Graphe de démonstration ; son rôle dans l'enseignement des mathématiques

par Stefan TURNAU

Dans cet exposé, je vais utiliser les termes "démonstration" et "démontrer" dans le sens suivant : la démonstration d'un théorème d'une théorie donnée est un ensemble d'énoncés formulés dans un des langages admis pour cette théorie, ensemble structuré d'une façon particulière par la relation d'inférence. Il ne s'agit pas de préciser la définition de cette relation. Il ne s'agit que d'être toujours assuré que B est conséquence de A, si la structure de la démonstration l'exige.

Démontrer, c'est trouver cet ensemble d'énoncés et cette relation. Autrement dit, c'est faire l'inventaire de ces énoncés et l'inventaire de toutes ces inférences, en omettant éventuellement celles qui sont formellement évidentes.

Chaque énoncé mathématique est toujours l'objet d'une interprétation pour les élèves, au moins au niveau secondaire. Autrement dit, l'élève dispose toujours d'un modèle plus ou moins précis. C'est une tendance très naturelle, atavique même, mais certainement saine, que de se fonder sur des faits plutôt que sur des informations. Cette tendance se manifeste aussi dans l'attitude des élèves envers la démonstration.

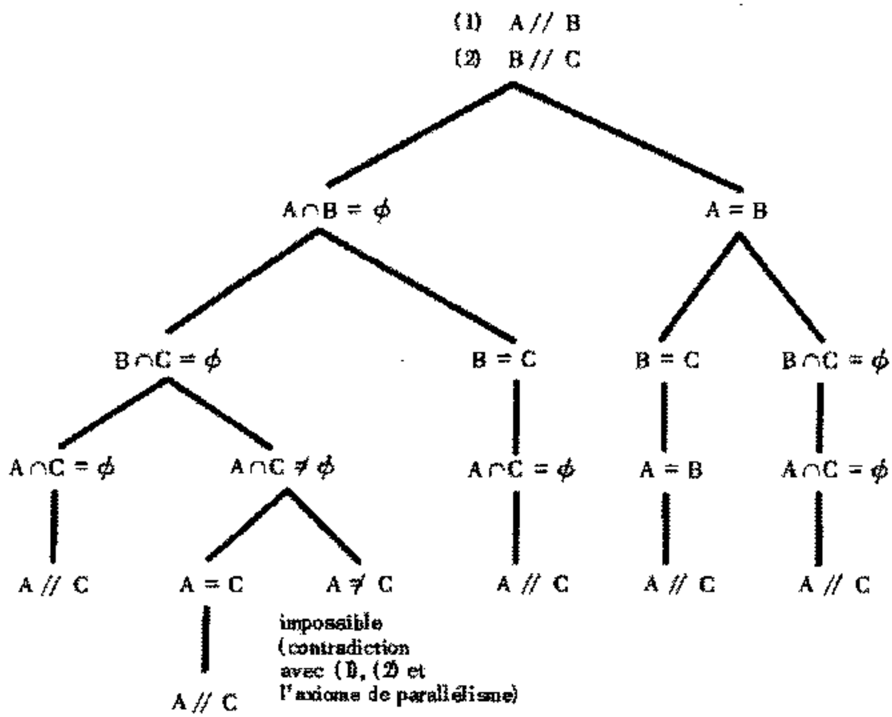
Une de mes expériences prouve que les enfants, s'ils le peuvent, préfèrent toujours constater la vérité des énoncés constituant une démonstration sur un modèle concret ou imaginé, plutôt qu'examiner les inférences entre ces énoncés. Cela ne veut pas dire qu'ils décident de leur préférence. Ils ne sont pas conscients de la différence entre les deux processus. Notre enseignement, habituellement, ne les aide guère à les distinguer.

La manière traditionnelle de présentation d'une démonstration — on ordonne les énoncés linéairement, en mettant à côté d'eux, ou entre eux, les explications — a deux défauts :

1° — La linéarité cache la structure de la démonstration qui n'est point de l'ordre du linéaire ;

2° — Cette présentation met en relief l'ensemble des énoncés en détournant l'attention des liaisons d'inférence qui sont au moins aussi importantes qu'eux.

Dans cet article, j'essayerai de prouver qu'il est plus profitable de présenter une démonstration sous la forme de graphe (1). Il arrive maintenant qu'on trouve des flèches dans les démonstrations des manuels et — plus rarement — en classe. En France, par exemple, on voit de plus en plus souvent des organigrammes de démonstration du type suivant :



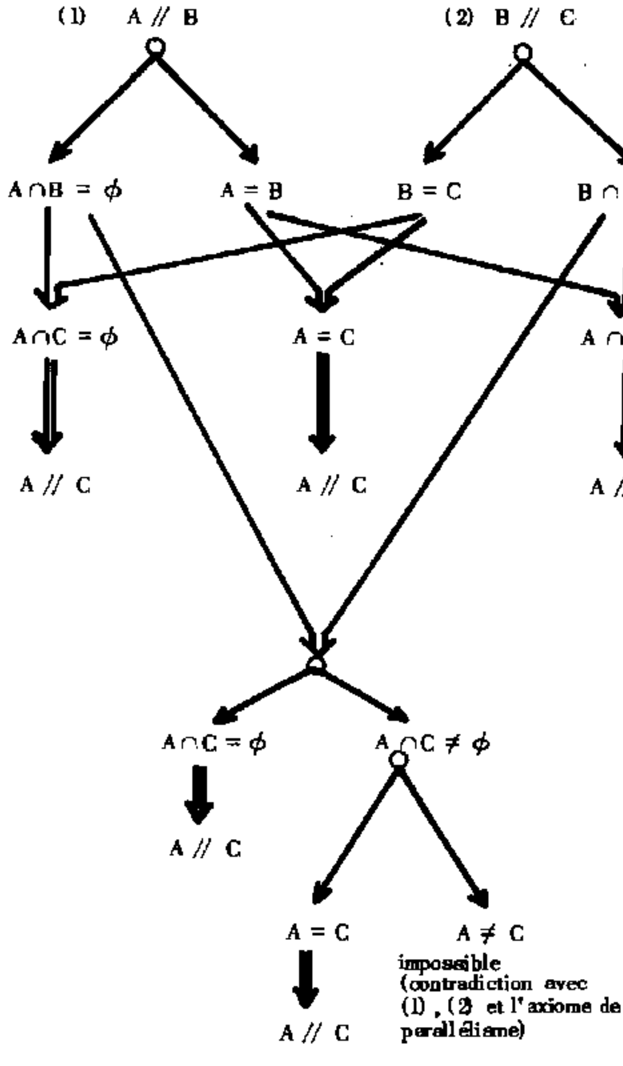
C'est, bien entendu, la démonstration de la *transitivité du parallélisme*. Ce diagramme ne présente qu'un programme de vérification de la conclusion du théorème. Ce n'est pas de ce type de graphe dont il s'agit ici.

Nous allons examiner les graphes dans lesquels les flèches signifient avant tout le rapport d'inférence.

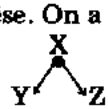
---

(1) "Graphe" est pris ici au sens de "schéma".

Voici un exemple :



Le graphe présente la démonstration du théorème précédent. Mais ici toute flèche partant d'un énoncé A arrive en les énoncés pour lesquels A est l'hypothèse. On a adopté la convention suivante :

Le dessin  signifie qu'on reconnaît Y ∨ Z, si on a reconnu X.

C'est dans les manuels de géométrie pour les Lycées Polonais de Z. Krygowska * que les graphes de démonstration ont été utilisés assez franchement et assez largement pour qu'on puisse les considérer comme réforme du langage mathématique à l'école. L'intérêt essentiel du graphe d'une démonstration est la visualisation de la structure de celle-ci. Quand on regarde une démonstration écrite (ou dessinée ?) sous forme de graphe, on voit tout d'abord les flèches, donc son schéma topologique. C'est ce schéma qui conduit la lecture, ordonne le texte, facilite la justification de chaque énoncé : on le retient comme "l'idée de la démonstration". C'est ce schéma enfin qui facilite et automatise presque le contrôle de la correction de la démonstration : l'omission d'un cas apparaît immédiatement. Les flèches du graphe jouent le rôle de métalangue. Elles remplacent notamment les explications verbales accompagnant d'ordinaire les démonstrations sous forme traditionnelle et qui sont nécessaires à établir le cheminement déductif. Cette nouvelle métalangue semble plus lisible : on voit au premier coup d'oeil que "X et Y" entraînent "Z" tandis qu'une telle information verbale fait chercher X et Y pour les comparer à Z.

Ce type de schéma rend non seulement possible mais encore facile la lecture dans l'ordre inverse, ce qui est très difficile avec la rédaction traditionnelle. On constate d'abord qu'il y a cinq conclusions, toutes souhaitables ; sont-elles légitimes ? A-t-on considéré tous les cas possibles ? On peut répondre en suivant les flèches de "bas en haut".

Un autre avantage pédagogique des flèches tient à des considérations sur la forme géométrique du graphe. Dans notre exemple, la symétrie de la partie haute du schéma suggère l'existence dans le raisonnement de fragments logiquement identiques. L'asymétrie de la partie basse indique un fragment singulier.

On peut compléter le langage des flèches par d'autres conventions, à condition qu'elles soient simples et opératoires. En voici une, employée également dans les manuels de Z. Krygowska :

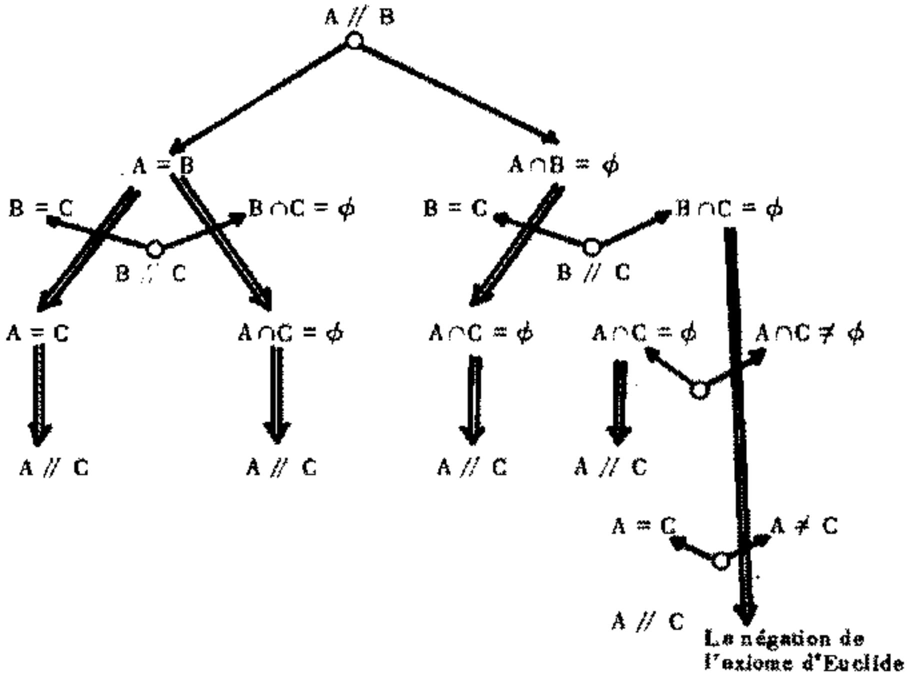
$$X \xrightarrow{Z} Y \quad \text{veut dire} \quad Z \Longrightarrow (X \Longrightarrow Y)$$

$$X \xleftrightarrow{Z} Y \quad \text{veut dire} \quad Z \Longrightarrow (X \Longleftrightarrow Y)$$

Rappelons aussi que $X \swarrow\!\bullet\!\searrow Y$ veut dire X V Y est vrai comme cas particulier d'une tautologie.

* Z. KRYGOWSKA : Geometria Podstawowe Wlasnosci plaszczyzky. P.Z.W.S.

On peut alors donner à la démonstration précédente le schéma



Cette convention abrège le dessin et permet même de schématiser des raisonnements plus complexes.

Dans certains raisonnements, soit on transforme séparément des parties d'un énoncé complexe, soit on profite de résultats partiels par substitution : pour ces raisonnements la simple transitivité de la déduction ne suffit pas comme loi logique. Pour les schématiser, une convention plus fine est nécessaire. On peut aménager la suivante : une flèche commence (resp. finit) près du symbole principal (symbole de prédicat, foncteur, quantificateur) de l'énoncé qui constitue son "point de départ" (resp. point d'arrivée).

Comme exemple d'application de cette convention, nous allons présenter un schéma de démonstration du théorème suivant* :

Théorème

Considérons une application numérique f, définie sur **R**, de période P. Supposons continue la restriction f^* de f à $[a, a + P]$. Alors f est continue en a.

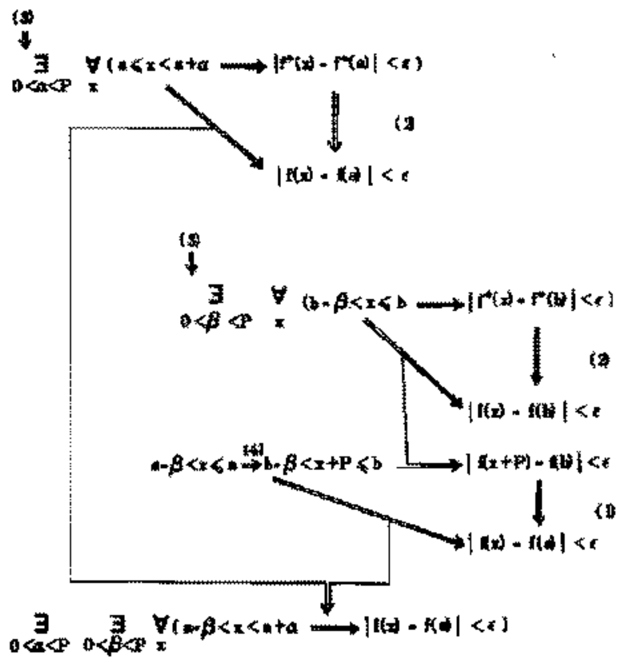
---

* Le théorème et l'idée de la démonstration sont issus du livre : "Mathématique" tome II, par E. RICHE, HATIER 1970, page 1962.

Les hypothèses :
(1) P est une période de f
(2) f* est la restriction de f à [a , a + P]
(3) f est continue sur [a , a + P]
(4) a + P = b

La conclusion : f est continue en a.

Démonstration



Ce type de démonstration est utilisé dans les classes de Lycées polonais depuis quatre ans, non seulement comme moyen de présenter une démonstration déjà faite, mais aussi pour construire cette démonstration. Une première esquisse, un peu chaotique, est ensuite améliorée, ce qui donne une bonne occasion de réfléchir à nouveau à la démonstration.

Bien entendu, il n'est pas possible de rédiger chaque démonstration sous la forme d'un graphe. Mais terminons par une remarque pédagogique.

Construire le graphe d'un raisonnement donné sous forme traditionnelle n'est pas du tout un problème purement graphique. Pour le résoudre, il faut faire une analyse précise du raisonnement. Il est inutile d'ajouter que c'est une manière de comprendre et d'apprendre sans larme une démonstration.