Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Il est créé, dans le *Bulletin*, une rubrique des problèmes. Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de Faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le *Bulletin* publie les meilleures solutions.

Énoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Gérard Letac
Rubrique des problèmes
I.U.T. de Clermont
B.P. 29 - 63-*Aubière*.

Énoncés.

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 31 décembre 1971.

Énoncé n° 12 : Louis Comtet (Faculté des Sciences d'Orsay).

Soit $S(p, k)$ le nombre de partitions en k classes d'un ensemble à p éléments (ou nombre de Stirling de 2e espèce : voir l'article de M. Glaymann, A.P.M., janvier-février 1971, p. 87). Si p est premier, montrer que p divise les $S(p, k)$, si $2 \leqslant k \leqslant p - 1$.

Énoncé n° 13 : Eugène Ehrhart (École Militaire de Strasbourg).

A et B étant deux corps convexes tels que $A \subset B$, montrer que l'aire de la surface qui limite A est inférieure à celle de B.

Énoncé n° 14 : Gérard LETAC (I.U.T. de Clermont).

Soit f une fonction continue sur les réels positifs. Le célèbre lemme de Croft affirme que si pour tout x la suite $(f(nx))_{n>1}$ possède une limite si $n \to \infty$, il en est de même pour $f(x)$ si $x \to \infty$. Peut-on dire que, si pour tout x, la suite $(f(nx))_{n>1}$ est monotone (ou bien bornée supérieurement), alors la fonction $f(x)$ est monotone (ou bien bornée supérieurement) sur les réels positifs?

Solutions.

Énoncé n° 2 : (G. LETAC, I.U.T. de Clermont).

Soit E l'ensemble des quadruplets de nombres $\geqslant 0$. Si $q = (x, y, z, t)$ est élément de E, on pose :

$$f_1(q) = (|y - x|, |z - y|, |t - z|, |x - t|) \text{ et } f_{n+1}(q) = f_1(f_n(q)).$$

Existe-t-il, quel que soit q, un entier n tel que $f_n(q) = (0, 0, 0, 0)$?

Solution: (J. DUFRESNOY, Faculté des Sciences de Bordeaux).

La réponse est non. En effet, considérons le quadruplet $q = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ où α est la racine réelle (supérieure à 1) de l'équation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$; on a :

$$f_1(q) = (\alpha - 1, \alpha(\alpha - 1), \alpha^2(\alpha - 1), (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1)) = (\alpha - 1, \alpha(\alpha - 1), \alpha^2(\alpha - 1), \alpha^3(\alpha - 1))$$

d'où $f_n(q) = ((\alpha - 1)^n, \alpha(\alpha - 1)^n, \alpha^2(\alpha - 1)^n, \alpha^3(\alpha - 1)^n) \neq (0, 0, 0, 0)$ pour tout entier n.

Énoncé n° 3 : (J. LECOQ, École normale de Caen).

Quel est le plus petit multiple de 49 qui s'écrit, en notation décimale, à l'aide du chiffre 1 seul?

Solution: (M. BAUVAL, Lycée J.-Ferry, Versailles).

Le nombre qui, en notation décimale, s'écrit à l'aide de n chiffres 1 consécutifs est : $\dfrac{10^n - 1}{9}$. Il est divisible par 49 si et seulement si $10^n - 1$ est divisible par 49.

1° Tout d'abord, il est nécessaire que $10^n \equiv 1$ mod. 7.

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 9 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 3 \times 2 = 6,\ 10^4 \equiv 3 \times 6 = 18 \equiv 4,$$
$$10^5 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv 5,\ 10^6 \equiv 3 \times 5 = 15 \equiv 1.$$

Donc, « $10^n - 1$ est multiple de 7 » équivaut à : « n est multiple de 6 ».

2° Modulo 49, $100 \equiv 2$ et $10^6 = 100^3 \equiv 2^3 = 8 = 7 + 1$.

$10^{6n} \equiv (7 + 1)^n = 1 + 7n + 49\, C_n^2 + \ldots$ par la formule du binôme.

$10^{6n} \equiv 1 + 7n$ mod. 49.

Le plus petit nombre n tel que $10^{6n} - 1$ soit multiple de 49 est donc 7. Le nombre demandé est celui formé en écrivant consécutivement $6 \times 7 = 42$ fois le chiffre 1.

Autres solutions de : H. BARBERIS (Menton), P. BELLIVIER (Lorgues), A. BOTTERO (Lycée Jules-Ferry à Cannes), G. COQUET (Centre Universitaire de Valenciennes), J. DAUTREVAUX (I.S.E.A. à Mulhouse), M. DEHOUX (C.E.S. Solre-le-Château), E. EHRHART (École Militaire de Strasbourg), J. M. FAURE (Bruay-en-Arbois), J. HOFFMAN (Lycée Louis-Barthou à Pau), M^me^ P. LANNE (I.D.E.N. Mérignac), J. C. NEBOIT (Aulnay-sous-Bois), F. PENNAMEN (Saint-Omer), Ch. RODRIGUEZ (Faculté des Sciences Saint-Charles à Marseille), M^lle^ M. STROWSKI (Lezoux), M^lle^ G. SAMBARD (C.E.S. de Saint-Quentin), M^lle^ M. VIAN (étudiante à Orsay) et l'auteur.

Généralisation : (J. LEGRAND, Faculté des Sciences de Bordeaux).

On va résoudre le problème en le généralisant un peu et chercher quel est le plus petit multiple de 7^k où $k \in \mathbb{N}^*$, qui s'écrit en notation décimale à l'aide du chiffre 1 seul.

1° Soit $A_n = \overline{11, \ldots, 1}$ (n chiffres en notation décimale; $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de trouver le plus petit entier positif n tel que :

$$\boxed{(1) \qquad A_n \equiv 0 \pmod{7^k}}\,.$$

Or on a :

$$9\,A_n = 10^n - 1 \qquad \text{et comme } (9, 7^k) = 1 \qquad (1)$$

est équivalent à

$$\boxed{(2) \qquad 10^n \equiv 1 \pmod{7^k}}\,.$$

On a donc à trouver le plus petit entier n positif satisfaisant à (2).

2° Pour résoudre ce problème on va utiliser quelques propriétés d'arithmétique :

a) Rappelons le **Théorème d'Euler** :

« *Soient* β *et* m *deux entiers positifs tels que* $(\beta, m) = 1$; *l'ensemble des entiers* n *tels que :*

$$\beta^n \equiv 1 \ (mod\ m)$$

est formé des multiples d'un diviseur de $\varphi(m)$, *où* φ *désigne l'indicateur d'Euler* »
et la **définition suivante** :

« *Soient* β *et* m *deux entiers positifs tels que* $(\beta, m) = 1$; *on dit que* β *appartient à* h *modulo* m *si* h *est le plus petit entier positif*, tel :

$$\beta^h \equiv 1 \ (mod\ m). \text{ »}$$

D'après le théorème d'Euler, h *est un diviseur de* $\varphi(m)$.

b) On va maintenant établir un lemme et un théorème qui conduiront au résultat cherché.

Lemme.

« *Soit* p *un nombre premier* ≥ 3 *et* $\beta \in N^*$ *vérifiant*

$$\begin{cases} (2) \quad \beta^{(p-1)} \equiv 1 \pmod p \\ (3) \quad \beta^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2} \end{cases}$$

alors pour tout $k \in N^*$ *on a :*

$$\begin{cases} (4) \quad \beta^{(p-1)p^{(k-1)}} \equiv 1 \pmod{p^k} \\ (5) \quad \beta^{(p-1)p^{(k-1)}} \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}. \text{ »} \end{cases}$$

La démonstration se fait *par récurrence sur* N^*. Les propriétés (4) et (5) sont vraies pour $k = 1$ d'après (2) et (3).

Faisons l'hypothèse que (4) et (5) sont vraies pour $k = s$; on peut écrire :

$$\beta^{(p-1)p^{s-1}} = 1 + \lambda p^s, \text{ où } \lambda \in \mathrm{N} \text{ avec } \lambda \not\equiv 0 \pmod p$$

d'où

$$\beta^{(p-1)p^s} = (1 + \lambda p^s)^p = 1 + \lambda p^{s+1} + \sum_{p-1}^{q=2} C_p^q \lambda^q p^{qs} + \lambda^p p^{sp}.$$

Or, $s(p - 1) \geq 2$ car $s \geq 1$ et $p \geq 3$, d'où $sp \geq p + 2$.

De plus, p étant premier, on a :

$$(p, q!) = 1, \text{ pour } 1 \leq q \leq p - 1$$

On en déduit par application du *théorème de Gauss*

$$p / C_p^q, \text{ pour } 2 \leq q \leq p - 1.$$

Il en résulte en remarquant que : $qs + 1 \geq s + 2$ car $(q - 1)s \geq 1$

$$p^{s+2} / p^{qs+1} / C_p^q \lambda^q p^{qs}, \text{ pour } 2 \leq q \leq p - 1$$

ce qui permet d'écrire

$$\beta^{(p-1)p^s} = 1 + \lambda p^{s+1} + \mu p^{s+2}; \ \lambda \text{ et } \mu \in \mathrm{N}^*; \ \lambda \not\equiv 0 \pmod p$$

ceci entraîne (4) et (5) pour $k = s + 1$, d'où le résultat.

Ce lemme établi, on en déduit le théorème suivant :

Théorème.

« *Soit* p *un nombre premier* ≥ 3 *et* $\beta \in N$ *tel que*

$$\begin{cases} \beta \text{ appartient à } (p - 1) \text{ modulo } p \\ \beta^{(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^2} \end{cases}$$

alors β *appartient à* $(\mathrm{p} - 1)p^{k-1}$ *modulo* p^k *pour tout* $k \in N^*$. »

Le théorème est vrai pour $k = 1$ et de plus β satisfait aux conditions (2) et (3) du lemme.

Faisons l'hypothèse que le théorème est vrai pour $k = s \geq 1$ et désignons par d le nombre auquel β appartient modulo p^{s+1}.

d est un diviseur de $\varphi(p^{s+1}) = (p - 1)p^s$.

De plus, on a :

$$\beta^d \equiv 1 \pmod{p^{s+1}}$$

d'où, *a fortiori :*

$$\beta^d \equiv 1 \pmod{p^s}$$

ce qui entraîne que d est un multiple du nombre auquel β appartient modulo p^s, c'est-à-dire un multiple de $(p-1)p^{s-1}$, d'après l'hypothèse faite.

On a donc

$$\begin{cases} (p-1)p^s = dd_1 \\ \qquad d = d_2(p-1)p^{s-1} \end{cases} \qquad (d_1 \text{ et } d_2 \in \mathbf{N}^*)$$

d'où il résulte

$$d_1 d_2 = p.$$

On a donc

$$\text{ou bien } d_1 = p \text{ ou bien } d_1 = 1.$$

Mais si $d_1 = p$, on a

$$d = (p-1)p^{s-1}$$

d'où

$$\beta^{(p-1)p^{s-1}} \equiv 1 \pmod{p^{s+1}}$$

ce qui est impossible; en effet, β satisfaisant aux conditions (2) et (3) du lemme satisfait à (5) pour $k = s$.

Il en résulte que : $d_1 = 1$, d'où $d = (p-1)p^s$ et le théorème est vrai pour $k = s+1$; il est donc démontré par récurrence sur $\mathbf{N}^*$.

c) D'après 1° *le nombre* n *cherché est le nombre auquel* 10 *appartient modulo* 7^k.

Or, 10 appartient à $7 - 1 = 6$ modulo 7; en effet on a (modulo 7) :

$$\begin{cases} 10 \equiv 3 \\ 10^2 \equiv 9 \equiv 2 \\ 10^3 \equiv 6 \\ 10^4 \equiv 18 \equiv 4 \\ 10^5 \equiv 12 \equiv 5 \\ 10^6 \equiv 15 \equiv 1. \end{cases}$$

De plus, on peut écrire (modulo 49) :

$$\begin{aligned} 10^6 &\equiv 10^4 \times 2(49+1) \equiv 2 \times 10^4 \equiv 2 \times 10^2 \times 2\,(49+1) \\ &\equiv 2^2 \times 10^2 \equiv 2^2 \times 2(49+1) \equiv 2^3 \end{aligned}$$

d'où

$$10^{7-1} \not\equiv 1 \pmod{7^2}.$$

Les conditions du *théorème de* b) *sont satisfaites avec* $\beta = 10$ *et* $p = 7$.

Par suite, 10 appartient à $6 \times 7^{k-1}$ modulo 7^k *et le plus petit multiple de* 7^k *s'écrivant en notation décimale à l'aide du chiffre* 1 *seul admet donc :* $6 \times 7^{k-1}$ *chiffres.*

Jacques Legrand
M. A. Département Mathématiques
Faculté des Sciences de Bordeaux.