caractéristique, n. f.

Cet adjectif substantivé garde son sens usuel de « marque distinctive » (v. CARACTÉRISTIQUE, adj.). Dans ses diverses acceptions mathématiques, dont beaucoup ont vieilli, il désigne toujours un entier.

1. Algèbre.

Caractéristique d'un anneau unitaire. Dans $\mathbb{Z}$, on sait que toute congruence modulo q ($q \in \mathbb{N}$) définit un anneau-quotient $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$; q en est appelé la *caractéristique.* Plus généralement, si e désigne l'unité d'un anneau unitaire A, le sous-anneau de A engendré par $\{e\}$ est nécessairement isomorphe à un certain anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et q est appelé caractéristique de A. En d'autres termes, A, étant groupe additif, est un $\mathbb{Z}$-module et il est légitime d'y considérer les éléments de la forme ke ($k \in \mathbb{Z}$) : s'il est possible de trouver des naturels k non nuls tels que $ke = 0$, A a pour caractéristique le plus petit d'entre eux, sinon A est de caractéristique nulle.

Lorsque A est un corps, on peut aussi rattacher sa caractéristique à la notion de sous-corps premier [CORPS, 2.3].

2. Arithmétique.

Caractéristique d'un nombre réel a. Approximation entière par défaut de a. On dit plus couramment : *partie entière* de a [APPROXIMATION].

Cependant le mot reste usuel dans le cas des logarithmes décimaux, et les caractéristiques négatives donnent alors lieu à une écriture très particulière avec le signe — suscrit; par exemple on écrit habituellement log 0,07 sous la forme $\bar{2},84510$ signifiant

$-2+0{,}84510$. Il semble indiqué de réserver le mot pour cet emploi spécial, avec la notation spécifique qu'il comporte : on dira que la *caractéristique* de log 7000 est 3 et que celle de log 0,07 est $\bar{2}$ (qu'on peut lire deux barre). A ce détail d'écriture près, on rappelle que la caractéristique du logarithme décimal d'un décimal positif est la *taille* de celui-ci (V. ce mot et aussi MANTISSE).

3. Géométrie algébrique.

Caractéristiques d'une courbe algébrique plane (Plücker). Les propriétés ponctuelles et tangentielles de toute courbe algébrique plane peuvent être entièrement décrites à l'aide de six naturels, d'ailleurs liés par quatre conditions deux à deux duales : l'ordre (ou degré) de la courbe, sa classe, les nombres de ses points doubles, de ses tangentes doubles, de ses rebroussements et de ses inflexions, sous réserve que ce décompte soit convenablement opéré dans le plan projectif complexe. Par exemple toute courbe d'ordre 6 et de classe 4 admet : 4 points doubles, 3 tangentes doubles, 6 rebroussements, aucune inflexion; tel est, malgré l'apparence, le cas de l'hypocycloïde dite « à 4 rebroussements », laquelle admet en fait la droite de l'infini comme tangente double de rebroussement aux points cycliques, et 4 points doubles imaginaires à distance finie.

caractéristique, adj. 1971-1/2

[caractériser]

Us.: Au sens pr. le grec χαρακτηρ désignait la marque entaillée ou gravée; de là : tout ce qui permet durablement de reconnaître un individu, un élément, un groupe d'individus ou d'éléments au sein d'un ensemble plus vaste d'êtres analogues. Ce sens s'étend facilement aux sciences : l'odeur caractéristique de l'ozone, l'appareil digestif caractéristique des ruminants, etc.

Math.: Sens assez divers qui vont du précédent aux sens plus vagues : « en liaison étroite avec », « donnant des renseignements importants sur ». En analyse cette « liaison » s'apparente souvent aux transformations de Fourier ou Laplace; en géométrie le sens s'est cristallisé autour du concept de contact.

1. Théorie des ensembles.

1.1. *Propriété caractéristique.* Est propriété caractéristique d'un objet toute propriété équivalente à la définition de cet objet. Par exemple le cercle circonscrit à un triangle peut aussi être défini comme l'ensemble des points du plan du triangle qui se projettent orthogonalement sur les côtés suivant trois points alignés.

1.2. *Fonction caractéristique d'un ensemble.* On appelle *fonction caractéristique* d'une partie A d'un ensemble E l'application f de E dans $\{0, 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow f(x) = 1$$

Ex.: Si $i \in \mathrm{J}$, $j \in \mathrm{J}$, le symbole de Kronecker δ_i^j définit la fonction caractéristique de l'ensemble diagonal de $\mathrm{J} \times \mathrm{J}$.

2. Algèbre et analyse.

2.1. *Polynome caractéristique d'une matrice carrée.* Soit A une matrice carrée d'ordre n, I_n la matrice unité de même ordre, ayant toutes deux leurs éléments dans un corps K; λ étant un élément variable de K, on appelle *polynome caractéristique* de A le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ (ou $\lambda I_n - A$ suivant les auteurs et les circonstances). Les racines de ce polynome, valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_n$ est singulière, sont les *valeurs propres* de A. (On a appelé jadis « valeurs caractéristiques » les inverses des valeurs propres, mais ce sont les valeurs propres qui les ont supplantées dans l'usage actuel.)

2.2. *Équation caractéristique d'une équation ou d'un système différentiels* (cette notion, historiquement antérieure à la précédente, s'y rattache naturellement à l'aide de la réduction des matrices ou de la transformation de Laplace). A tout système différentiel linéaire homogène à coefficients constants peut être associée par le changement de variable $y_i = A_i e^{sx}$ (lequel équivaut ici à la transformation de Laplace), une équation algébrique en s, dite *équation caractéristique* du système différentiel; la connaissance des racines de l'équation caractéristique permet de former l'intégrale générale du système. *Ex.:* le système

$$\begin{cases} y'_1 + 2y_1 - y_2 = 0 \\ y'_1 - y_1 + y'_2 + 3y_2 = 0 \end{cases}$$

a pour équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ s-1 & s+3 \end{vmatrix} = 0$$

dont les racines -1 et -5 fournissent l'intégrale générale :

$$y_1 = ae^{-x} + be^{-5x} \quad y_2 = ae^{-x} - 3be^{-5x}$$

2.3. *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire.* Soit X une variable aléatoire, F sa fonction de répartition :

$$F(x) = \text{Prob}\ (X \leqslant x);$$

on appelle *fonction caractéristique* de cette variable X la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

(S'il existe une fonction de densité f, $dF(x)$ s'écrit $f(x)dx$; si X est une variable discrète et si $p_k = \text{Prob}\ (X = x_k)$, l'intégrale devient $\sum_k p_k e^{itx_k}$.

Au changement de variable près $t = 2\pi n$, on reconnaît dans φ_X la transformée de Laplace de la fonction de densité (au sens large); on peut donc écrire, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes :

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$$

Ex. 1: distribution uniforme sur $[-a, +a]$: $f(x) = \dfrac{1}{2a}$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dx = \frac{\sin at}{at}$$

Ex. 2: distribution de Poisson : $p_k = e^{-m} \dfrac{m^k}{k!}$

$$\varphi_X(t) = e^{m(e^{it}-1)}$$

2.4. *Déterminants caractéristiques.* Soit un système linéaire $\sum_i a_i^j x^i = b^j$, dans lequel le nombre des équations dépasse le rang r

du système, et soit Δ un déterminant principal de ce système, qu'on peut toujours supposer relatif aux r premières équations et aux r premières inconnues; on appelle *déterminant caractéristique* tout déterminant Δ_s qu'on peut former en bordant Δ par une ligne de coefficients a_i^s empruntés à une équation non principale ($s \notin \{1, 2, \ldots, r\}$ et $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$) et par la colonne constituée des seconds membres correspondants b^j ($j \in \{1, 2, \ldots, r, s\}$). La nullité *simultanée* de tous les Δ_s caractérise un système compatible.

3. Géométrie différentielle.

3.1. *Points, lignes caractéristiques.* Chaque courbe d'une famille à un paramètre réel sur une surface, chaque surface d'une famille à deux paramètres réels dans l'espace touche son enveloppe en un ou plusieurs points appelés *points caractéristiques* de la courbe ou de la surface; chaque surface d'une famille à un paramètre réel touche son enveloppe suivant une ou plusieurs lignes appelées *lignes caractéristiques* de la surface. *Ex.:* chaque génératrice d'une surface développable est la ligne caractéristique du plan tangent à la développable le long de cette génératrice, et le point caractéristique de la génératrice appartient à l'arête de rebroussement de la développable.

3.2. *Bandes caractéristiques.* Dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre on appelle *bande caractéristique* toute famille continue à un paramètre réel d'éléments de contact satisfaisant à l'équation : les surfaces intégrales peuvent s'obtenir comme enveloppes de bandes caractéristiques. Dans le cas particulier des équations linéaires, on peut définir des *lignes caractéristiques*, par chacune desquelles passent une infinité de bandes caractéristiques; les surfaces intégrales peuvent alors être engendrées par ces lignes.

caractériser, vb. tr. 1$^{\text{er}}$ gr.

Le sens se rattache au sens **[1.1]** : *caractériser* un objet, c'est indiquer une propriété caractéristique de cet objet. On peut prendre pour exemple la phrase finale de **[2.4]**.