernant l'épreuve de calcul de cet examen. Le C.E.P.E., dans sa session réservée aux adultes, pourra sans inconvénients subsister tel qu'il est.

La préparation du C.E.P.E. par les élèves des classes de transition ne peut être que nuisible si elle est l'occasion d'un bachotage. Ou bien ces élèves seront remis dans le cycle normal et le C.E.P.E. leur est inutile, ou bien ils se dirigeront vers un C.E.T. ou en classes pratiques, et leur scolarité sera sanctionnée par un C.A.P. ou par le D.F.E.O.

Il faudrait cependant que l'entrée en C.E.T. ne soit pas fonction des notes obtenues au C.E.P.E. comme elle l'est dans certains départements.

Avec l'accord de M. l'Inspecteur Général Beulaygue, nous publions le rapport qu'il a présenté au Ministère de l'Éducation Nationale le 28 février 1970.

Ce plan devrait permettre la mise en place de la formation continue de tous les instituteurs; il est urgent que le Ministère prenne la décision de l'appliquer.

Maurice GLAYMANN.

Rapport de Monsieur l'Inspecteur général M. Beulaygue

sur l'information des maîtres du premier degré pour un enseignement rénové des Mathématiques à l'École Élémentaire.

I. Exposé des motifs.

Un programme de Mathématiques, à caractère provisoire, destiné à l'école élémentaire, a fait l'objet d'un arrêté ministériel du 2 janvier 1970.

La circulaire qui l'accompagne précise que ce programme provisoire doit être remplacé par un programme véritablement rénové, dès que le personnel du Premier Degré sera en mesure de l'enseigner. Cela nous fait obligation d'entreprendre, au plus tôt, un immense effort d'information des maîtres du Premier Degré du double point de vue mathématique et pédagogique.

Actuellement, à travers la France, bénévolement le plus souvent, de nombreux professeurs participent au recyclage de leurs collègues du Premier Degré. Ces actions, dues en général à des initiatives individuelles, sont fort méritoires. Elles ne sont évidemment pas à l'échelle de nos besoins.

Les stages en situation des normaliens de 4e année permettront d'accueillir dans les Écoles Normales, pour une mise à jour de toutes leurs connaissances, quelques milliers d'instituteurs ou d'institutrices tous les ans. Sans être négligeable, cette contribution demeure sans commune mesure avec la tâche à accomplir.

L'information à donner aux maîtres concerne, en effet, 240 000 instituteurs ou institutrices de classes primaires ou maternelles. Par ailleurs, il ne s'agit pas ici d'un de ces réajustements que le temps impose périodiquement à tous les enseignements, mais d'une mutation profonde qui n'a pas son équivalent dans le passé. Il est clair, dans ces conditions, qu'une organisation spécifique, rationnelle et cohérente, pensée à l'échelon national, est nécessaire pour la mener à bien.

Ce rapport propose de préciser quelles pourraient en être les modalités.

II. Principes directeurs.

2.1. — L'information mathématique et pédagogique des maîtres du Premier Degré sera décentralisée au maximum. En particulier, les stages éloignés, à gros effectifs, onéreux et fatigants, dont les résultats ne peuvent être suivis, seront évités.

2.2. — Les instructions ministérielles fixeront seulement les grandes lignes de l'organisation, afin de lui laisser la souplesse nécessaire à une adaptation locale absolument indispensable.

2.3. — L'organisation s'articulera sur les structures administratives existantes :

— Recteur, assisté de l'I.R.E.M., du département de Mathématiques, de la Faculté et de l'I.P.R. de Mathématiques.

— Inspecteur d'Académie, assisté administrativement, le cas échéant, par un Directeur d'École Normale ou un I.D.E.N.

I.D.E.N. : Notons à propos de l'I.D.E.N. qu'il est, en fait, dans sa circonscription, responsable, à la fois de l'administration et de la pédagogie.

2.4. — Pour chaque maître, le recyclage se poursuivra durant une période de 3 années. Bien que le souci pédagogique soit permanent chez le maître, on peut estimer, d'une manière schématique, que la première année sera à dominante mathématique, la troisième à dominante pédagogique, la seconde réalisant un meilleur équilibre entre les deux tendances.

Si l'on compte une année de mise en place, c'est 4 années au moins, qui sont nécessaires pour venir à bout de notre tâche.

2.5. — L'information annuelle sera donnée aux maîtres, conformément au schéma suivant :

— un stage de mise en train de 2 jours :

— 16 séances de travail de 2 h 1/2 chacune, soit, en principe, une séance par quinzaine et par groupe de 20 participants;

— un stage de synthèse de 2 jours.

Cette information comprendra :

— Un enseignement mathématique théorique. On a constaté que les maîtres, au début de leur formation, souhaitent travailler au niveau de la classe, mais qu'ils éprouvent très vite le besoin de connaissances mathématiques plus solides et qu'ils sollicitent alors un enseignement mathématique théorique systématique, d'un niveau suffisant, qui leur permette de dominer leur enseignement.

— L'adaptation des connaissances nouvelles aux programmes et à la classe.

Le programme étudié avec les maîtres sera un programme rénové du type de celui que nous donnons en annexe à ce rapport, à titre indicatif, programme qu'il convient d'enseigner dès aujourd'hui dans les Écoles Normales.

— Une information sur les « expériences » novatrices, réalisées dans l'ensemble de la France, sous la responsabilité de l'I.P.N. ou des I.R.E.M.;

— Une information sur les matériels (Cuisenaire, Diénès...) et les manuels en usage;

— Une prise de contact avec les classes pilotes;

— Un travail en unité pédagogique, constituée par les maîtres d'une même école ou par des maîtres chargés d'un même cours.

III. L'Organisation.

Elle se développe essentiellement à 3 niveaux : la circonscription d'I.D.E.N., le département, l'académie.

3.1. — La circonscription.

3.1.1. — *La circonscription* est l'unité de base pour la formation des maîtres et pour la mise en place, dans les classes, de l'enseignement rénové. Elle est animée par l'équipe de circonscription, constituée par l'I.D.E.N. — responsable — assisté de 2 conseillers pédagogiques en mathématiques, de professeurs volontaires rétribués (le cas échéant) et disposant d'une école pilote.

3.1.2. — *L'I.D.E.N.* a la responsabilité d'ensemble dans sa circonscription. Il est soumis à 2 stages de 3 jours par an à l'Académie.

Il assiste régulièrement à la formation donnée, au niveau du département, aux Conseillers Pédagogiques en mathématiques. C'est là une obligation, l'Inspecteur devant être informé de ce que les Conseillers apprendront aux maîtres placés sous son autorité.

3.1.3. — *Le Conseiller Pédagogique :*

— Il est choisi, en principe, parmi les professeurs de C.E.G. (section III) ou parmi les instituteurs. Il doit avoir une bonne connaissance des mathématiques et des problèmes du Premier Degré.

— Il est désigné par le Recteur (sur proposition de l'I.A.) pour une période de 3 ans. Une inspection spécialisée, à l'initiative de l'I.A. et confiée, par exemple, à l'I.P.R., pourra précéder sa proposition.

— Sous l'autorité de l'I.D.E.N. responsable, le Conseiller Pédagogique en mathématiques a deux missions essentielles :

Encadrer les séances d'information des maîtres d'une circonscription, soit 200 maîtres en moyenne, constituée en 10 groupes de 20 maîtres chacun. Chaque semaine, il pourra réunir 5 groupes pour une séance de travail de 2 h 1/2 pour chaque groupe.

Suivre la mise en place progressive, dans les classes, de l'enseignement rénové et conseiller individuellement les maîtres à ce sujet.

— Pour être efficaces et régulièrement suivies par les maîtres, les séances d'information devraient avoir lieu pendant les heures de classe, c'est-à-dire pendant les heures de présence obligatoires à l'école.

Le cadre de l'information permanente donnera peut-être à ce problème une solution satisfaisante.

En attendant, compte tenu de l'urgence et du désir très général des maîtres de recevoir, sans délai, une information mathématique nouvelle, nous pensons que les 5 séances hebdomadaires d'un Conseiller de circonscription pourraient avoir lieu : le jeudi matin, le jeudi après-midi, le samedi après-midi, et pour 2 autres jours de la semaine, l'après-midi après la récréation.

Précisons bien qu'il s'agit là seulement de suggestions. En fait, une liberté très grande sera laissée aux I.D.E.N. pour rechercher des accords directs avec les maîtres et fixer, pour les séances de travail, des horaires tenant compte des vœux personnels et des situations locales.

On se contentera de préciser, par exemple, que les dispositions adoptées ne pourront avoir pour conséquence d'abréger la classe de l'après-midi, pour un enfant donné, plus d'une fois par mois.

3.1.4. — *Le professeur volontaire rétribué :*

Il donnera quelques heures en plus de son service normal. Choisi par l'I.A. en raison de ses qualités et de son désir de s'associer à l'œuvre de rénovation, il sera rétribué en heures supplémentaires. Il pourra participer à l'information générale ou être chargé de suivre plus particulièrement le travail d'une équipe pédagogique donnée : le personnel d'une même école par exemple.

3.1.5. — *L'école pilote :*

C'est une école de circonscription, animée par des maîtres volontaires, ayant fait leur reconversion, comprenant pour le moins, une suite complète de classes d'école primaire (CP, CE_1, CE_2, CM_1, CM_2) et assurant aux élèves la continuité des méthodes et des contenus.

L'équipe départementale en assurera la responsabilité mathématique et pédagogique.

Ces classes pourraient recevoir la qualité de classes d'applications temporaires. Les écoles annexes ou d'application jouent le rôle d'écoles pilotes pour les Directeurs ou les Directrices d'Écoles Normales.

3.2. — Le département.

3.2.1. — *Son rôle :*

Information mathématique et pédagogique *continue* des Conseillers Pédagogiques de circonscription et des I.D.E.N., à raison de 2 stages de 2 jours et de 16 séances de 2 h 1/2 chacune, par année.

Mise au point des plannings de travail dans les circonscriptions dans un souci d'homogénéité.

Rédaction et diffusion de la documentation destinée aux maîtres, qui sera, si possible, la même dans tout le département.

Information ponctuelle dans les circonscriptions, à la demande, ou tout au moins, en accord avec l'I.D.E.N. intéressé.

3.2.2. — *Les responsables :*

Responsabilité administrative : naturellement assumée par l'I.A. qui pourra la déléguer à un I.E.N. ou à un I.D.E.N.

Responsabilité Mathématique et Pédagogique :

En principe et pour l'essentiel, un professeur d'E.N., chargé de la formation professionnelle. Il est nécessaire que soit associé à sa tâche le professeur d'Enseignement Supérieur qui assure la formation mathématique des stagiaires. Le professeur d'École Normale sera désigné par le Recteur sur proposition de l'I.A., le Recteur pouvant toujours demander l'avis de l'I.P.R. ou de l'I.R.E.M.

Il consacrera un demi-service à 6 inspecteurs départementaux et à leurs conseillers.

3.3. — L'Académie.

Sous la responsabilité du Recteur, l'I.R.E.M. ou le département de Mathématiques de la Faculté en tenant lieu, prend en charge l'information continue des responsables départementaux, afin de garantir la qualité et l'homogénéité des formations données dans les départements de l'Académie.

L'I.P.R. sera associé à leur travail.

L'I.R.E.M. assure :

— aux I.D.E.N. : 2 stages annuels de chacun : 3 jours;

— aux responsables départementaux : 12 séances annuelles de 2 h 1/2.

L'I.R.E.M. rédige et diffuse les documents de travail à l'usage des responsables départementaux.

3.4. — L'I.N.R.D.P. et les C.R.D.P.

3.4.1. — Un C.R.D.P. n'a pas vocation pour enseigner les mathématiques ou leur pédagogie. C'est un centre d'accueil et de documentation pédagogique.

Les C.R.D.P. ont rendu des services précieux à la cause de la rénovation pédagogique en mathématiques à un moment où cette rénovation n'était pas organisée. Ils doivent retrouver leur vraie place et continuer à mettre leurs locaux, leurs moyens et leur compréhension qui est grande, au service de la formation et de l'information des maîtres à tous les niveaux. Par voie de conséquence, les professeurs de mathématiques détachés dans les C.R.D.P. doivent réintégrer leur chaire.

3.4.2. — L'I.N.R.D.P. dont la mission première est de recherche pédagogique, pourra conserver, dans ce but très précis, des correspondants en province.

En ce qui concerne l'Enseignement proprement dit, l'I.N.R.D.P. ne saurait agir directement au niveau des maîtres ou des classes, si ce n'est par les émissions de télévision. Ces émissions, lorsqu'elles sont faites dans le cadre des programmes officiels, doivent être mises au point en collaboration avec les I.R.E.M. et les corps d'inspection.

IV. Les moyens nécessaires.

Ils résultent naturellement de l'organisation exposée ci-dessus :

4.1. — Les animateurs de circonscription doivent assister 860 I.D.E.N. et 130 I.E.N., soit 1 000 inspecteurs départementaux. On doit donc disposer de 2 000 animateurs pour l'ensemble de la France.

4.2. — A l'échelon départemental, le professeur responsable donne 1/2 service à un groupe de 6 inspecteurs et de leurs conseillers.

80 services complets de professeurs d'E.N. sont donc nécessaires.

4.3. — Pour la rétribution des professeurs volontaires, des heures supplémentaires seront mises à la disposition des I.A., à raison de 2 heures par animateur de circonscription, soit, au total, 4 000 heures supplémentaires par année.

4.4. — Ces moyens devraient être mis en place à la rentrée de 1970.

En fait, cela se fera progressivement, au fur et à mesure que l'on disposera de conseillers de circonscription qualifiés.

Certaines académies, telles que Lyon ou Rennes, ont formé un nombre suffisant de conseillers. Elles pourraient commencer un recyclage systématique des maîtres dès septembre 1970. Il est indispensable que les moyens de le faire leur soient donnés.

En ce qui concerne les autres, il est très souhaitable que les I.R.E.M. ou les départements de Mathématiques des Facultés considèrent la formation des animateurs de circonscription, comme prioritaire, afin que l'information des maîtres du Premier Degré soit généralisée à l'ensemble de la France à partir de septembre 1971.

V. Conclusion.

Les moyens d'action prévus dans ce rapport représentent des sacrifices financiers considérables. Nous en avons pleinement conscience. Nous demandons néanmoins, que ces sacrifices soient consentis et *cela pendant une période de 4-5 ans*.

C'est que l'enjeu est d'importance.

Les instituteurs ne sont pas des spécialistes. Ils sont polyvalents et se doivent également à toutes les disciplines qu'ils enseignent. En dépit de leur bonne volonté, s'ils sont aidés seulement par quelques stages épisodiques, par quelques professeurs bénévoles, par quelques émissions de T.V., par quelques ouvrages, ils n'arriveront pas à restructurer correctement leur culture mathématique et la rénovation des mathématiques à l'École Élémentaire se réduira à l'introduction dans la classe d'un vocabulaire prétentieux et de recettes détestables. Les idées, l'esprit des mathématiques contemporaines — c'est-à-dire l'essentiel — en seront absents et la formation mathématique des enfants en sera compromise.

Ces graves raisons nous déterminent à insister vivement pour que nous soient donnés les moyens d'entreprendre, avec des chances sérieuses de succès, l'information mathématique des maîtres du Premier Degré, les moyens d'entreprendre la mutation véritable de l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire qui s'impose aujourd'hui, c'est-à-dire d'assurer une base solide à la formation scientifique de nos adolescents et à promouvoir, en fin de compte, le niveau scientifique de notre pays.

M. Beulaygue,
Inspecteur général
de l'Instruction publique.

Matériaux pour une bibliographie

G. WALUSINSKI

Remarque préliminaire.

La sélection présentée ci-dessous, parce qu'elle voulait éviter au lecteur de se perdre dans une liste trop longue, conduit sans doute à d'injustes omissions. Si je plaide coupable, je demande cependant le bénéfice des circonstances atténuantes : comment pourrais-je tout lire?

Les noms des auteurs (en petites capitales), les titres des ouvrages (en italique), les indications matérielles (nombre de pages, éditeur et prix de vente quand je les connais) sont parfois suivies, entre crochets, d'une brève indication sur le contenu, ceci écrit sous ma seule responsabilité; donc celle des auteurs n'est pas engagée.

Le titre est précédé d'un numéro d'ordre (relatif à cette liste) ordre engendré par l'ordre alphabétique des auteurs suivi d'un signe selon le code suivant :

o Considérations générales sur l'enseignement.

△ Ouvrages destinés aux maîtres et dans lesquels ceux-ci trouveront des suggestions pour la rénovation de leur enseignement; l'addition d'une étoile, soit △ *, indique que l'ouvrage fait une place importante à l'information mathématique des maîtres.

⌑ Manuels, ouvrages destinés aux élèves.

A. ADAM, N. NICOLAS et H. GOUZOU

1 ⌑ *Vers la mathématique moderne*, trois cahiers de 48 pages pour le C.E. (Édition Armand Colin).

BANDET, SARAZANAS et ABADIE

2 △ *Vers l'apprentissage des mathématiques*, un « cahier de pédagogie moderne » qui relate des expériences pratiquées à la Maternelle (Édition Armand Colin).

B. BEAUVERD

3 △ *Avant le calcul*, un « cahier de pédagogie expérimentale et de psychologie de l'enfant » (n° 21), avec une préface de J. PIAGET (Édition Delachaux et Niestlé).

C. BLANZIN, J. C. FAUQUETTE et G. QUETTE

4 ⌑ *A la découverte de la mathématique*. Livrets pour le C.P. et fiches-guide pour les maîtres (Éditions Magnard).

5 ⌑ Trois cahiers pour le C.E.1, trois cahiers pour le C.E.2 accompagnés de deux livrets pour les maîtres (Édition Magnard).

6 ⌑ *Mathématiques nouvelles pour les éducateurs*, une série C.P.-C.E.

7 △ * *Initiation programmée aux mathématiques nouvelles.*

S. Brays et M. Clausard

8 △ *Initiation mathématique à l'école maternelle :* description de jeux et de manipulations utilisant les blocs logiques (Édition O.C.D.L.).

G. Brousseau

9 ⌑ *Les mathématiques au Cours Préparatoire* (Éditions Dunod).

Colomb et Glaymann

10 △ * *Logique, ensembles et cartes perforées* (Édition O.C.D.L.). Guide pratique pour l'utilisation des cartes perforées et des blocs logiques à partir du Cours Préparatoire ; nombreuses suggestions d'exercices.

C. Corne et F. Robineau

11 △ *Les mathématiques nouvelles dans notre vie quotidienne* (Édition Casterman, poche). Notions de logique et sur les ensembles à partir de situations familières ou débouchant sur elles.

Z. P. Dienes

12 △ * *Construction des Mathématiques* (Édition P.U.F.).

13 △ * *Comprendre la Mathématique* (Édition O.C.D.L.).

14 △ *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique* (Édition O.C.D.L.).

15 △ *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire* (Édition O.C.D.L.). Dans ces ouvrages, l'auteur présente sa théorie de l'apprentissage mathématique et l'illustre par des exemples aux niveaux élémentaires.

16 ⌑ *Exercices logiques* (Édition O.C.D.L.).

17 ⌑ *Initiation à la géométrie* (Édition O.C.D.L.).

C. Duballet

18 △ * *Mathématique moderne ; son enseignement à l'école maternelle et élémentaire ;* 416 pages (Édition SUDEL, prix 24 F). Ouvrage spécialement conçu pour l'information des maîtres ; avec des exercices corrigés.

M. Dumont

19 △ * *Étude intuitive des ensembles* (Édition Dunod). Conçu pour être utilisé par des élèves du premier cycle secondaire, l'ouvrage sera consulté avec profit par les maîtres.

Evariste Dupont

20 △ * *Apprentissage mathématique I* (Édition Sudel). Ouvrage spécialement écrit pour l'information des maîtres ; pour se le procurer voir ci-dessous la note de la Régionale Parisienne (page 151).

DUVERT, GAUTHIER, GLAYMANN

21 △ * *Travaux pratiques de mathématique* (Édition O.C.D.L.). Quatre recueils de fiches pour la formation permanente des maîtres : 1 : Ensembles; 2 : Relations; 3 : Lois de composition; 4 : Structures.

FAUVERGUE et BRIANÇON

22 △ * *Initiation à la mathématique moderne* (Édition Hachette). Le premier tome est consacré à l'information de base, le second suggère de nombreuses utilisations de ces connaissances dans la pratique de la classe.

L. FÉLIX

23 △ * *L'aspect moderne des mathématiques.*

24 △ * *Mathématique moderne et enseignement élémentaire* (Éditions Blanchard).

Elise FREINET

25 o *Naissance d'une pédagogie populaire* (méthodes Freinet). Collection « Textes à l'appui » (Édition F. Maspero, 360 p.).

E. GALION

26 △ * *Le langage mathématique*, Premier Séminaire International (Édition O.C.D.L.).

27 △ * *La concrétisation en mathématique*, Second Séminaire International.

E. GARRON

28 □ *Cahier Math-Équipe* (École Maternelle et C.P.; 4 cahiers) (CE1 et CE2; 4 cahiers) (CM1 et CM2, en préparation) (Édition Hatier).

C. GATTEGNO

29 △ * *Éléments de mathématiques modernes par les nombres en couleurs* (Édition Delachaux et Niestlé).

30 o *Pour un apprentissage dynamique des mathématiques* (Édition Delachaux et Niestlé). Recueil d'études par un des pionniers de la rénovation de l'enseignement mathématique.

R. GAUTHIER et A. GOURET

31 △ * *Logique et enseignement de la mathématique* (Édition O.C.D.L.-Hatier). La monographie Galion n° 1 spécialement écrite pour l'information des maîtres.

M. GOUTARD

32 o *Les mathématiques et les enfants* (Édition Delachaux et Niestlé). Travail mené avec des enfants jeunes, au Canada et en France, dans l'esprit des recherches de Gattegno, en particulier avec le matériel Cuisenaire.

33 △ *Mathématiques sur mesure* (Édition Hachette). Une brochure de 80 pages riche d'exemples vécus en classe.

C. HUG

34 o *L'enfant et la mathématique* (Édition Bordas). Compte rendu d'expériences réalisées à Grenoble ou Chambéry.

P. LANNE et R. LEBOULLEUX

35 ▲ * *L'approche mathématique au C.P.* (Édition A. Colin; un cahier de pédagogie moderne n° 48). En conseillant les maîtres et en leur suggérant des exercices, les auteurs apportent une sérieuse formation mathématique aux maîtres.

LAURE et TAILLANDIER

36 ¤ *Mathématique moderne au Cours Préparatoire* (Édition Sudel).

J. MANESSE et G. LECOUVEZ

37 ¤ *Math 001; l'éveil mathématique* (Édition Hachette). Cahiers pour le C.P., le C.E.1, le C.E.2.

PAPY

38 ¤ *Jeux de graphes; Jeux de nombres* (Édition Hachette). Deux cahiers pour les enfants de 6 à 11 ans.

N. PICARD

39 △ * *Mathématique et jeux d'enfants* (Édition Casterman-poche). Pour que certains qui ne le savaient pas découvrent qu'ils sont aptes à comprendre; pour l'information des adultes selon des méthodes qui ont fait leurs preuves avec des enfants.

40 ¤ *Journal de mathématique C.M.1 et C.M.2;* avec un fascicule pour les maîtres (Édition O.C.D.L.).

41 ¤ *Activités mathématiques* (I) (Édition O.C.D.L.).

R. POLLE

42 △ * *Notions de mathématique moderne* (Éditions Delagrave).

G. POLYA

43 △ * *La découverte des mathématiques* (Édition Dunod). Une analyse suggestive du mécanisme de la découverte avec beaucoup d'exemples recouvrant l'ensemble des mathématiques scolaires; un livre à consulter souvent et qu'on n'oubliera plus.

M. ROBERT

44 ¤ *Situations d'apprentissage en mathématique du C.P. au C.M.2* (Édition O.C.D.L.).

J. SAUVY, J. BOLON et C. BLANZIN

45 △ * *Initiation à la mathématique de base.* Un volume de 220 pages reprenant les fiches utilisées dans un des chantiers de formation permanente de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.; pour se le procurer, voir page 151.

M. A. TOUYAROT, M. TOURNIER, M. T. GERMAIN et C. HANEAU

46 ¤ *Itinéraire mathématique* (Édition Nathan). Maternelle, 3 cahiers; C.P., 3 cahiers; C.E., 3 cahiers, C.M.1, 2 volumes, C.M.2, 2 volumes. Un volume pour l'information des maîtres.

L. Vandendriessche

47 ⌑ *Mathématiques modernes à l'école primaire grâce aux nombres en couleurs de Cuisenaire* (Édition Delachaux et Niestlé). 1. C.P.; 2. C.E.1; 3. C.E.2; 4. C.M.1.

G. Walusinski

48 o *Pourquoi une mathématique moderne?* (Édition Armand Colin).

A. Warusfel

49* *Les mathématiques modernes* (Édition du Seuil).

Wheeler et Autres

50 △ * *Mathématique dans l'enseignement élémentaire* (Édition O.C.D.L.). Recueil traduit de l'anglais d'essais particulièrement suggestifs dus à des professeurs qui animent le mouvement de réforme en Grande-Bretagne, 360 pages. Prix : 33 F.

Annexe. Les publications de l'A.P.M.E.P.

A. *Bulletin :* 5 numéros par an; voir les conditions d'adhésion et d'abonnement page 7.

B. *Chantiers de Pédagogie mathématique*

Cahiers de formation permanente édités par la Régionale Parisienne, 13, rue du Jura, Paris-13ᵉ. Six numéros par année scolaire, prix 10 F au C.C.P. Paris 25 108 63 de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Demandez à l'adresse ci-dessus des fiches d'abonnement. La Régionale Parisienne assure la diffusion des ouvrages recensés ci-dessus 20 (prix 15 F) et 44 (prix 10 F).

G. W.

Une nouvelle possibilité offerte à nos adhérents

Vous pouvez vous abonner à la revue
« **Mathematica et Paedagogia** »
pour le prix très réduit de 17 francs sans aucune formalité compliquée.

Il vous suffit pour cela d'établir un chèque de virement au C.C.P. de l'A.P.M.E.P. : 5708.21 PARIS, *en précisant au verso* « Pour Mathematica et Paedagogia », votre nom et votre adresse complète.

L'A.P.M.E.P. se chargera de toutes les formalités et la belle revue vous sera adressée directement par nos amis belges.

Voici le début de la lettre que le ministre de l'Éducation Nationale a adressée le 15-11-72 à **M. Pierre Emmanuel**, de l'Académie Française, président de la Commission pour la réforme de l'enseignement du français :

Le 17 mai 1970, je vous confiai la présidence de la Commission pour la réforme de l'enseignement du français. Il y a donc plus d'un an que cette commission travaille, et elle a pu constater, au cours de sa réflexion, la multiplicité des problèmes à résoudre. Différente de la réforme de l'enseignement des mathématiques qui s'est employée à alléger et à modifier le contenu des programmes, la réforme de l'enseignement du français suppose un changement d'état d'esprit et une transformation plus profonde. Il lui faut du temps, et c'est pourquoi je n'ai pas fixé à son travail un terme immédiat.

Sans commentaire!...