Agir, prévoir et mathématiser (1)

LE CALVEZ,
E.N.F. de Quimper.

I. Expériences sur l'initiation à la topologie.

Au niveau de l'enseignement élémentaire le but est de faire prendre conscience aux enfants de l'espace et de les préparer à une symbolisation des propriétés observées.

Maternelle.

1. *Intentions.*

Faire vivre aux enfants des situations précises comportant des notions de topologie (courbe fermée - courbe ouverte - intérieur - extérieur).

Courbe fermée en dansant une ronde.

Courbe ouverte : évolution en farandole.

Intérieur, extérieur : Jeu « dans la mare, sur la rive ».

Transitivité de la notion d'intérieur : jeu chanté « un fermier dans son pré ».

2. *Discussion des représentations données par les enfants.*

Représentations les plus fréquentes :

« Dans la mare, sur la rive » et la farandole.

« Dans la mare; sur la rive. »

Un élastique posé à terre limitant avec précision un domaine fermé, la représentation était facilement accessible aux enfants et les commentaires des dessins dénotaient une compréhension de la situation. Les termes d'intérieur et d'extérieur n'ont pas été utilisés; les enfants utilisant des expressions leur étant plus familières telles que « dedans » et « dehors ».

La farandole. Le chemin décrit par les enfants leur était facile à concevoir par l'idée de trace laissée sur le sol, ce qui les amenait à tracer une courbe ouverte serpentant parmi les tables de la classe dessinées pour servir de repère.

La ronde ne leur donne pas aussi bien la notion de courbe car elle est composée des enfants et conçue comme un ensemble discret et non continu.

Le fermier dans son pré.

---

(1) Notre collègue présente ici quelques réflexions sur des recherches faites avec la participation de normaliennes.

Faisant appel à des notions plus complexes :

1° Représentation de la ronde en tant que courbe fermée.

2° Idée d'intérieur de cette ronde.

3° Emboîtement des domaines limités par les deux rondes.

Très peu d'enfants de cet âge peuvent tenir compte simultanément de toutes ces notions, d'où le manque d'essais de représentation de leur part. Il faudrait un travail de préparation beaucoup plus approfondi pour y parvenir lorsque les enfants auront atteint la maturité nécessaire à l'introduction de toutes ces notions.

Cours préparatoire.

1. *Intentions.*

Mises au point des connaissances sur les notions de courbes fermées ou ouvertes, d'intérieur et extérieur et représentation de domaines limités par une courbe fermée.

1re partie : Distribution à chaque groupe d'un morceau de laine noué, libre recherche et représentation des résultats obtenus. Sur les représentations, coloriages.

2e partie : Travail sur fiche.
Recherche d'intérieur et d'extérieur de courbes.
Recherche de trajet sur des labyrinthes.

2. *Observation des réactions des élèves.*

Les exercices de la deuxième partie n'ont pas présenté de difficultés car les courbes présentées bien que tortueuses ne présentaient pas de points doubles (pas de recoupement).

Pendant la première partie, par contre, le morceau de laine pouvait être disposé de telle sorte que différentes portions se recoupent ou viennent en contact tangentiellement. Dans les représentations les enfants ne distinguent pas ces deux cas. En leur faisant suivre du doigt le contour de la laine et en faisant observer le mouvement de la main pendant le dessin on arrive à bout de la difficulté.

C.E.1.

1. *Intentions.*

Initiation à la notion de plan et représentation d'un cheminement sur le plan.

Après un parcours autour des bâtiments de l'école et une observation dirigée de ces bâtiments, reconstitution d'un plan sommaire (sans tenir compte des proportions) et représentation du parcours effectué.

2. Observation des réactions des enfants.

Pendant la première phase, ne pas oublier de prendre des repères bien précis et de relever l'orientation par rapport à ces repères, car, du fait du déplacement des enfants, ce qui était à leur droite peut venir à leur gauche et les désorienter.

Pendant la représentation sur la feuille de papier, la faire tourner sur la table pour que les enfants se retrouvent dans les conditions de l'observation (d'où l'utilité des repères).

A noter la difficulté des enfants à imaginer le plan comme une vue d'avion et leur tendance à représenter tout ce qu'ils voient (clocheton et fenêtres).

Le plan ayant été reconstitué, pas de difficultés pour la représentation du cheminement.

On peut donc penser que si les enfants ont des difficultés à lire un plan, ceci provient de la représentation qu'ils se font de l'espace réel, qu'ils voient de l'intérieur.

II. Expériences sur les relations d'ordre.

C.E.1.

Intentions : Représentation de la relation d'inclusion sur l'ensemble des lettres d'un mot.

Matériel utilisé : feuilles polycopiées portant les mots ; confiture, conte, roue, fortune, four, cuir, cri, frite, cour, rue,

Réactions des enfants : difficulté de compréhension de l'étude proposée. Le mot lui-même (suite de lettres) n'est pas inclus dans un autre; la situation serait la suivante : confit dans confiture, fort dans fortune... C'est l'ensemble des lettres d'un mot qui est inclus dans l'ensemble des lettres d'un autre mot.

Remède à cette difficulté ; faire découper les lettres d'un mot et faire composer d'autres mots à partir de ces lettres; travailler sur les mots composés par les enfants et étudier la relation « *...est composé avec des lettres prises dans...* ».

Dans une leçon suivante, on pourra chercher à organiser les observations et trouver des représentations pour cette relation.

C.E.2.

Intentions : Recherche d'exemples de relations d'ordre et utilisation d'un diagramme sagittal pour ordonner un ensemble de naturels.

Réactions des enfants : Les enfants proposent des exemples variés de relations analogues à la relation proposée, les invitant à se ranger par ordre de taille. A noter que la relation proposée est souvent un préordre (exemple : nombre de lettres d'un mot); les enfants associent souvent la relation et sa réciproque.

Le travail sur fiche, très intéressant pour développer les aptitudes au calcul mental, était un peu difficile pour les enfants; les naturels étant parfois présentés sous forme d'une somme et parfois sous forme d'un produit, les calculs étaient quelquefois difficiles à effectuer mentalement.

La simplification des schémas obtenus permettait de faire sentir l'intérêt de la transitivité de la relation.

C.M.1.

Intentions : Étude d'une relation d'ordre total, notion de plus petit élément et de plus grand élément de l'ensemble.

Réactions des enfants : Très actifs et très intéressés par le travail effectué en salle de gymnastique sur la représentation de la relation « *...est plus grand que...* » lorsqu'ils étaient disposés en cercle.

Des difficultés pour trouver d'autres représentations de la relation, l'exemple proposé ne s'y prêtant pas. A noter la confusion entre la relation et sa réciproque permettant d'attirer l'attention sur l'antisymétrie de ces relations.

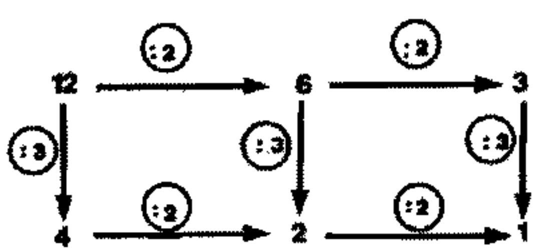
Une simplification du diagramme aurait permis de faire prendre conscience de la transitivité.

C.M.2.

Intentions : Étude de la relation « *...est multiple de...* » dans un ensemble de naturels et de la relation réciproque.

Réactions des enfants : « ...est multiple de... ». Représentations très variées de de la relation : schémas sagittaux, schéma cartésien. L'étude de « *...est diviseur de...* » les conduit, en utilisant les opérateurs de division, à l'obtention du réseau permettant d'obtenir tous les diviseurs à partir des diviseurs premiers.

Construction du treillis des diviseurs de 12 :



L'étude de tous les chemins possibles permet de mettre en évidence tous les diviseurs de 12.

Étude de l'ordre sur les codes.

C.E.1.

Intentions : Étude du codage des cardinaux, formation de la suite ordonnée des cardinaux écrits en base trois.

Réactions des enfants : Écriture des symboles en utilisant 0, 1, 2 faite de manière anarchique. La recherche collective tendant à mettre de l'ordre et à écrire systématiquement la suite est trop abstraite pour les enfants de cet âge; grosses difficultés pour comprendre que le suivant de 22 sera 100, la règle de formation étant compliquée et ne respectant plus l'ordre naturel des symboles utilisés.

Remèdes à ces difficultés : Prendre du matériel et construire la suite des cardinaux tout en observant attentivement ce qui se passe lorsqu'intervient une nouvelle puissance de la base.

Les exemples fournis par les enfants montrent qu'ils ont conscience du type d'ordre étudié mais non qu'ils ont dégagé le principe du codage impliquant ce type d'ordre.

C.E.2.

Intentions : Prise de conscience de l'ordre alphabétique et d'autres ordres possibles sur les mots.

Réactions des enfants : Ils dégagent facilement un pré-ordre sur les codes (tenir compte de la première lettre du mot, ou du nombre de lettres du mot). Il est beaucoup plus difficile d'obtenir la notion d'ordre sur les codes (tenir compte de la deuxième, la troisième... lettre ou combiner nombre de lettres et ordre alphabétique dans chaque classe) pour obtenir un ordre total sur les mots et pouvoir reconnaître s'il est possible d'intercaler des mots entre deux autres mots.

Remèdes à ces difficultés : Observation et utilisation de dictionnaires (dictionnaires ordinaires ou dictionnaires des mots croisés). Recherche de tous les mots que l'on peut former avec trois lettres : travail prématuré à cet âge car on obtient des mots dépourvus de signification.

C.M.1.

Intentions : Prise de conscience des différents ordres possibles sur les mots; recherche systématique de tous les mots possibles avec un alphabet de trois lettres.

Réactions des enfants : Confusion entre classer et ranger nécessitant une mise au point nette; puis découverte aisée de plusieurs rangements possibles.

Fabrication du dictionnaire complet à partir de trois lettres (dictionnaire genre mots croisés). A ce niveau les enfants acceptent les mots sans signification. Au départ, recherche par tâtonnement mais devant la difficulté (comment être sûr de les obtenir tous?), les enfants éprouvent le besoin de trouver une règle et d'organiser la recherche systématiquement. On recherche tous les mots d'une lettre, puis on construit à partir de cette première liste tous les mots de 2 lettres, puis de 3 lettres et les plus rapides vont jusqu'à 4 lettres. On remarque que la mise en place du système permet d'obtenir l'ensemble ordonné suivant l'ordre du dictionnaire des mots croisés.

Autre remarque intéressante : il est facile de prévoir combien de mots on obtiendra dans chaque catégorie, ce qui peut permettre une initiation à l'expotentiation.

La méthode de recherche peut aussi être une introduction à la représentation en arbre.

C.M.2.

Intentions: Recherche d'un codage permettant d'intercaler un élément nouveau entre des éléments rangés.

Réaction des élèves: Prise de conscience rapide des divers ordres possibles sur les mots.

Constatation de ce que certains codes (numéros d'immatriculation des voitures, numérotage des maisons) ne permettent pas d'intercaler autant d'éléments nouveaux que l'on veut. Tandis que d'autres procédés (ordre alphabétique sur les mots et codage des nombres à virgule) permettent l'introduction d'éléments nouveaux dans la suite.

III. Expériences sur les relations d'équivalence.

C.P.

1. *Intentions.*

Rechercher les différentes techniques qui conduisent à une partition d'un ensemble.

Relation : avoir telle propriété.

Relation : avoir même propriété que...

2. *Analyse des réactions des enfants.*

Sur une fiche sont dessinés différents animaux.

La première réaction des enfants est de les classer suivant un critère. Le travail est orienté vers l'étude de la nature du pelage.

Les enfants donnent une représentation sagittale de la relation de l'ensemble E (animaux) vers l'ensemble F (nature du pelage) et retrouvent les classes qu'ils avaient découvertes intuitivement.

A noter qu'ils éprouvent aussi le besoin de représenter la relation réciproque, mais ne sentent pas la nécessité de changer la nature des flèches schématisant cette relation.

La suite du travail consistant à faire apparaître la relation « avoir le même pelage » les amène à construire le diagramme sagittal d'une relation d'équivalence; mais il est à craindre qu'une certaine confusion entre les deux types de relations ne s'établisse dans l'esprit des enfants en traitant les deux sujets dans la même leçon.

L'analyse des propriétés de la relation d'équivalence est illusoire à ce niveau et risque d'entraîner de simples réflexes conditionnés.

En conclusion : le travail serait à prendre sur deux leçons; il serait préférable de rechercher une autre représentation de la première relation.

C.E.1.

1. *Intentions.*

Faire découvrir les propriétés de la relation d'équivalence par l'observation du schéma sagittal.

2. *Analyse des réactions des enfants.*

Les enfants réalisent d'abord une partition de l'ensemble considéré, puis sont amenés à construire un schéma sagittal d'une relation « avoir la même couleur »; par une observation attentive ils prennent conscience de la nécessité de certaines flèches qu'ils n'avaient pas introduites spontanément. Cependant, lorsqu'il leur est demandé de représenter seul le travail effectué collectivement, ils ont de grosses difficultés; ils n'ont pas encore atteint un stade permettant l'analyse abstraite qui leur est demandée. Il sera donc préférable de leur fournir d'autres expériences concrètes et de les faire travailler sur des contre-exemples.

C.M.1.

1. *Intentions.*

Étude d'une relation d'équivalence sur des couples.

2. *Réaction des élèves.*

Le travail, présenté de manière trop abstraite, n'a pas amené les enfants à envisager l'étude prévue. Ils ont tout d'abord confondu couple et nombre à virgule. En modifiant légèrement la présentation du travail et en la rattachant à une idée plus intuitive, il a été possible d'aborder l'étude proposée. Les enfants ont donné facilement une représentation sagittale complète de la relation

« représente la même somme que ». L'introduction du tableau cartésien les a amenés à une autre représentation de la relation.

Certains enfants ont proposé d'autres exemples à partir de la soustraction, de la multiplication et de la division.

Au début, pendant une période de libre recherche, un groupe s'était orienté vers une étude d'une relation d'ordre sur les couples.

C.M.2.

1. *Intentions.*

Mise en évidence, sur des exemples et des contre-exemples, des propriétés caractéristiques des relations d'équivalence.

2. *Réaction des élèves.*

Pour la plupart des élèves de cette classe, il s'agissait d'une première prise de contact pratique avec les diverses schématisations des relations. Les premières réactions étaient verbales : « on peut utiliser un diagramme sagittal » — « on peut faire des flèches » — « on va faire un schéma cartésien ». Cependant la réalisation pratique ne suivait pas. Il a donc fallu abandonner le projet initial et faire effectuer un travail plus en profondeur sur ces représentations.

Il est à noter que l'introduction de mots nouveaux plaît aux enfants mais qu'ils risquent de les utiliser sans en avoir une maîtrise sérieuse et que ce procédé semblant accélérer l'apprentissage n'est pas satisfaisant.

Il semble cependant que, lorsque les enfants domineront bien ces modes de représentations, il soit possible de leur faire analyser (par comparaisons d'exemples) des relations et de leur faire découvrir les propriétés caractéristiques de relations par cette méthode.

IV. Expériences sur la notion de cardinal d'un ensemble.

C.P.

Intention: Prise de conscience de la conservation des quantités.

Réactions des enfants:

Travaux sur les quantités continues: Matériel utilisé : pots de différentes tailles remplis de sable ou de grains de riz.

Lorsque l'on verse le contenu d'un petit pot dans un pot plus grand les enfants confondent la notion de quantité de matière avec la notion de plus ou moins plein, relative au récipient; bien qu'ils admettent que le contenu d'un pot soit entièrement versé dans l'autre pot, ils considèrent qu'il y en a plus dans le petit pot que dans le grand. La notion de quantité semble donc être relative au récipient utilisé.

De même, si l'on verse le contenu de deux petits pots de même contenance dans un pot plus grand, ils ne tiennent plus compte de la quantité de matière mais du nombre de récipients et disent qu'il y a plus dans les deux petits pots.

Lorsque l'on choisit des pots de sections différentes et que l'on verse la même quantité dans ces deux pots, ils considérent que lorsque la hauteur est plus grande il y a plus de matière.

Inversement, si l'on forme un tas de grains de riz et si on étale la même quantité, ils prétendent qu'il y a plus de riz dans le tas le plus étendu.

Dans toutes ces expériences, il semble donc que l'attention de l'enfant soit davantage attirée par la notion d'espace occupé et non par la quantité de matière utilisée. Mais à ce stade sa conception de l'espace n'est pas complète et il ne sait pas coordonner deux propriétés variant simultanément (par exemple section du récipient et hauteur du contenu) en sens opposé.

Pour qu'ils prennent définitivement conscience de la conservation des quantités, il faudra donc qu'ils soient capables d'établir un lien logique entre deux variables et qu'ils prennent conscience du fait que ce qui est perdu d'un côté est regagné de l'autre.

Travaux sur des quantités discrètes.

Nous retrouvons les mêmes difficultés à ce niveau; *a priori*, les enfants réagiront en considérant l'espace occupé. Cependant, dans ces situations, les enfants sont capables d'établir d'eux-mêmes une correspondance terme à terme entre les objets et tant que la correspondance optique est maintenue ils admettent l'équipotence des ensembles; pour certains cette propriété sera conservée quelle que soit la disposition des objets, mais pour d'autres l'impression sensible l'emporte encore sur l'abstraction; ces derniers ne sont donc pas mûrs pour abstraire l'idée de cardinal d'un ensemble.

Il est également possible que les enfants établissent une correspondance entre les objets et une suite de mots et que lorsque le cardinal n'est pas trop grand ils admettent l'équipotence des ensembles après comptage, mais les remarques précédentes ne nous permettent pas de conclure que la notion de cardinal soit bien dégagée.

C.E.1.

Intentions: Étude des relations « ...a pour cardinal... » d'un ensemble d'ensembles vers un ensemble de nombres et « ...a même cardinal que... » sur l'ensemble d'ensembles.

Réaction des enfants: Aucune difficulté; à ce niveau la notion de cardinal comme propriété d'un ensemble est dégagée et les enfants saisissent facilement la différence de nature entre les deux relations.

C.E.2.

Intentions : Lien entre numération orale et numérations écrites.

Réaction des enfants : Les habitudes acquises gênent la prise de conscience des difficultés du système de numération orale habituel.

L'invention du système oral associé à la base dix ne présente pas trop de difficulté ; les enfants remplacent facilement onze, douze, treize... par dix-un dix-deux...

L'invention du système oral associé à la base vingt est plus délicat car le système de numération écrite associé n'est pas utilisé ; il sera donc nécessaire de travailler plus longuement le système écrit à base vingt par l'introduction de symboles nouveaux à partir de onze et de mots nouveaux pour dix-sept, dix-huit et dix-neuf.

La comparaison des deux systèmes oraux ne présente pas de difficulté et les enfants retrouvent un univers familier en constatant que l'on utilise tantôt l'un, tantôt l'autre.

V. Expériences sur les applications de l'addition.

Technique opératoire :

C.E.2.

Intentions : Étude de la technique opératoire de la soustraction en différentes bases.

Réaction des élèves : Les notions de base sur la numération n'étant pas suffisamment assimilées, il n'a pas été possible d'aborder au cours de cette expérience l'étude des techniques opératoires ; seule la base dix aurait pu être utilisée, mais les manipulations dans cette base sont trop lourdes pour pouvoir dégager l'essentiel.

Les exercices ont donc porté sur la numération dans des bases autres que la base dix.

En conclusion, il est à noter qu'il n'est pas possible d'obtenir une recherche satisfaisante sur les techniques opératoires tant que les enfants ne maîtrisent pas parfaitement les techniques de la numération.

Il sera donc plus profitable à ce stade de travailler sur des problèmes simples entraînant les enfants à l'utilisation judicieuse des diverses opérations connues et développant leur capacité au calcul mental.

Le travail sur les techniques opératoires ne doit prendre place que lorsque les propriétés des opérations sont parfaitement maîtrisées ainsi que les principes de la numération.

Représentation de problèmes:

C.E.1. C.M.1 et C.M.2.

Intentions: Observation de la technique utilisée par les enfants pour représenter les données d'un problème.

C.E.1.

Réactions des enfants: Les représentations obtenues avec les enfants de cet âge restent très figuratives; ils ne donnent que petit à petit des représentations plus abstraites sous forme de schémas.

Il semble donc qu'il soit prématuré de leur proposer un schéma préparé à l'avance que les enfants ne sauront pas décoder facilement; le schéma de problème doit être le fruit d'une élaboration commune longuement discutée par la classe; il est ensuite important de s'assurer que chaque enfant est capable d'interpréter la symbolisation choisie.

C.M.1.

Après avoir obtenu des représentations approximatives en utilisant des diagrammes de Venn qui n'amènent pas les enfants à dominer la situation étudiée, l'utilisation d'un matériel à caractéristiques multiples permet aux enfants de prendre conscience des données du problème par une représentation plus concrète permettant une manipulation des éléments, ce qui les amène naturellement à une représentation schématique plus claire en utilisant un diagramme de Carroll.

Le problème du codage de la situation étant résolu, il faut encore s'assurer que les enfants sont capables de décoder et d'interpréter le schéma. Il faudra donc travailler cette représentation en utilisant des exemples très variés avant de les amener à résoudre des problèmes en utilisant cette schématisation.

C.M.2.

Ce même travail repris au niveau du C.M. 2 présente beaucoup moins de difficultés; les enfants apprennent à coder et à décoder plus facilement, et il est possible, à partir de problèmes simples, de leur faire découvrir la loi générale sur le cardinal de la réunion de deux ensembles quelconques et de l'utiliser pour résoudre des problèmes variés en s'appuyant sur les représentations schématiques de ces problèmes.

En conclusion: Ce même travail effectué à différents niveaux nous montre que, lors de l'introduction d'une notion nouvelle, le niveau mental des enfants détermine les résultats obtenus et que l'utilisation prématurée de certains symbolismes risque de créer une mécanisation si l'on ne prend pas garde de s'assurer de la signification profonde des schémas introduits. Il sera peut-être possible d'obtenir des résultats spectaculaires dans des situations reconnues *a priori* comme étant semblables. Mais les enfants ne seront pas capables d'inventer eux-mêmes une démarche personnelle lorsqu'ils seront mis en face de situations nouvelles.

IV. La multiplication dans l'enseignement élémentaire.

Réflexions sur les situations mathématiques permettant de faire prendre conscience aux enfants des propriétés élémentaires de la multiplication des naturels.

La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbf{N}$:

— elle est associative et commutative;

— il existe un élément neutre.

Remarque sur le langage :

Ces propriétés sont communes à l'addition et à la multiplication; nous faisons pourtant une distinction entre ces deux opérations dans le langage : on additionne b à a et on multiplie a par b et de plus les résultats se nomment « somme de a et de b » et « produit de a par b »; le langage se trouve pourtant unifié lorsque l'on dit « somme de deux naturels » ou « produit de deux naturels ».

La distinction faite entre les dénominations des opérations n'est pas très importante; dans les deux manières, les éléments du couple sont distingués; celle des noms des résultats prête davantage à confusion; les opérations étant toutes deux commutatives l'expression « somme de a et de b » semble préférable; il faudrait dire aussi « produit de a et de b ». Les propriétés différenciant la multiplication apparaissent lorsque l'on étudie la distributivité de la multiplication sur l'addition et la régularité des éléments de $\mathbf{N}$ pour les deux lois.

Nous verrons en étudiant diverses situations conduisant aux propriétés de la multiplication que les différences de langage constatées sont dues aux difficultés rencontrées pour mettre en évidence, de la façon la plus naturelle possible, la commutativité de la multiplication, et que l'expression « produit de a par b » semble provenir d'une confusion entre état et opérateur.

1. *Introduction de la multiplication à partir de la réunion d'ensembles équipotents.*

Le cardinal de la réunion de b ensembles équipotents (deux à deux disjoints) de cardinal a est le produit des deux naturels a et b.

La principale difficulté réside dans le changement de niveau dans les univers considérés : a compte des éléments et b des ensembles, on revient ensuite au niveau des éléments avec le produit.

Les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication sont difficiles à mettre en évidence sur des manipulations simples car il n'y a pas de propriétés analogues au niveau des ensembles.

Cette présentation de la multiplication justifie le rôle dissymétrique joué par les deux naturels a et b dans les dénominations; cette dissymétrie existe bien au niveau concret mais doit disparaître dans l'étude de la multiplication.

L'existence de l'élément neutre devra faire appel à deux situations différentes et si l'on peut considérer la réunion de a ensembles d'un élément ($1 \times a = a$), un ensemble de a éléments peut-il être considéré comme une réunion? ($a \times 1 = ?$).

La commutativité n'ayant pas été mise en évidence, la distributivité à droite et la distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition font appel à deux situations différentes.

Cette introduction permettra d'établir un lien entre l'addition et la multiplication; la multiplication apparaissant comme un cas particulier de l'addition généralisée.

2. *Introduction de la multiplication à partir du produit cartésien de deux ensembles.*

L'étude du produit cartésien ayant été faite et les propriétés suivantes mises en évidence :

$E \times F \neq F \times E$

$(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$ (Par convention, en utilisant l'égalité de triplets)

$E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$

$E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$

$E \times \varnothing = \varnothing \times E = \varnothing$

le cardinal du produit cartésien est le produit des cardinaux des deux ensembles.

L'associativité de la multiplication et la distributivité de la multiplication sur l'addition, ainsi que les propriétés de l'élément neutre, découlent facilement des propriétés précédentes.

Seule la commutativité risque d'engendrer une confusion si la non-commutativité de l'opération sur les ensembles n'est pas bien assimilée.

Pour mettre en évidence la commutativité de la multiplication, il est nécessaire de faire apparaître une bijection entre $E \times F$ et $F \times E$ et de bien insister sur le fait que la propriété étudiée n'est vraie que pour l'opération sur les cardinaux.

En réalisant une partition du produit cartésien (en lignes ou en colonnes si l'on utilise une représentation sous forme de tableau), il est possible de retrouver la situation d'une réunion d'ensembles équipotents (a ensembles de b éléments ou b ensembles de a éléments). Les deux naturels n'apparaissent plus comme ayant des rôles distincts. Construction de la table de Pythagore de la multiplication.

Il est facile de montrer qu'un produit cartésien de deux ensembles peut être mis en bijection avec les cases d'un tableau rectangulaire et en numérotant les cases de ce tableau de trouver l'image d'un couple (a, b); en examinant attentivement les différentes façons de numéroter les cases du tableau, il doit être possible de faire découvrir des propriétés intéressantes.

Remarque : en numérotant en suivant les conventions d'écriture habituelles, le tableau rectangulaire peut servir à réaliser une partition en classes de congruence, ce qui permet l'introduction de cette notion avant la division.

3. *Utilisation de la notion d'opérateur.*

Après avoir dégagé, sur des exemples variés, les propriétés des groupes finis d'opérateurs opérant sur un ensemble :

Existence d'une loi de composition interne.

Associativité.

Existence de l'élément neutre.

Existence d'un symétrique pour tout élément du groupe.

Et parfois commutativité.

En utilisant un processus d'échange (3 pour 1, 5 pour 1...), on peut faire opérer l'ensemble **N** sur des ensembles et étudier **N** comme ensemble d'opérateurs.

A chaque naturel est associé un opérateur et la loi de composition des opérateurs peut permettre de définir la loi de composition des naturels puis d'obtenir ses propriétés.

Les opérateurs de division apparaîtront naturellement comme opérateurs réciproques, et pour obtenir la structure de groupe il deviendra naturel d'introduire les opérateurs fractionnaires.

La plus grosse difficulté apparaîtra lorsque l'on abordera la distributivité.

Après avoir fait opérer **N** sur les ensembles il sera nécessaire de le faire opérer sur les cardinaux de ces ensembles; à ce stade on pourra peut-être introduire des opérateurs additifs et chercher à combiner les deux sortes d'opérateurs en prenant grand soin de ne pas aller trop vite pour éviter les confusions possibles, l'ensemble **N** jouant deux rôles très différents.

La technique opératoire de la multiplication ne devrait apparaître qu'à la suite de toutes ces recherches puisque le mécanisme fait appel à la distributivité de la multiplication sur l'addition.