# Matériaux pour un dictionnaire

J. M. CHEVALLIER

## Ayez donc de belles relations...

Dans le numéro spécial 269-270 consacré à la classe de Sixième, Mme TOUYAROT avait fait un recensement soigneux des sens donnés au mot *relation*. Elle n'avait pas cherché à épuiser un tel sujet; en le reprenant, je n'ai ni l'intention de « rewriter » son article, qui reste une excellente source, ni l'ambition assez vaine de conclure un tel débat — tout au plus celle de maintenir ouvertes des portes que Mme TOUYAROT jugeait déjà enfoncées! D'autre part, il s'agit à présent non de Sixième, mais du premier degré, ce qui rend le problème encore plus délicat, et mon incompétence encore plus profonde. Et pourtant il faudrait bien qu'on arrive à savoir à peu près ce qu'on met dans cette idée de « relation », obscurcie par tant d'usages divers et parfois contradictoires.

Je révère comme tout un chacun la grande construction bourbakiste qu'on peut — si on le souhaite — tenir pour purement syntaxique, à l'exclusion de toute interprétation « sémantique ». A un certain niveau, où les règles du jeu sont très bien définies et très bien appliquées, rien de plus légitime. Au niveau élémentaire (et l'élémentaire dure longtemps!), on ne saurait certes proscrire tout « jeu formel », car il peut avoir de l'attirance pour certains esprits, mais ce serait une gageure de s'y adonner constamment et totalement. Donc, même si la portée du mot *relation* doit s'en trouver réduite, la sagesse commande probablement de se borner au départ à un point de vue ensembliste, en convenant qu'on ne sortira pas d'un certain « univers ».

Cependant, même ainsi, il y a un cas où l'on ne peut éviter de faire du « formalisme » : sans le dire sans doute, voire sans s'en rendre compte, car c'est le cas qui passe pour le plus simple, j'ai nommé la « relation d'égalité ». Dans l'univers — ou dans n'importe quel ensemble — elle ne saurait être autre chose que la bijection identique, $x \mapsto x$, dont l'intérêt n'est pas niable, mais qui est loin d'épuiser le contenu du concept d'égalité. Cela parce que *l'égalité est une relation linguistique et non une relation mathématique*, qui porte sur des *noms* et non sur des « objets ». Écrire $a = a'$, cela signifie : syntaxiquement, que toute formule telle que « $abc...$ » peut être valablement remplacée par « $a'bc...$ »; sémantiquement, que « $a$ » et « $a'$ » sont des noms synonymes désignant le même objet sans être eux-mêmes l'objet. Mais, dira-t-on, c'est la même chose avec $a < b$, $a$ et $b$ n'y sont que des noms! Oui, mais les objets nommés $a$ ou $b$ pourraient être désignés dans la formule par n'importe quel autre de leurs noms $a'$ ou $b'$, donc finalement cette formule donne une information *sur les objets* par l'intermédiaire de leurs noms. Tandis que, si je dis que « l'égalité subsiste quand on y remplace le nom d'un objet — ou plutôt *de l'objet* — par un synonyme », j'énonce l'axiome de transitivité pour l'égalité, mais certainement pas une propriété de l'objet. Cela n'est pas une difficulté mineure, et il vaut mieux qu'on en soit conscient à tous les niveaux.

Revenons aux relations proprement mathématiques. Pour celles-ci, à vouloir aller trop loin et trop tôt dans l'abstraction, on arrive à peu près immanquablement à identifier « relation » et « lien verbal »; je pense que c'est grave pour la suite (à moins de chambarder une fois de plus le vocabulaire, bien sûr). Si l'on habitue les gens dès le jeune âge à dire que « ... est frère de... » est une relation, que pourront-ils répondre le jour où on leur demandera si cette relation est symétrique ou non? Rien, tant qu'on n'aura pas précisé s'il y a uniquement des garçons, ou à la rigueur des filles sans frère, ou si au contraire l'un des lascars a amené sa petite sœur. Autant dire que la prétendue relation *n'est pas définie*.

Apparemment plus « concrète » est la relation considérée comme ensemble de couples; {(Jean, Pierre), (Pierre, Jean), (Michel, Anne)} par exemple semble remplacer avantageusement le lien verbal «... est frère de... », du moins aussi longtemps qu'on ne pose pas de question indiscrète sur la relation complémentaire (celle qui aurait pour lien verbal « ... n'est pas frère de ... »). Assurément il est facile de former un ensemble de treize couples : (Michel, Jean), (Anne, Michel), (Pierre, Pierre)..., qui est *inclus* dans l'ensemble cherché, mais c'est tout; s'il y avait dans le tas un fils unique ou bien deux sœurs, comment le saurait-on? Comme on le voit, la critique n'est pas foncièrement autre que dans le premier cas; d'ailleurs la seule différence est qu'on a remplacé la définition « en compréhension » d'un certain ensemble, le *graphe*, par sa définition « en extension ». Assimiler la relation soit au « lien verbal », soit au « graphe » est toujours un danger si l'on n'a pas précisé de façon explicite sur quel ensemble (ou quels ensembles) on travaille.

Un autre écueil, moins grave dans sa nature, mais propre à créer de fâcheuses habitudes d'esprit, consiste à ne jamais parler que de couples, comme si toutes les relations étaient binaires! C'est un peu comme si l'on n'appelait équations que celles qui sont « à deux inconnues ». Incontestablement les relations binaires ont une importance qu'il ne faut pas sous-estimer : elle est d'ailleurs suffisante pour qu'on leur ait attribué le nom particulier de *correspondances*; mais à quoi bon, si c'est pour employer indifféremment les deux mots?

Je crois qu'il faudrait s'en tenir aux choses qui sont à la fois les plus simples et les plus fondamentales. Dans un ensemble *donné* d'adultes et d'enfants, « ... est frère de Paul » définit déjà une relation, plus simple que la relation « ... est frère de ... », laquelle à son tour est plus simple que la relation « ... a pour père ... et pour mère ... ». Mais toutes les trois sont des relations, et seule la seconde est une correspondance (la troisième en deviendrait une si l'on associait à l'enfant le *couple* de ses parents).

Il apparaît là-dessus que c'est le couple (E, G) formé par un ensemble E et un sous-ensemble G de E qui définit de la façon la plus naturelle la *relation de support* E *et de graphe* G, les éléments de G « vérifiant » la relation alors que ceux du sous-ensemble complémentaire « ne la vérifient pas ». Cet aspect est assez général pour englober tous les cas où l'on parle de relation au sens ensembliste : car rien n'oblige, mais rien n'empêche non plus E d'être un produit cartésien $E_1 \times E_2$; dans ce cas, la relation est binaire et il revient au même de parler de la correspondance $(E_1, E_2, G)$ où $E_1$ est la source, $E_2$ le but, et G le graphe (naturellement, si $E_2 = E_1$, on retrouve les considérations habituelles de symétrie, réflexivité, etc.); si E est un produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, la relation est ternaire, comme c'est le cas pour les opérations (*), etc.

Parallèlement, dans le langage, il serait bon d'éviter le glissement de sens dû aux « relations avec » de la langue courante, lesquelles s'appliquent en fait aux correspondances; dire soit « le couple $(x, y)$ satisfait à la relation $\mathcal{R}$ », soit « à $x$ correspond $y$ par la relation binaire $\mathcal{R}$ » semble préférable à « $x$ est en relation avec $y$ ».

Comme le « calcul des attributs » pourrait être abordé relativement tôt, le fait que les propositions « $a$ appartient à un certain sous-ensemble », « $a$ satisfait à une certaine relation », « $a$ possède une certaine propriété (ou un certain attribut) » sont au fond des moyens équivalents d'exprimer la même chose, devrait être mis en lumière d'assez bonne heure. Si modestes soient-elles en apparence, ces acquisitions seraient d'un grand poids *pour l'avenir ;* car de jeunes esprits habitués à ce mode de pensée et d'expression ne seraient pas dépaysés quand, le jour venu, ils entreraient en contact avec le *prédicat*, qui n'est jamais qu'un nouvel avatar de la relation. De ce point de vue la relation (ou prédicat) de support E est une application de E dans {Vrai, Faux}, et son graphe G est l'image réciproque de {Vrai}. Un tel gain serait considérable, quand on constate les difficultés encore provoquées par ce que l'on continue d'appeler « la relation $y = x^2$ »; si l'une des lettres au moins est une variable muette (qu'en général on n'a pas pris la peine de mutifier!), la prétendue relation n'est rien de plus qu'un lien verbal, et est tout aussi peu signifiante que lui; d'où les questions sans fin qu'on se pose. Tandis que, si l'on considère les relations, de supports respectifs $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $x \mapsto (y = x^2)$, $y \mapsto (y = x^2)$, $(x, y) \mapsto (y = x^2)$, $(x, y, z) \mapsto (y = x^2)$, il est immédiat que leurs graphes respectifs sont : $\{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ (dans le cas $y > 0$), $\{x^2\}$, une parabole, un cylindre parabolique.

Quand on a de si belles relations, c'est pour s'en servir!

J. C.

(*) Une *opérétion*, au sens le plus général, est définie par le Dictionnaire de l'A.P.M. comme une application d'une partie de $E_1 \times E_2$ vers $E_3$.