# Le naturel a horreur du vide (Aphorisme)

Madame A.M. Bardi,
*I.R.E.M., de Paris.*

Voici deux systèmes de numération nouveaux, *des systèmes sans zéro.* Nous rappellerons d'abord les règles de la numération décimale habituelle et celles du système binaire. Puis nous étudierons ces systèmes sans zéro et vous proposerons des opérations à effectuer selon les techniques habituelles mais sans le secours de nos mécanismes mis en défaut ici. Nous serons dans la situation de nos élèves et toutes les difficultés que nous éprouverons, ils les ressentent personnellement. Alors aidons-les, aidons-nous. Nous proposons des dispositions pratiques, claires, utilisables dans les calculs courants et qui devraient être d'un grand secours pour nos élèves.

*Deux remarques :*

- L'étude de ces systèmes de numération n'est pas destiné aux élèves mais aux maîtres.
- Les solutions des exercices ainsi que les dispositions de calcul sont proposées à la fin de cet article.

## A. Quelques systèmes connus.

I. — *Utilisant les lettres de l'alphabet français :*

Chaque nombre est caractérisé par un assemblage de lettres; par exemple : deux, onze, quatre-vingt treize.

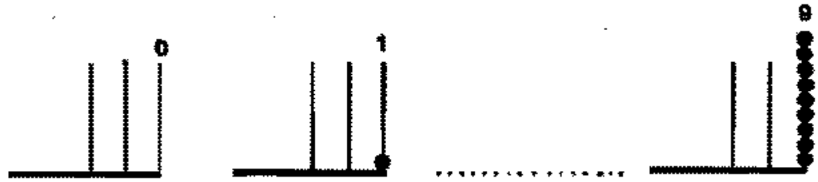
Nous désignerons ici tous les nombres par leur écriture dans ce système.

II. — *Utilisant les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* (système décimal habituel) :

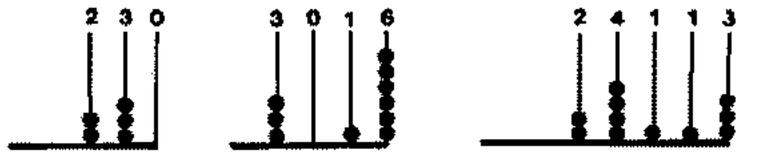
Chaque nombre est caractérisé par une suite de tels symboles : par exemple :
142 pour cent quarante deux;
3 075 pour trois mille soixante quinze.

Certaines suites, comme 0012, 00704, ne sont pas utilisées.

Des règles permettent de trouver quel nombre est représenté par une suite donnée; on peut illustrer cela à l'aide d'un boulier (socle supportant des tiges verticales sur lesquelles on enfile des boules).




zéro un neuf




deux cent trente trois mille seize vingt quatre mille cent treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules : 3 dans 230, 3 016, 24 113.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle on doit enfiler les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche elle représente un, dix, cent, mille, dix mille...

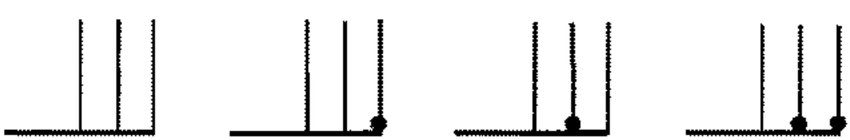
— Il y a au plus neuf boules sur une tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant à leur gauche au moins une tige occupée.

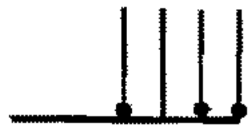
III. — *Utilisant les symboles 0, 1* (système binaire habituel).

Chaque nombre est caractérisé par une suite de tels symboles par exemple 1101 pour treize, 1001 pour neuf... Certaines suites, comme 011, 00010... ne sont pas utilisées.

Des règles très proches des précédentes permettent de trouver quel nombre est représenté par une suite donnée; reprenons le boulier



zéro un deux trois



treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle placer les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche, elle vaut un, deux, quatre, huit, seize...

— Il y a au plus une boule sur chaque tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant au moins une tige pleine à leur gauche.

## B. Une nouvelle écriture à deux symboles.

Nous utiliserons les symboles $a$ et $b$.

Chaque nombre sera caractérisé par une suite de tels symboles, suite que nous appellerons un mot. Mais ici nous accepterons toutes les suites possibles.

Aidons-nous d'un arbre pour les obtenir toutes (voir figure page 42).

Convenons que $a$ représente *un*
que $b$ représente *deux*
que $aa$ représente *trois*
que $ab$ représente *quatre*

...et ainsi de suite en suivant, sur l'arbre, le chemin indiqué par la flèche.

Ainsi deux mots différents représentent des nombres différents.

Nous allons essayer de répondre à quelques questions simples, à propos de cette écriture.

I. — *Comment s'écrit « le suivant »?*

Ou, sachant qu'un nombre est représenté par le mot $m$, peut-on savoir par quel mot est représenté le nombre suivant (sans avoir à construire l'arbre jusqu'à $m$ et au-delà de $m$)?

Par abus de langage, nous parlerons du mot suivant de $m$ et nous le noterons $m^*$.

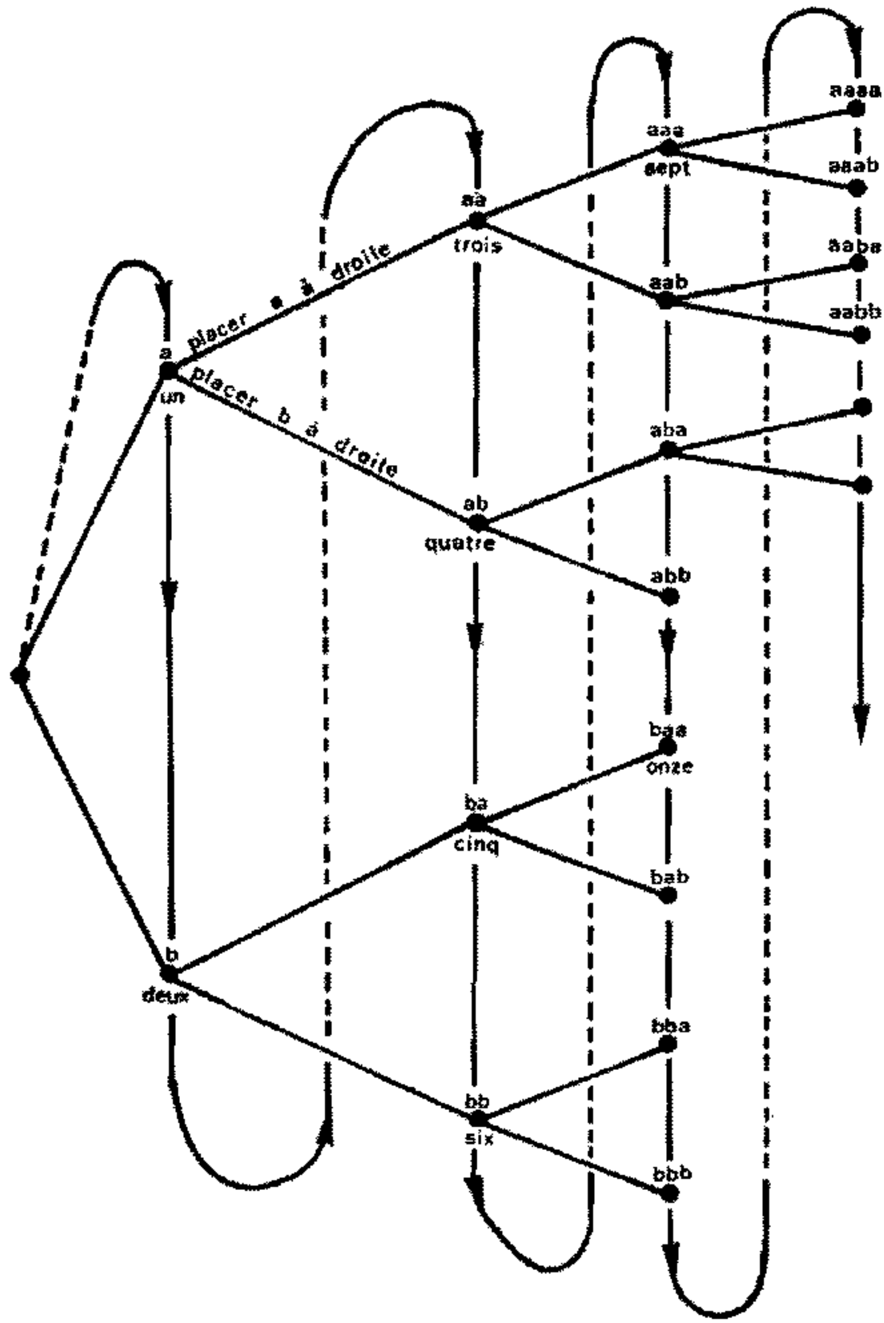
Regardons l'arbre :

1) *Si le mot* m *se termine par* a :

Exemple : si $m = aba$ alors le suivant $m^* = abb$
si $m = baa$ alors $m^* = bab$,

En général si $m = m'a$ alors $m^* = m'b$

(on remplace la dernière lettre par $b$ et on ne change pas ce qui était avant $a$).


aaaa
aaab
aaba
aabb
aaa
sept
aa
trois
aab
placer a à droite
a
un
placer b à droite
aba
ab
quatre
abb
baa
onze
ba
cinq
bab
b
deux
bba
bb
six
bbb

2) *Si le mot* m *se termine par* b :

Exemple : si $m = ab$ alors $m^* = ba$

si $m = bab$ alors $m^* = bba$

En général, si $m = m'b$ alors $m^* = (m')^*a$

(on remplace $b$ par $a$ et ce qui était avant $b$, $m'$, par son suivant).

Autre exemple :

$m = babb$

$m^* = (bab)^*a \quad = \underbrace{(ba)^*}_{\text{on réapplique la même règle}} aa \quad = \underbrace{bb}_{\text{première règle}}aa$

*Exercices :*

Déterminer le suivant de *abba*, de *aabaa*, de *baab*, de *abb* et de *abbb*.

II. — *Quel est le nombre le plus grand?*

Ou comment comparer deux nombres connus par leur écriture dans ce système (par abus de langage on dira que le mot $m$ est plus grand que le mot $m'$ si $m$ représente un nombre plus grand que $m'$).

Là encore regardons l'arbre.

1) *Si les mots ont des longueurs différentes*, le plus long est le plus grand.

Exemple : $aaaba > abba$

$bbb < aaba$

2) *Si les mots ont même longueur :* le premier dans l'ordre alphabétique est le plus petit.

Exemples : $ab < ba$ (car $a$ avant $b$)

$aabb < abab$ (car $a$ avant $b$)

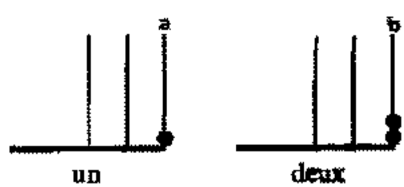
*Exercices :*

Classer les mots *aba*, *abb*, *ab*, *baa*, *aabb*.

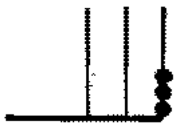
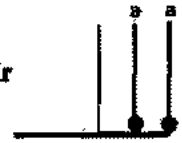
III. — *Quel nombre est représenté par le mot* bbab?

Ou, peut-on trouver à quel nombre correspond un mot sans fabriquer l'arbre jusqu'à ce mot et écrire la correspondance? Qui se cache derrière *bbabab?* Nous ne pouvons pas envisager de prolonger l'arbre assez pour rencontrer ce mot mais est-il possible de le démasquer?

Reprenons le boulier et représentons ainsi



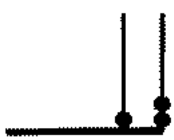
- *On passe de un à deux* en ajoutant une boule sur la tige de droite.
- *Faisons de même pour passer de deux à trois.* On obtiendrait :

 or nous devons avoir 

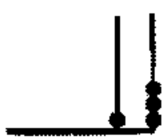
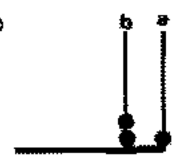

trois

Il n'y a pas contradiction si l'on convient que deux boules sur la dernière tige peuvent être remplacées par une sur l'avant-dernière tige :

- *Ajoutons un* en plaçant à nouveau une boule sur la dernière tige.

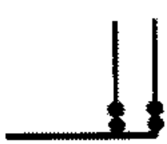
On obtient  qui peut s'écrire *ab* et représente bien quatre.

- *Ajoutons encore une boule.*

On obtient  mais cinq s'écrit *ba* qui se représente : 

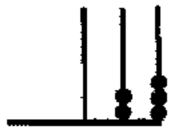

Là encore il n'y a pas contradiction si l'on convient de remplacer deux boules de la dernière tige par une de l'avant-dernière :

- *Ajoutons une boule.*

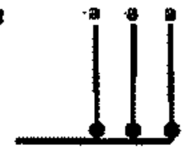
On obtient  qui peut s'écrire *bb* et représente six

• *Ajoutons une boule.*

On obtiendrait



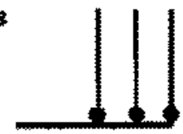
alors que sept s'écrit *aaa* soit :



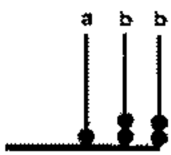

*Utilisons notre convention :*

devient

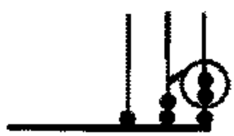
et, si nous recommençons



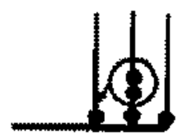
*Pouvons-nous trouver le suivant de* abb *à l'aide de ces conventions ?*



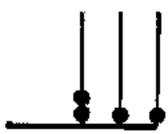

suivant de *abb*



qui devient



puis



donc *baa*, ce qui est bien confirmé par l'arbre.

*Ainsi dans notre système :*

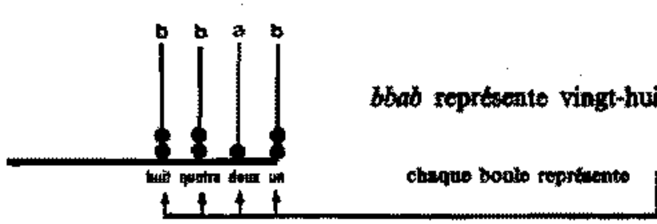
* *a* représente toujours une boule et *b* deux boules.

* La position d'une lettre indique sur quelle tige placer la ou les boules correspondantes.

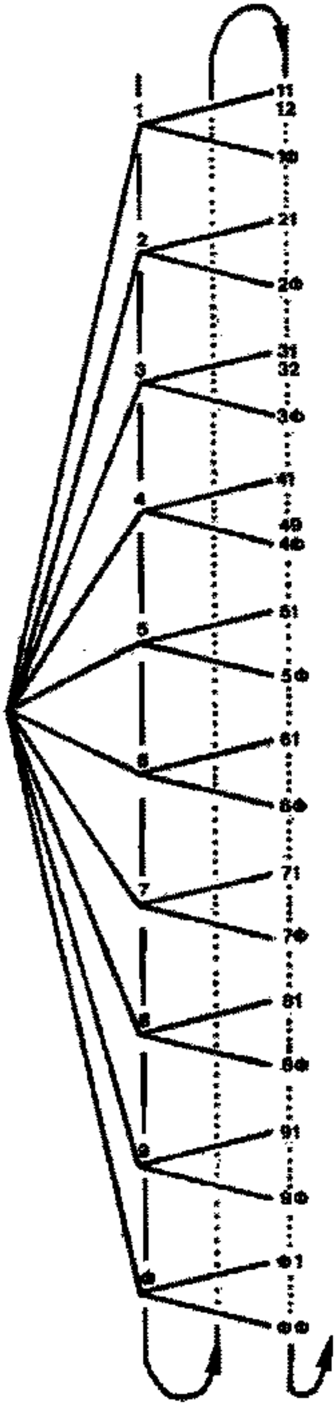
* Une boule représente deux boules de la tige qui est à sa droite et ainsi, successivement, elle représente un, deux, quatre, huit, seize...

* *Il n'y a jamais de tige vide.*

*Peut-on trouver qui est caché derrière* bbab?




*bbab* représente vingt-huit




*Exercice :*

Quel nombre représente *bbabab ?* *bbaab ?*

Écrire le nombre trente et un dans ce système.

*Quelques remarques :*

1) On aurait pu utiliser les symboles 1 (pour *a*) et 2 (pour *b*).

Ainsi vingt-huit s'écrit 2212 et sept s'écrit 111.

2) Cette écriture est très économique, plus que l'écriture « à base deux » habituelle : ainsi avec trois places on écrit *bbb* (ou 222) qui représente quatorze alors que 111 (base deux habituelle) représente sept.

3) Il resterait à parler des opérations et à voir si, connaissant deux nombres par leur écriture il est possible de trouver l'écriture de leur somme, de leur différence, de leur produit. Nous vous proposons ce travail en exercice, nous réservant de le traiter dans le cas plus familier de l'écriture à dix symboles.

*Exercices :*

- Écrire *baab* (ou 2112) dans le système binaire habituel (on pourra s'aider du boulier). Quel nombre représente-t-il?

- Dresser la table d'addition des mots de une lettre (*a* et *b*), l'utiliser pour calculer *babb* + *bab*.

- Dresser la table de multiplication des mots de une lettre et l'utiliser pour calculer *babb* × *ba*.

## C. Le même principe... Avec dix symboles.

Nos symboles seront 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\phi$.

Chaque nombre sera caractérisé par une suite de tels symboles et toutes les suites seront autorisées.

Construisons l'arbre ci-contre les donnant toutes.

*Convenons que :*

1 caractérise un
2 caractérise deux

---

$\phi$ caractérise dix
11 caractérise onze

---

$1\phi$ caractérise vingt
...et ainsi de suite en suivant sur l'arbre le chemin indiqué par la flèche.
Reprenons rapidement les mêmes problèmes.

I. — *Quel est le suivant?*

$$1^* = 2; \quad 2^* = 3; \quad 3^* = 4; \ldots$$
$$8^* = 9; \quad 9^* = \phi; \quad \phi^* = 11$$

1) *Si le mot n'est pas terminé par $\phi$ :*

Exemple : $m = 87$, alors $m^* = 88$
$m = 89$, alors $m^* = 8\phi$

En général : si $x$ est la dernière lettre de $m$ et si $x \neq \phi$

$$m = m'x \quad \text{et} \quad m^* = m'x^*$$

2) *Si le mot est terminé par $\phi$ :*

Exemple : $m = 8\phi$ alors $m^* = 91$
En général : si $m = m\phi$ alors $m^* = (m')^* 1$
Autre exemple : $m = 2\phi\phi$ alors $m^* = (2\phi)^* 1 = 2^* 11 = 311$

*Exercices :*

Quel est le suivant de $47\phi$? de $\phi\phi7$? de $5\phi\phi\phi$?

II. — *Quel est le plus grand?*

— $1 < 2 < 3 < 4 \ldots < 8 < 9 < \phi$

— *Si deux mots n'ont pas la même longueur* le plus long est le plus grand.

— *Si deux mots ont même longueur* l'ordre est le même que celui des premiers symboles différents à partir de la gauche.

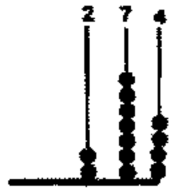
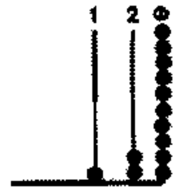
*Exemple :* $2\phi5 < 7\phi\phi$ car $2 < 7$
$2874 < 289\phi$ car $2 = 2$, $8 = 8$, $7 < 9$.

*Exercices :*

Comparer $2\phi\phi9$, $2\phi93$ et $\phi14$.

III. — *Que représente un mot donné?*

Reprenons le boulier. Les règles sont de même nature que celles du système à deux symboles.

deux cent soixante-quatorze          cent trente

Une boule représente, selon la tige sur laquelle elle est placée, de droite à gauche, un, dix, cent, mille...

Sur chaque tige il y a de une à dix boules. *Il n'y a pas de tiges vides* ayant une tige au moins occupée à leur gauche.

*Exercices:*

Écrire dans le système à base dix habituel $2\phi\phi$, $\phi 7\phi$.

Écrire dans ce nouveau système cent soixante, cinq cents.

Quel nombre est représenté par $7\phi 1$?

IV. — *Additions et soustractions:*

Ou comment trouver l'écriture de la somme de deux nombres?

Il est facile de dresser une table d'addition pour les nombres représentés par un seul symbole :

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7 | 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8 | 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9 | $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| $\phi$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | $1\phi$ |

*Calculer :*

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 9 \\ +\ 4\ 4\ 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ 8\ \phi \\ +\ \ 3\ \phi\ 2 \\ \hline \end{array}$$

La même table peut-elle être utilisée pour effectuer des soustractions?

$$\begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\ \ 8\ 7\ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\ \ 4\ \phi\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phi\ 6\ \phi\ 7\ 8 \\ -\ \ 9\ 7\ 8 \\ \hline \end{array}$$

**V. — *Multiplications et divisions :***

On peut, de la même manière, dresser la table de multiplication pour les nombres représentés par un symbole.

| × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\phi$ |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | $\phi$ | 12 | 14 | 16 | 18 | $1\phi$ |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | $2\phi$ |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | $1\phi$ | 24 | 28 | 32 | 36 | $3\phi$ |
| 5 | 5 | $\phi$ | 15 | $1\phi$ | 25 | $2\phi$ | 35 | $3\phi$ | 45 | $4\phi$ |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | $2\phi$ | 36 | 42 | 48 | 54 | $5\phi$ |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | $6\phi$ |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | $3\phi$ | 48 | 56 | 64 | 72 | $7\phi$ |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | $8\phi$ |
| $\phi$ | $\phi$ | $1\phi$ | $2\phi$ | $3\phi$ | $4\phi$ | $5\phi$ | $6\phi$ | $7\phi$ | $8\phi$ | $9\phi$ |

*Calculer :*

$$\begin{array}{r} 3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi \\ \times\ \ 8\ 9 \\ \hline \end{array}$$

*Calculer :*

$$\begin{array}{r|l} 2\ 6\ \phi\ \phi\ 8\ \phi\ 7 & 2\ \phi\ 9 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

## Solution des exercices.

## B. Une nouvelle écriture à deux symboles.

### I. — *Détermination du suivant :*

| | | |
|---|---|---|
| $m = abba$ | première règle | $m^* = abbb$ |
| $m = aabaa$ | première règle | $m^* = aabab$ |
| $m = baab$ | seconde règle | $m^* = (baa)^* a = baba$ |
| $m = abb$ | seconde règle | $m^* = (ab)^* a = (a)^* aa = baa$ |
| $m = abb$ | seconde règle | $m^* = (abb)^* a = baaa$ (d'après l'exercice précédent) |

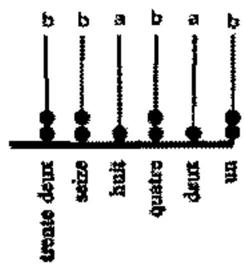
### II. — *Quel est le plus grand?*

*ab*, le plus court, est le plus petit; *aabb* est le plus grand.
Classons les mots de trois lettres par ordre alphabétique :

$$aba < abb < baa$$
$$ab < aba < abb < baa < aabb$$

### III. — *A quel nombre correspond un mot?*

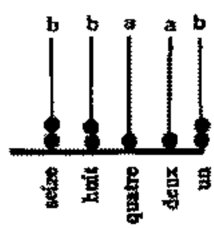
- *bbabab* = Avec le boulier.




*Chaque boule représente :*

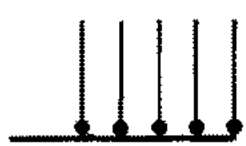
et *bbabab* représente cent seize.

- *Même travail abec* bbaab.




Chaque boule représente :
et *bbaab* représente cinquante six.

- *Écrire trente et un :*

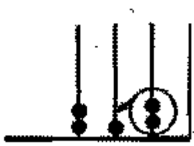
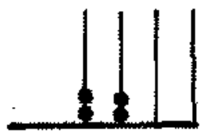
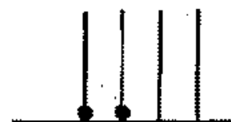


*aaaaa*

## IV. — *Opérations et exercices proposés dans les remarques.*

• *Écrire* baab (ou 2 1 1 2) dans le système binaire habituel :

Cette fois il ne doit jamais y avoir deux boules sur la même tige, mais on accepte des tiges vides.

 qui devient  puis 


et qui représente vingt-quatre.

• *Table d'addition :*

| + | a | b |
|---|---|---|
| a | b | aa |
| b | aa | ab |

$$\begin{array}{ccccc} & a & a & a & \\ & b & a & b & b \\ + & & b & a & b \\ \hline a & a & b & b & b \end{array}$$

(soit vingt-six + douze = trente-huit)

• *Table de multiplication :*

| × | a | b |
|---|---|---|
| a | a | b |
| b | b | ab |

$$\begin{array}{ccccccc} & & & b & a & b & b \\ & & & & \times & b & a \\ \hline & & & b & a & b & b \\ & b & a & b & a & b & . \\ \hline a & a & a & a & a & b & b \end{array}$$

soit vingt-six × cinq = cent trente

Il est impossible dès à présent, de calculer de tête et nous sommes obligés de calculer à part les additions de retenues. Nous exposerons plus loin la présentation qui peut éviter ces difficultés.

## C. Le même principe avec dix symboles.

I. — *Quel est le suivant?*

Le suivant de $4\ 7\ \phi$ est $4\ 8\ 1$ (seconde règle).

Le suivant de $\phi\ \phi\ 7$ est $\phi\ \phi\ 8$ (première règle).

Le suivant de $5\ \phi\ \phi\ \phi$ est $(5\ \phi\ \phi)^*\ 1 = (5\ \phi)^*\ 1\ 1 = 5^*\ 1\ 1\ 1$
$= 6\ 1\ 1\ 1.$

II. — *Quel est le plus grand?*

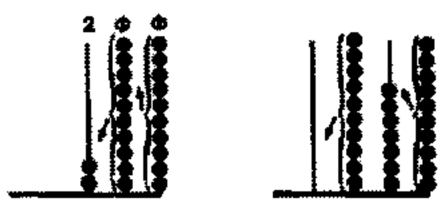
$$\phi\ 1\ 4 < \quad 2\ \phi\ 9\ 3 < \quad 2\ \phi\ \phi\ 9$$

III. — *Reconnaître un nombre :*

$2\ \phi\ \phi$ s'écrit dans le système à base dix habituel $3\ 1\ 0$.

$\phi\ 7\ \phi$ s'écrit $1\ 0\ 8\ 0$.

*On peut s'aider du boulier :*




*Cent soixante* s'écrit $1\ 5\ \phi$.
*Cinq cents* s'écrit $4\ 9\ \phi$.
$7\ \phi\ 1$ représente huit cent un.

IV. — *Additions et soustractions :*

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 3 & 9 \\ + & 4 & 4 & 1 \\ \hline & \phi & 7 & \phi \end{array}$$

car $9 + 1 = \phi$
$3 + 4 = 7$
$6 + 4 = \phi$

$$\begin{array}{rcccc} & & & 1 & \\ & 7 & \phi & 8 & \phi \\ + & & 3 & \phi & 2 \\ \hline & 8 & 4 & 9 & 2 \end{array}$$

car $\phi + 2 = 12$
$8 + 1 + \phi = 19$
$1 + \phi + 3 = 14$
$7 + 1 = 8$

Pour faire une soustraction, il est bien préférable que des additions, pour lesquelles nous possédons une table. Nous l'explicitons ici.

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & \phi & \phi & 3 \\ - & & 8 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

| | |
|---|---|
| | $5 + . = 3$ impossible; |
| | $5 + . = 13$ solution 8, retenue 1 |
| $7 + 1 = 8$ | $8 + . = \phi$ solution 2 |
| | $8 + . = \phi$ solution 2 |

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & \phi & \phi & 3 \\ - & & 4 & \phi & 3 \\ \hline & 7 & 5 & 9 & \phi \end{array}$$

| | |
|---|---|
| | $3 + . = 3$ impossible; |
| | $3 + . = 13$ solution $\phi$, retenue 1 |
| $\phi + 1 = 11$ | $11 + . = \phi$ impossible |
| | $11 + . = 1\,\phi$ solution 9, retenue 1 |
| $4 + 1 = 5$ | $5 + . = \phi$ solution 5 |

$$\begin{array}{rccccc} & \phi & 6 & \phi & 7 & 8 \\ - & & & 9 & 7 & 8 \\ \hline & \phi & 5 & \phi & 9 & \phi \end{array}$$

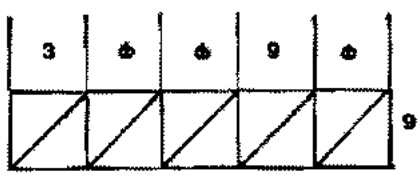
| | |
|---|---|
| | $8 + . = 8$ impossible; |
| | $8 + . = 18$ solution $\phi$, retenue 1 |
| $7 + 1 = 8$ | $8 + . = 7$ impossible; |
| | $8 + . = 17$ solution 9, retenue 1 |
| $9 + 1 = \phi$ | $\phi + . = \phi$ impossible; |
| | $\phi + . = 1\,\phi$ solution $\phi$, retenue 1 |

V. — *Multiplications et divisions.*

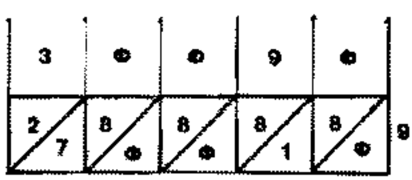
*Multiplications :*

Pour ne pas avoir à effectuer dans le même temps des multiplications et l'addition des retenues, nous présenterons nos calculs ainsi *.

Pour multiplier $3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi$ par 9, nous préparons le tableau suivant :

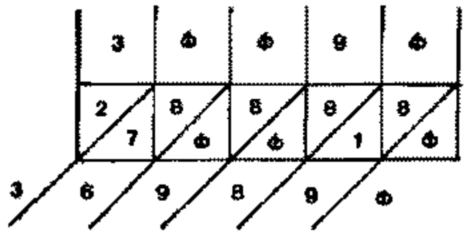



Puis nous remplissons chaque case par le résultat connu ou lu dans la table et ceci dans un ordre absolument quelconque.

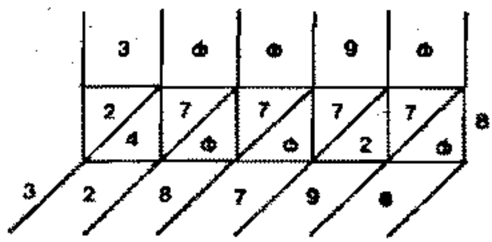



(*) Ces dispositions sont proposées dans les cahiers sur l'enseignement élémentaire de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

**Puis nous additionnons « en diagonale ».**



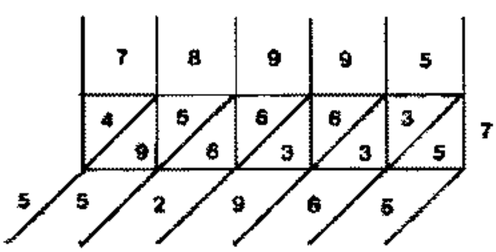
**Recommençons pour (3 $\phi$ $\phi$ 9 $\phi$) $\times$ 8.**



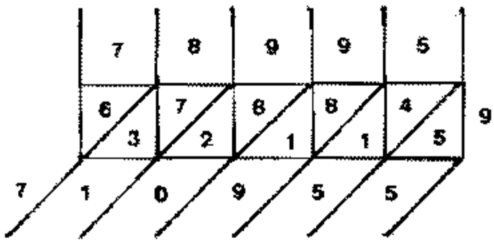
**Ainsi :**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & \phi & \phi & 9 & \phi & \\
 & \times & & & 8 & 9 & \\
\hline
 & 3 & 6 & 9 & 8 & 9 & \phi \\
3 & 2 & 8 & 7 & 9 & \phi & . \\
\hline
3 & 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & \phi
\end{array}$$

**Cette disposition peut être aussi bien employée pour une multiplication en base dix ordinaire et évite beaucoup d'erreurs de calculs.**



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 7 & 8 & 9 & 9 & 5 \\
 & \times & & & & 9 & 7 \\
\hline
 & 5 & 5 & 2 & 9 & 6 & 5 \\
7 & 1 & 0 & 9 & 5 & 5 & . \\
\hline
7 & 6 & 6 & 2 & 5 & 1 & 5
\end{array}$$

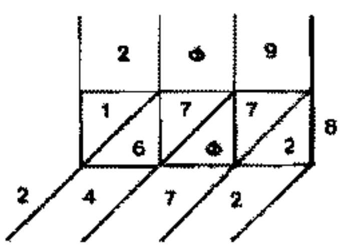


*Division :*

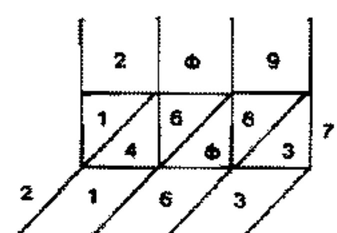
Nous poserons les multiplications puis les soustractions. Cela présente un double avantage : éviter des causes d'erreurs en effectuant successivement les deux opérations; éviter de faire plusieurs fois les mêmes calculs lorsque le même chiffre apparaît plusieurs fois au quotient. Cette présentation peut être employée de la même manière dans le calcul habituel.

```
2 6 φ φ 8 φ 7 | 2 φ 9
2 4 7 2 . . . | 8 7 7 3
  2 3 8 8 . . |
  2 1 6 3 . . |
    2 2 5 φ . |
    2 1 6 3 . |
        9 7 7 |
        9 2 7 |
          4 φ |
```

1)



2)



3) Aucun calcul. 7 convient à nouveau.

4)