connecteur, n. m.

Ce mot n'appartient pas à la langue courante ; mais son étymologie et son usage en Electrotechnique s'accordent à lui donner pour sens : objet ou mécanisme qui établit une liaison. *L'extension de ce sens à la Logique serait abusive ;* un connecteur binaire γ n'introduit aucune "liaison" entre deux objets p et q, mais définit à partir d'eux un troisième objet (une telle confusion est encore plus à redouter dans le cas du connecteur *implication*, où elle est favorisée par le verbe "implique" qui suggère un lien causal). C'est seulement au niveau de la *notation* $p\gamma q$ de ce troisième objet que le symbole γ apparaît comme un lien entre les symboles p et q : mais cela n'a rien d'essentiel, comme le montre l'emploi de la notation fonctionnelle, dite "polonaise", γpq.

1. Point de vue ensembliste.

Définition. Bien que l'origine, la terminologie et beaucoup d'applications des connecteurs relèvent de la Logique, on partira ici, afin d'éviter des interprétations hâtives, d'une définition purement ensembliste. Soit B un ensemble à deux éléments, 1 et 0 par exemple, et soit n un naturel non nul : on appelle *connecteur n-aire* toute fonction de Boole de poids n, c'est-à-dire toute application de B^n dans B [BOOLE, **4.1.**]. Le nombre des connecteurs *n-aires* est $(2)^{2^n}$. Les connecteurs les plus usuels sont les connecteurs unaires et les connecteurs binaires.

Nous utiliserons dans ce paragraphe la syntaxe dite polonaise [POLONAIS], et l'alphabet usuellement attaché à cette syntaxe pour les connecteurs. Mais diverses autres écritures sont employées, dans lesquelles les connecteurs sont figurés par des symboles intercalaires : l'une d'elles est utilisée en Logique [2] ; une autre, en automatique, consiste à noter $p+q$ au lieu de Apq et $p.q$ au lieu de Kpq (noter que le signe $+$ de l'automatique ne représente pas une loi de demi-groupe commutatif, contrairement à l'usage). On peut aussi se ramener aux opérations classiques dans $\mathbb{N}$ ou dans le corps $\{0,1\}$: dans le premier cas Apq s'écrit $p+q-pq$, et dans le second $p+q+pq$.

Connecteurs unaires. La lettre p désignant un élément quelconque de B, les quatre connecteurs unaires sont : les applications constantes $p \mapsto 1$ et $p \mapsto 0$, l'application identique $p \mapsto p$ et l'application N définie par la table

p	Np
1	0
0	1

Les deux dernières sont visiblement des bijections involutives.

Connecteurs binaires. Les lettres p et q désignant deux éléments quelconques de B, nous allons classer les seize connecteurs binaires comme suit :

a) l'application constante $(p,q) \mapsto 1$, les projections $(p,q) \mapsto p$, $(p,q) \mapsto q$, et le connecteur E, de table

p	q	Epq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

b) les quatre composés des précédents avec N, à savoir $(p,q) \mapsto 0$. $(p,q) \mapsto$ Np, $(p,q) \mapsto$ Nq, et le connecteur J, de table

p	q	Jpq
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c) les quatre connecteurs pour lesquels le composé de p et q prend une seule fois la valeur 1 : en particulier le connecteur K, de table

p	q	Kpq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

/...

d) les quatre connecteurs pour lesquels le composé de *p* et *q* prend une seule fois la valeur 0 (connecteurs composés des précédents avec N) ; en particulier les connecteurs A et C, ayant respectivement pour tables

p	q	Apq
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	Cpq
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ces divers connecteurs unaires ou binaires ne sont pas indépendants ; il est possible de les engendrer tous au moyen de deux d'entre eux, convenablement choisis (N et K par exemple), ou même d'un seul (par exemple le "connecteur de Sheffer" NK). Plus généralement on peut obtenir, en les composant de diverses manières, des théorèmes tels que ceux-ci:

$\forall p$ $\quad \mathrm{A}p\mathrm{N}p = 1$

$\forall p \ \forall q$ $\quad \mathrm{NK}pq = \mathrm{AN}p\mathrm{N}q$ (De Morgan)

$\forall p \ \forall q$ $\quad \mathrm{C}pq = \mathrm{AN}pq$

$\forall p \ \forall q$ $\quad \mathrm{E}pq = \mathrm{KC}pq\mathrm{C}pq$

$\forall p \ \forall q \ \forall r$ $\quad \mathrm{K}p\mathrm{A}qr = \mathrm{AK}pq\mathrm{K}pr$

etc.

On aboutit ainsi à une syntaxe des connecteurs totalement indépendante de la signification attribuée aux éléments *p*, *q*, *r*,... de B.

2. Point de vue logique.

2.1. *Calcul propositionnel.* Le point de vue courant est plus sémantique : on interprète les éléments 1 et 0 de la paire B comme les *valeurs de vérité* "vrai" et "faux" de la logique bivalente. La syntaxe ci-dessus devient alors le *calcul propositionnel.*

Dès le départ il convient de souligner que les "variables propositionnelles" p, q, r,... représentent des éléments de l'ensemble {vrai, faux} *et non pas d'une collection de "phrases"*. Certes il est loisible de poser : p = "π est irrationnel", q = "Paris est capitale de la France", r = "le cachalot est un insecte", etc... toutefois ces phrases interviennent ici non par leur contenu — dont l'appréciation incombe à l'algébriste, au géographe, au zoologue — mais uniquement par leur aspect logique de *propositions*, c'est-à-dire, dans une théorie donnée, de *noms* du "vrai" ou du "faux". A cet égard les propositions p et q ci-dessus sont *synonymes* en tant que noms du "vrai", ce qu'on peut écrire $p = q = 1$, alors que la proposition r est leur *négation* en tant que nom du "faux" : $r = \mathrm{N}p = \mathrm{N}q = 0$.

Noms et symboles usuels.

Connecteurs unaires : les connecteurs constants $p \mapsto 1$ et $p \mapsto 0$ sont respectivement la *tautologie* à une variable et *l'antilogie* à une variable ; le connecteur identique $p \mapsto p$ est la *synonymie* à une variable. Le connecteur N est la *négation ;* notations courantes pour la négation de p : $\urcorner p, \overline{p}$, souvent lus ou même écrits "non p" ; le caractère involutif déjà signalé entraîne : $\urcorner\urcorner p = p$. Pour les autres propriétés de la négation, en liaison avec les connecteurs binaires, voir les notices consacrées à ceux-ci.

Avatars triviaux de ces connecteurs : Du fait que p et $(p = 1)$ sont des propositions simultanément vraies (si p est vrai) ou simultanément fausses (si p est faux), une application telle que $p \mapsto (p = 1)$ n'est autre que la synonymie à une variable ; de même des applications telles que $p \mapsto (p = 0)$, $p \mapsto (p = p)$, $p \mapsto (p = \urcorner p)$ ne sont autres respectivement, que la négation, la tautologie ou l'antilogie à une variable.

Connecteurs binaires : les connecteurs constants $(p,q) \mapsto 1$ et $(p,q) \mapsto 0$ sont respectivement la tautologie et l'antilogie à deux variables.

Le connecteur K est la *conjonction ;* notation courante pour la conjonction de p,q : $p \wedge q$, souvent lu ou même écrit "p et q". Cette énonciation ne doit pas masquer le fait que le "et" de la langue courante a dans celle-ci bien d'autres emplois que cet emploi conjonctif (au sens logique, et non grammatical).

Le connecteur A est la *disjonction* (parfois dite "non exclusive" pour la distinguer de J) ; notation courante pour la disjonction de p,q : $p \vee q$, souvent lu ou même écrit "p ou q". L'ambiguïté du "ou" dans le langage courant appelle les mêmes réserves que ci-dessus.

Le connecteur C est l'*implication ;* notation courante pour l'implication de p,q (dans cet ordre) : $p \Rightarrow q$. Les énonciations usuelles "si p, alors q", "p implique q" présentent le grave défaut de suggérer l'existence d'un lien causal ; à tout prendre l'énonciation "p flèche q" serait moins dangereuse.

Le connecteur E est l'*équivalence logique* (ou *implication mutuelle*) ; notation courante de l'équivalence de p,q : $p \Leftrightarrow q$. Les énonciations usuelles "p si et seulement si q", "p équivaut à q" sont sujettes aux mêmes critiques que ci-dessus" ; "p biflèche q" vaudrait mieux.

Le connecteur J est *l'exclusion mutuelle* (dite aussi "disjonction exclusive") : notation courante de l'exclusion mutuelle de p,q : $p \not\Leftrightarrow q$, lu "ou bien p, ou bien q".

Remarque 1. Etant une application qui a pour ensemble d'arrivée {vrai, faux}, tout connecteur est une relation ; ayant pour ensemble de départ B^n, tout connecteur n-aire est une relation n-aire dans B. En particulier les connecteurs binaires sont des relations binaires dans B, mais visiblement ils sont *aussi* des opérations internes dans B. Cette particularité, que les connecteurs binaires sont seuls à posséder, fait qu'on peut leur appliquer indifféremment le vocabulaire des relations binaires ou celui des opérations. Ainsi il est différent de dire que l'opération $\wedge$ est commutative ou que la relation $\wedge$ est symétrique ; on peut considérer l'implication comme une relation d'ordre, l'équivalence logique comme une relation d'équivalence ; et l'on peut définir, aussi bien au sens des relations qu'au sens habituel de la Logique, la *réciproque* de l'implication $\Rightarrow$, notée $\Leftarrow$.

Remarque 2. Au contraire de la notation polonaise, les notations avec symbole intercalaire nécessitent en général des parenthèses, sauf dans le cas d'associativité : par exemple $p \wedge q \wedge r$ est correct en place de $(p \wedge q) \wedge r$. Quelques auteurs édictent des règles de priorité qui permettent l'économie de certaines parenthèses, mais ces règles ne sont pas adoptées par tous ; en revanche il est généralement admis que le connecteur unaire a priorité sur les connecteurs binaires et qu'on a le droit d'écrire $\neg p \wedge q$ au lieu de $(\neg p) \wedge q$. Bien entendu $\neg (p \wedge q)$ a une signification différente ; on peut d'ailleurs l'écrire $p \not\uparrow q$ en adoptant les symboles "à négation incorporée" $\not\uparrow, \not\downarrow, \not\Rightarrow, \not\Leftrightarrow$, pour désigner respectivement les composés de la négation avec la conjonction, la disjonction, l'implication, l'équivalence ; le symbole $\not\uparrow$, parfois réduit à $\uparrow$ ou même à la simple barre verticale, est appelé "barre de Sheffer".

2.2. *Calcul des prédicats* (ou des *attributs*). On rappelle qu'étant donné un ensemble U pris pour "univers", on nomme *prédicat* toute application f de U dans B (on dit aussi que f est un *attribut*, ou une *propriété*, que peut posséder ou non tel élément ou "individu" x de l'univers). La valeur $f(x)$ prise par f pour un individu x donné est une proposition au sens précisé en **[2.1]**.

Soit alors F l'ensemble des applications de U dans B : à tout connecteur n-aire γ appliquant B^n dans B on peut associer un opérateur n-aire Γ appliquant F^n dans F grâce à la définition

$$\forall\, x \in U,\ [\Gamma\,(f_1, f_2, \ldots, f_n)]\,(x) = \gamma\,[f_1\,(x), f_2\,(x), \ldots, f_n\,(x)]$$

Par un abus de langage habituel en pareil cas (cf. la "somme" de deux fonctions) on continue d'appeler "connecteurs" ces nouveaux opérateurs et l'on conserve pour chacun d'eux le nom et les notations attribués au connecteur propositionnel correspondant : on parle donc de la "négation" du prédicat f, notée $\neg f$, de la "conjonction" des prédicats f_1, f_2, notée $f_1 \wedge f_2$, etc... Par exemple, dans l'univers des quadrilatères, le prédicat "être carré" est la conjonction des prédicats "être losange" et "être rectangle".

Bien qu'ils soient, du point de vue mathématique, plus complexes que les connecteurs propositionnels, ces nouveaux connecteurs sont, pour l'intuition, plus conformes aux idées courantes de synonymie de négation, etc. Si, relativement à l'univers $\{\pi$, Paris, le cachalot$\}$, on considère les prédicats "être irrationnel", "être capitale de la France", "être un insecte", il n'y a plus entre eux aucun lien de synonymie ou de négation, contrairement à la situation un peu étrange pour le sens commun rencontrée en **[2.1]**.

En un certain sens le calcul des prédicats est donc plus accessible élémentairement que le calcul propositionnel, d'autant plus qu'il est susceptible d'une interprétation ensembliste bien connue : il suffit de prendre chaque prédicat comme fonction caractéristique d'un sous-ensemble de U, qui peut être appelé son "domaine de vérité". Alors à la négation correspond la complémentarité, à la conjonction correspond l'intersection, etc. Voir à ce sujet les notices consacrées aux divers connecteurs.