noyau n. m.

Etym. : lat. de basse époque *nucale* (semblable à une noix), provençal anc. *nogalh ;* a peut-être subi l'influence du lat. populaire *nodellus* (nœud). Les équivalents germaniques, all. *Kern*, angl. *kernel*, qui ont donné naissance à la notation *Ker*, se rattachent à la famille de *grain*.

Le sens pr. (partie centrale de certains fruits) se retrouve parfois en géométrie sous forme un peu vague : ainsi certains parlent du « noyau » de la surface des ondes de Fresnel. Mais c'est plutôt le sens fig. (partie essentielle ou génératrice d'un tout) qui est à l'origine des sens math. spécialisés.

1. Algèbre.

1.1. *Noyau d'un homomorphisme de groupe.* Étant donné un homomorphisme f d'un groupe G dans un groupe H, on sait que l'image réciproque de tout sous-groupe de H est un sous-groupe de G; en particulier, si e est l'élément neutre de H, l'ensemble des éléments de G qui ont e pour image forme un sous-groupe de G, et même un sous-groupe distingué : c'est ce sous-groupe qu'on appelle *noyau* de l'homorphisme f; on le note usuellement Ker(f). Si f est injective, Ker(f) ne contient que l'élément neutre de E; la réciproque de cette proposition est vraie.

1.2. *Noyau d'un homomorphisme d'anneau.* Tout homomorphisme d'anneau est nécessairement un homomorphisme de groupe pour le groupe additif de l'anneau; ici, de plus, le noyau de cet homomorphisme de groupe est un sous-anneau et même un idéal. On l'appelle aussi noyau de l'homomorphisme d'anneau; si l'anneau est un corps, tout homomorphisme de corps étant injectif, le noyau se réduit à l'élément neutre (zéro) du groupe additif.

1.3. *Noyau d'un homomorphisme d'espace vectoriel.* De même, si f est un homomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, Ker(f) est l'image réciproque du vecteur nul de F; on montre que c'est un sous-espace vectoriel de E, et que, si E est de dimension finie,

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim f^{+}(\mathrm{E})$$

Si l'on désigne E par déf(f), et par Im(f) l'image $f^{+}(\mathrm{E})$ de E par f, cette formule peut encore s'écrire

$$\dim \mathrm{déf}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

2. Analyse.

On se placera dans l'espace vectoriel complexe F des fonctions définies sur une partie compacte E de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et à module de carré sommable; N désignera une fonction définie sur E $\times$ E à valeurs complexes et à module de carré sommable.

2.1. *Noyau d'une transformation intégrale.* L'application h qui à toute fonction f de F associe la fonction $x \mapsto \int_E \mathrm{N}(x, t) f(t) dt$ est dite *transformation intégrale de noyau* N; on démontre que c'est un endomorphisme de F.

2.2. *Noyaux d'équations intégrales.* Considérons les équations intégrales de type Volterra-Fredholm :

$$\lambda f = h(f) + g \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

où g est une fonction donnée, f la fonction inconnue et h l'endomorphisme ci-dessus : N est alors appelé *noyau* de l'équation intégrale.

Une méthode générale d'intégration consiste à former les *noyaux itérés :*

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}$$

$$\mathrm{N}_{n+1}(x, t) = \int_E \mathrm{N}_n(x, u) \mathrm{N}(u, t)\, du$$

puis, sous réserve de convergence, le *noyau résolvant* $\mathrm{N}^* = \sum_{1 \leqslant n} \frac{\mathrm{N}_n}{\lambda^n}$ auquel est attaché l'endomorphisme h^*; on obtient finalement

$$f = \frac{1}{\lambda} [g + h^*(g)]$$

Remarque: Il existe d'autres noyaux intégraux (noyaux de Poisson) et des noyaux de distribution, non intégraux, qui généralisent les précédents. On pourra consulter : Leçons d'Analyse fonctionnelle, de Riesz Nagy.

3. Théorie des graphes.

En théorie des graphes le mot *noyau* est aussi utilisé dans le sens suivant. Étant donné un graphe G sur un ensemble E, c'est-à-dire un sous-ensemble de $E \times E$, on dit qu'une partie N de E est un *noyau* du graphe G si et seulement si, en désignant par Γ_x la coupe de G suivant x :

$$\forall x \in N,\ \Gamma_x \cap N = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \complement_E N,\ \Gamma_x \cap N \neq \varnothing$$

Cette notion est particulièrement intéressante dans le cas d'un graphe représentant une *relation de préférence.* En effet, si N est un noyau pour cette relation, cela signifie d'une part qu'aucun élément de N ne peut être préféré à un autre élément de N, mais d'autre part qu'à tout élément de E n'appartenant pas à N on peut préférer au moins un élément de N.